La géométrie hyperboliques

Bernard Ycart - Paris

Cet article, réalisé pour l'exposition Horizons mathématiques puis Maths 2ooo, avait pour but de faire partager l'enthousiasme pour quelques beaux résultats et, si possible, de donner envie au lecteur d'en apprendre plus sur ce vaste sujet.

Pendant des siècles, sur la base de la Bible que constituaient les "éléments" d'Euclide (IIIe siècle avant J.-C.), faire de la géométrie a consisté à définir des points, des droites, et à les assembler en suivant une sorte de règle du jeu : un ensemble d'axiomes ou postulats.

Ces axiomes étaient tous basés sur l'intuition sensible d'ailleurs la limite entre ce qui était "l'évidence physique" et simple convention, n'apparaissait pas toujours clairement.

On peut formuler la règle du jeu de la géométrie euclidienne plane de la façon suivante (Hilbert) :

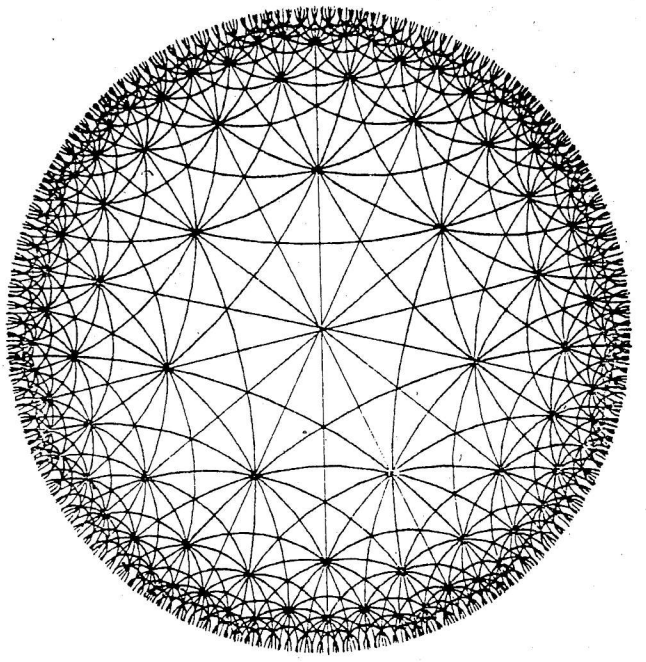
Axiomes d'incidence

- Deux points appartiennent à une droite et une seule.
- Toute droite contient au moins trois points.
- Il existe au moins trois points non alignés.

Axiomes d'ordre

- Si trois points sont alignés, un et un seul est entre les deux autres.
- Soient A et B deux points de la droite A, il existe un point C de A tel que B soit entre A et C.

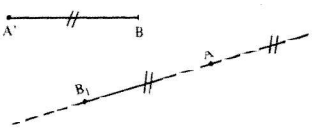
- Soit (A, B, C) un triangle, D un point entre A et B, toute droite Δ passant par D coupe l'un des côtés (B, C) ou (A, C).

