La géométrie des surfaces

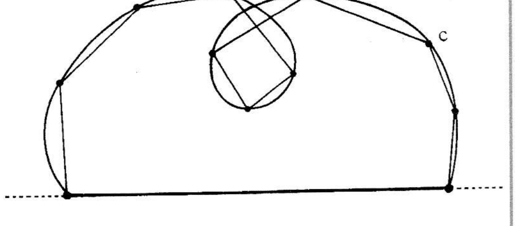
Marcel Berger - Paris

Grandeurs et insuffisances d'Euclide

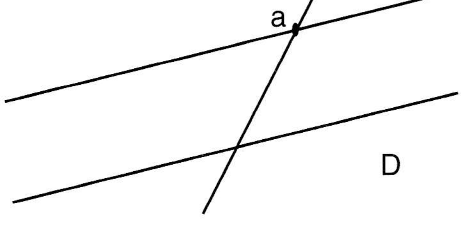
Étymologiquement géométrie veut dire “mesurer la.Terre”. Celle-ci fut longtemps considérée comme plate et décrite par la géométrie euclidienne classique, celle de R^2 ou plus généralement de R^n .

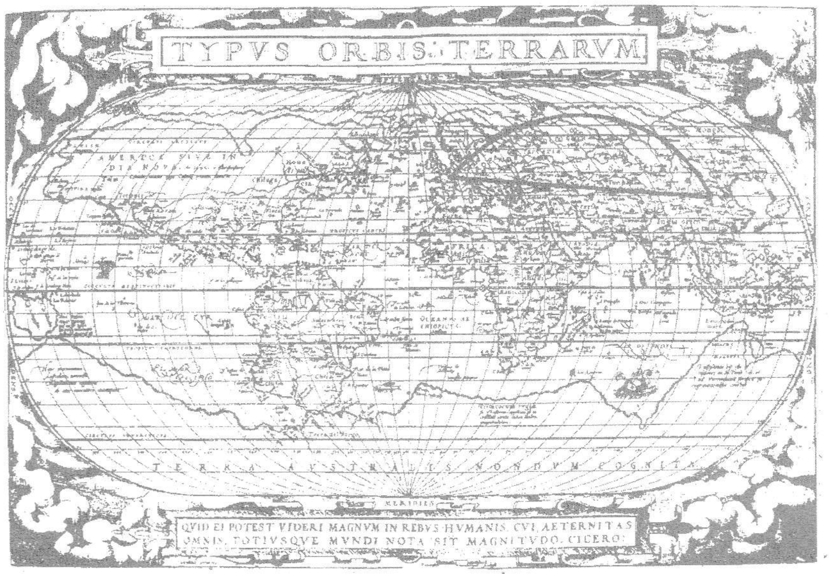
Le plan euclidien est, entre autres, un espace métrique. Entre deux points le plus court chemin est unique, c'est un segment porté par la droite qui passe par ces deux points, droite unique s'ils sont distincts.

“Plus court chemin” vent dire : la longueur d'une courbe est la borne supérieure des lignes polygonales qui y sont inscrites et seule une courbe portée de façon monotone par le segment ayant deux points pour extrémités a_1 et pour longueur leur distance. Notez que si une courbe c est C^1 par morceaux, sa longueur est alors égale à $\int \| c'(t) \| dt$.



Au tournant XVIII^e-XIX^e siècles cette géométrie euclidienne faisait doublement grogner. D'abord par son axiomatique : tout le monde acceptait bien les axiomes d'Euclide à l'exception de son postulat. A savoir : par un point a extérieur A une droite D passe une seule droite ne rencontrant pas D.

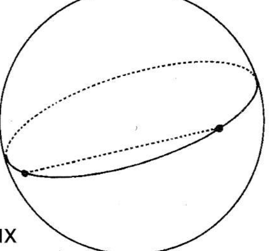




Theatrum orbis terratum, 1570, B.N. Paris

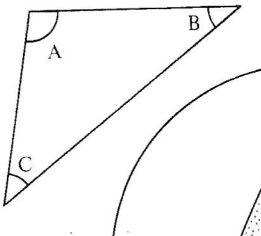
Sur cette figure on a représenté une carte de Mercator ordinaire et dessiné les ellipses des vecteurs de même norme ; on voit bien que les distances dans la carte ne sont pas celles d'Euclide.