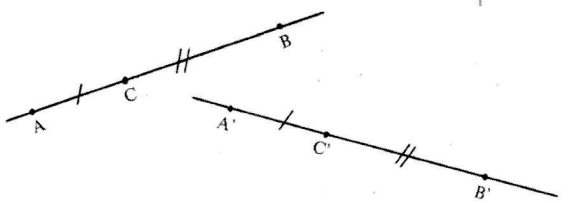


Mosaïque hyperbolique de Christian Léger - Paris

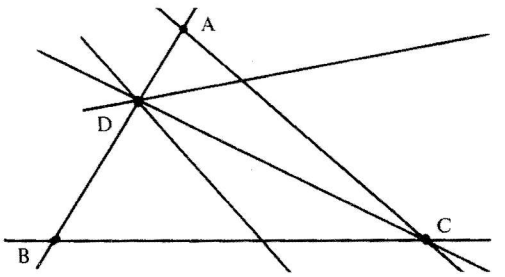
Axiomes de congruence

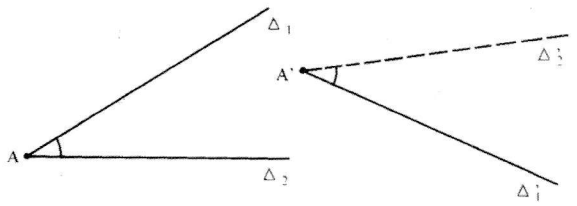
• Si deux segments sont congrus à un troisième, ils sont congrus entre eux. Soit A un point dune droite Δ. Soit (A', B') un segment. Il existe sur Δ deux points B_1 et B_2 tels que les segments (A, B_1), (A, B_2) et (A', B') soient congrus.





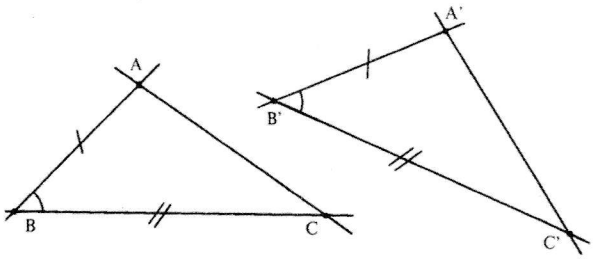
• Soient A, B, C (resp. : A', B', C') trois points d'une droite Δ (resp. : Δ') tels que C soient entre A et B (resp. : C' entre A'et B'). Si (A, B) est congru à (A', B') et (A, C) est congru à (A',C') alors (C, B) est congru d (C',B').





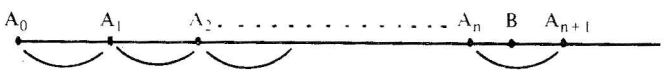
• Soient Δ_1 et Δ_2 deux demi-droites d'origine A. Soit Δ'_1, une demi-droite d'origine A'. Il existe une demi-droite Δ'_2 d'origine A' telle que les angles (Δ_1, Δ_2) et (Δ'_1, Δ'_2) soient congrus.

• Soient (A, B, C) et (A', B', C') deux triangles. Si [A, B] est congru a [A', B'], [B, C] à [B', C'] et l'angle ABC à l'angle A'B'C'; alors les deux triangles sont congrus (cas d'égalité des triangles!).



Axiome d'Archimède

• Soit Δ une demi-droite d'origine A_0, A_1 un point de Δ. Construisons sur Δ les points A_2,•••, A_n,••• tels que pour tout n, le segment $[A_n, A_{n+1}]$ soit congru au segment $[A_0, A_1]$. Pour tout point B de Δ, il existe un entier n tel que B soit entre A_n et A_{n+1}.



Axiome d'Euclide

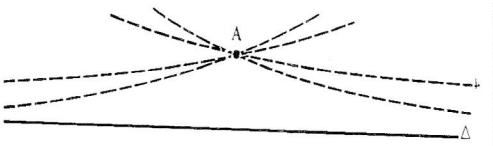
• Soit A une droite A un point n'appartenant pas d A. On peut mener par A une droite et une seule ne rencontrant pas A.

Ce dernier postulat a eu une histoire mouvementée : pendant vingt siècles de nombreux géomètres se sont attachés à le démontrer, c'est-à-dire à le déduire comme un théorème des axiomes précédents. Dans un premier temps, beaucoup ont tenté des démonstrations directes, chacun commençant par montrer en quoi ses prédécesseurs avaient tort, puis fournissant des preuves tout aussi peu convaincantes.

Plus intéressantes pour notre sujet sont des tentatives de démonstrations par l'absurde, apparues dès la fin du XVIIe siècle, notamment chez G. Sacchieri (1667-1733): il s'agissait de supposer vrai un postulat opposé à celui d'Euclide et d'en déduire, si possible, une contradiction.

Axiome non-Eudide (P)

• Soit Δ une droite et A un point n'appartenant pas à Δ. On peut mener par A une infinité de droites ne rencontrant pas Δ.



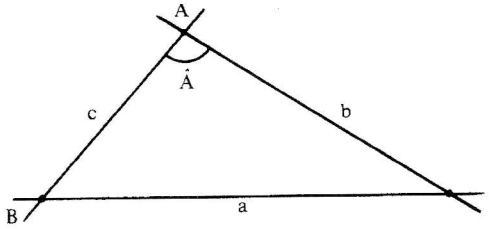
Après de nombreux développements sans contradiction flagrante, Sacchieri concluait néanmoins à la véracité du postulat d'Euclide, par un argument qui tenait plus de la conviction intime que de la rigueur mathématique.

C'est le mérite des mathématiciens du XIXe siècle : Lobachevski, Bolyai et sans doute Gauss, que d'avoir su observer que ces deux postulats sur les parallèles, aucun n'était plus contra-

dictoire que l'autre (1). Il fallait donc désormais les considérer non comme des théorèmes à démontrer, mais bien comme des axiomes dormant chacun naissance de deux géométries différentes. On pouvait dans la nouvelle géométrie dite de Lobachevski, ou hyperbolique, définir une distance, étudier les propriétés des triangles, des cercles, et plus généralement chercher un équivalent à chacun des résultats connus de la géométrie euclidienne.

Voici quelques exemples de formules concernant les triangles :

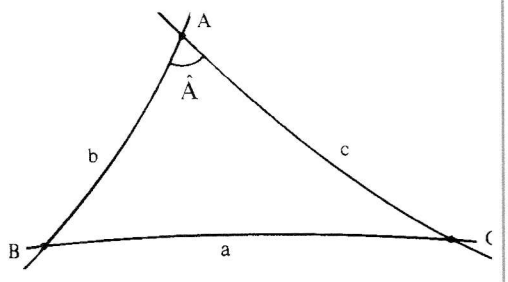
Géométrie d'Eudide



$a / \sin A = b / \sin B = c / \sin C$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

Géométrie de Lobachevski



$$\frac{\text{sh}\, a}{\sin \hat{A}} = \frac{\text{sh}\, b}{\sin \hat{B}} = \frac{\text{sh}\, c}{\sin \hat{C}}$$

$\text{cha} = \text{chb} \cdot \text{chc} - \text{shb} \cdot \text{shc} \cos A.$

cas particulier (théorème de Pythagore)

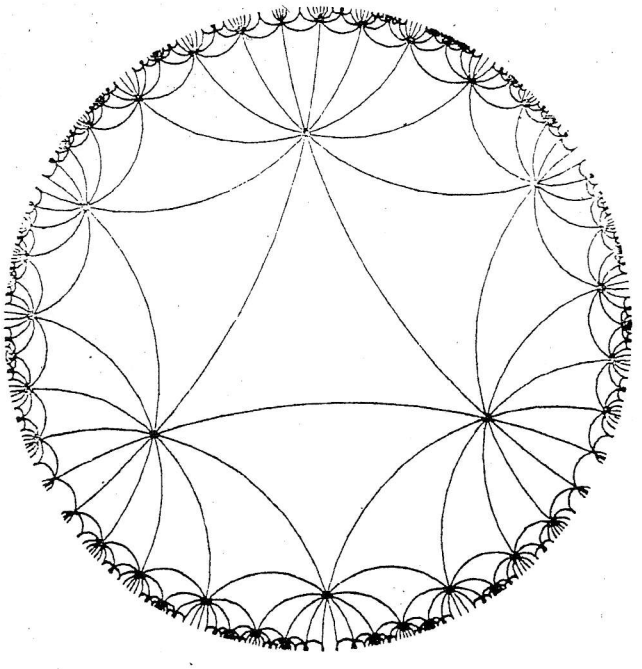
$A = \pi/2$: $a^2 = b^2 + c^2$.

et $\text{ch}\, a = \text{ch}\, b\ \text{ch}\, c$

(sh et ch désignent les fonctions sinus et cosinus hyperboliques).

On constate, en prenant un développement limité à l'ordre deux des formules nouvelles, que l'on retrouve les premières.

La géométrie d'Euclide apparaît en fait comme un cas particulier de celle des Lobachevski, le cas de l'infiniment petit. En d'autres termes, à condition d'être "suffisamment petits", nous pourrions très bien vivre dans un espace de Lobachevski sans nous apercevoir de la différence. Il existe pourtant des différences fondamentales : la somme des angles d'un triangle euclidien est π, pour un triangle non-euclidien, elle est simplement inférieure à π.



On peut donc espérer une plus grande variété dans les figures de géométrie non euclidienne : il existe par exemple des triangles équilatéraux dont tous les angles valent $\pi/4$ ou $\pi/5$, etc.

Cette diversité est en quelque sorte tempérée par l'absence de similitude : dans le plan euclidien, deux triangles ayant les mêmes angles sont semblables, mais non nécessairement égaux ; alors que deux triangles non euclidiens ayant les mêmes angles sont superposables. Leur aire commune est égale au "défaut angulaire" :

$\pi - A - B - C.$

(1) La preuve mathématique de cette affirmation, C'est justement l'existence des mêmes (euclidien, de Poincaré).

Vue sous l'angle historique, la géométrie de Lobachevski semble jusqu'ici n'être qu'une création artificielle née d'un raffinement axiomatique. Il n'en est rien : nous allons voir qu'en fait elle s'introduit de façon tout d fait naturelle en mathématiques.

Modèles de la géométrie hyperbolique

En 1872, dans son "Programme d'Erlangen", Félix Klein bouleverse la notion même de géométrie en la rattachant à la théorie des groupes. Une géométrie est désormais l'étude des invariants d'un espace sous l'action transitive d'un groupe donné. C'est en d'autres termes l'étude des propriétés de certaines figures géométriques qui se conservent quand on applique à ces figures les transformations d'un groupe donné.

C'est en ce sens que la géométrie de Lobachevski apparaît naturellement en mathématiques, dans un domaine à priori assez inattendu : l'analyse complexe.

Nous supposons connues dans le plan complexe C (identifié à R^2), les notions suivantes : transformation holomorphe, arc de courbe paramétré, intégrale curviligne, angle (non orienté) de deux arcs de courbes différentiables.

Désignons par *H* le demi-plan complexe supérieur ouvert

$$H = \{z = x + iy : y > 0\}$$

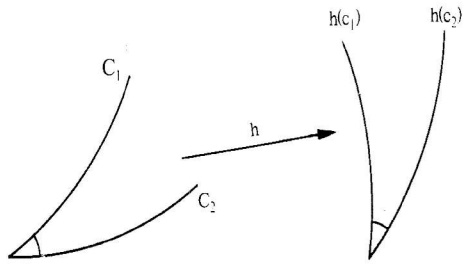
Un automorphisme complexe de H est une bijection de H dans lui-même, holomorphe, dont la réciproque est également holomorphe. L'ensemble de tous les automorphismes complexes de H, muni de la composition des applications, forme un groupe G qu'il est relativement aisé de déterminer ((5), p. 185):

$$G = \{ Z \to h(z) = (az + b) / (cz + d) : (a,b,c,d) \in R^4, ad - bc = 1 \}$$

Ce groupe est isomorphe au groupe $SL_2(R)$ des matrices réelles carrées d'ordre 2 et de déterminant 1.

Grâce à l'analyse complexe, *H* est donc naturellement muni d'un groupe de transformations. Pour déterminer quelle est la géométrie correspondante, cherchons quels sont les invariants de *H* sous l'action de G (cf. (3), p. 354).

Remarquons tout d'abord que tous les éléments du groupe G sont des transformations conformes : elles conservent les angles. Si C_1 et C_2 sont deux arcs de courbe différentiables dans *H*, de même origine, alors l'angle entre $h(C_1)$ et $h(C_2)$ est le même que l'angle entre C_1 et C_2, pour toute transformation h de G.



Soit C un arc de courbe de classe C' inclus dans *H*, paramétré par :
$x = f(t)$, $y = g(t)$, t variant de a à b.

Considérons l'intégrale :

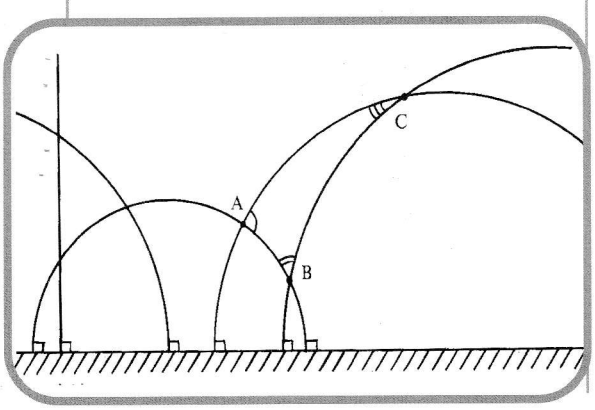
$$\int_a^b \frac{\sqrt{(f')^2(t) + (g')^2(t)}}{g(t)}\,dt$$

Sa valeur ne dépend pas du paramétrage choisi. On vérifie aisément qu'elle est invariante par toutes les transformations de G. Nous appellerons "longueur" (non euclidienne) de l'arc de courbe C, notée L(C), la valeur de cette intégrale.
On a L(C), = L (h(C)), h ε G.

Ayant défini une longueur, nous pouvons rechercher les géodésiques (les "droites") de *H* pour cette longueur : ce sont les courbes réalisant "le plus court chemin" d'un point à un autre. On peut montrer que parmi les arcs de courbes de *H* d'extrémités z_0 et z_1, celui dont la longueur L(C) est minimale est l'arc de cercle centré sur l'axe réel passant par z_0 et z_1, si z_0 et z_1 n'ont pas la même partie réelle, le segment de la demi-droite orthogonale à R passant par z_0 et z_1 sinon.

Nous appellerons "droite" (non-euclidienne), tout demi-cercle de *H* centré sur R, et toute demi-droite orthogonale à R. La "distance" de deux points z_0 et z_1 de *H* est donc la longueur L(C) de l'arc C d'extrémités z_0, z_0 tracé sur la "droite" passant par z_0 et z_1.

Il est bien connu que les applications de G (homographies) transforment toujours une "droite" ainsi définie en une autre.



Considérons enfin, Ω étant un domaine de H, l'intégrale double

$\Sigma(\Omega) = \iint_\Omega dx\, dy/y2$, Ω dans *H*

On peut montrer : $\Sigma(h(\Omega)) = \Sigma(\Omega)$, hεG

C'est donc naturellement la valeur de cette intégrale double que l'on appellera "surface" (non euclidienne) du domaine Ω.

Par la manière même dont nous venons de construire les notions d'angle, de droite, de distance et d'aire, le groupe G s'interprète évidemment comme le groupe des "isométries" de notre nouvelle géométrie. Celle-ci vérifie tous les axiomes de définition de la géométrie de Lobachevski.

Le demi-plan *H*, muni du groupe G, constitue ce qu'on appelle un *modèle* de la géométrie hyperbolique. Celui-ci, dit modèle de Poincaré, présente essentiellement deux avantages :
- On dispose de formules analytiques simples décrivant les isométries de la géométrie hyperbolique.
- On peut désormais, tout comme en géométrie euclidienne, construire des figures de la règle et au compas.

Remarque : il existe bien car d'autres modèles de la géométrie hyperbolique (cf, (2)).
On peut par exemple considérer le disque unité *U* de C, image de H par la transformation de Cayley :

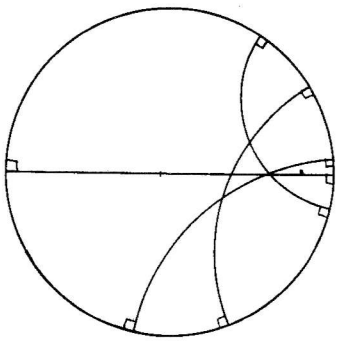
$z \dashrightarrow (z - i) / (z + i)$

Le groupe des automorphismes complexes de *U* est le suivant

$G_1 = \{z \dashrightarrow g(z) = e^{i\theta}(z + \alpha)/(1 + \underline{\alpha}\, z)$,
$\theta \varepsilon R, |\alpha| < 1\}$. (cf. (5), p. 187).

On peut appliquer à *U* et G, des raisonnements du type précédent pour constater que G, induit sur U la géométrie hyperbolique : les "droites" sont

ici les arcs de cercle orthogonaux au cercle unité et les diamètres du cercle unité.



Petite bibliographie sur les géométries non euclidiennes

[0] P.J. DAVIDS & R. HERSH L'Univers Mathématiques. Gauthier-Villars, 1985

[1] Ian STEWART - Les mathématiques Pour la Science - Belin, Paris, 1989

[2] M. BERGER - Géométrie - CEDIC, 1977.

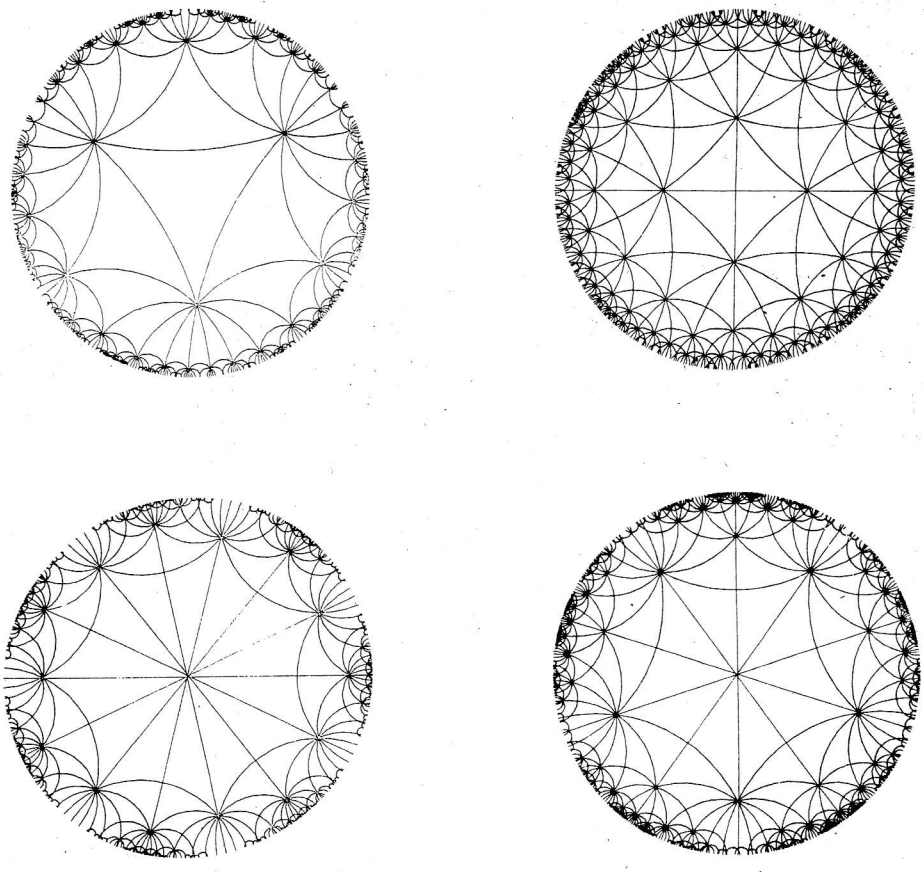
[3] R. DELTHEIL, D. CAIRE - Compléments de géométrie - J,-B. Baillère, Paris, 1950

[4] D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN - Geometry and the imagination - Chelsea, New York, 1952.

[5] J.-P. PETIT - le géométricon - (BD Belin).

[6] H. CARTAN - Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes - Hermann, Paris, 1961.

[7] Le Monde de M.C. ESCHER - Chéne, Paris, 1972.



Pavages hyperboliques de Christian Léger - Paris

Quel lien y a-t-il entre ce dessin et le Big Bang ?

Escher a réussi à transposer dans cette œuvre une des géométries des espaces courbes qui sous-tend la théorie de la relativité d'Einstein décrivant la naissance et l'évolution de l'Univers.

Centre Sciences
CCSTI
de la région Centre

2000