Ensuite parce qu'il existait d'autres géométries, par exemple la géométrie sphérique. Avec une échelle convenable, elle représentait assez bien la Terre.La métrique à considérer sur la sphère n'est pas celle induite $\mathbf{R}^3$ par mais celle dite intrinsèque, à savoir que la distance entre deux points est la borne inférieure de la longueur des courbes de $\mathbf{R}^3$ qui ont ces points pour extrémités et sont tracées sur $\mathbf{S}^2$, la sphère unité: défense de creuser des tunnels, C'est trop cher.

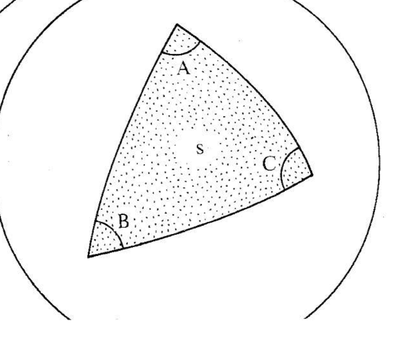


Ce plus court chemin est unique si les deux points ne sont pas aux antipodes, c'est l'arc de grand cercle qui les joint. Mentionnons enfin la formule d'A. Girard (1625) : la surface s d'un triangle de $\mathbf{S}^2$ dont les angles aux sommets sont A, B, C est égale à :

$$s = A + B + C - \Pi$$

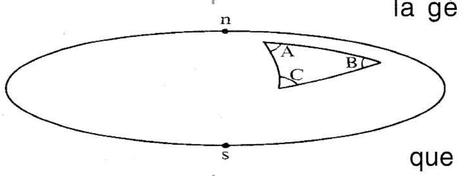


En particulier, A + B + C > π pour tout triangle. Il y avait là matière à réfléchir car il était connu à l'époque que le postulat d'Euclide était équivalent au fait que la somme des angles d'un triangle vaille exactement Π.



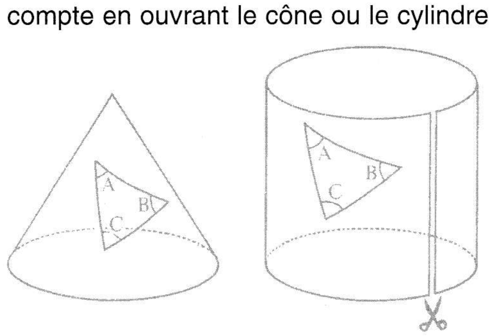
Les désirs de Gauss

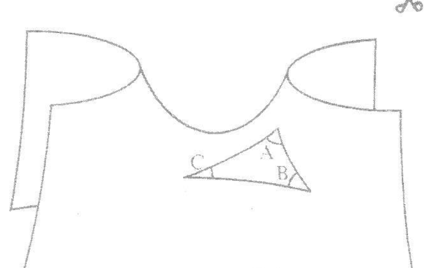
Gauss semble avoir été doublement motivé. Dès l'âge de 15 ans (en 1784), il étudiait en effet l'axiomatique de la géométrie. De 1812 à 1816, il eut à faire de la géodésie. Il la voulut plus précise que ses prédécesseurs ; c'est-à-dire sur l'ellipsoïde de révolution aplati qui représente assez bien notre Terre. D'où des problèmes de plus court chemin sur une telle surface, de "trigonométrie" : calculer les éléments d'un triangle lorsque l'on en connaît trois. Par exemple, deux côtés et l'angle compris. Et que vaut sur un ellipsoïde $A + B + C - \Pi$?



En bref, Gauss voulait comprendre la géométrie intrinsèque des surfaces, indépendamment de leur situation dans $\mathbf{R}^3$. En effet, cette métrique intrinsèque peut être la même pour des surfaces différentes .

Par exemple un cylindre, un cône et plus généralement les surfaces développables ont une géométrie intrinsèque qui est la même que celle de $\mathbf{R}^2$ (au moins localement, comme on peut s'en rendre compte en ouvrant le cône ou le cylindre





avec une paire de ciseaux et en l'étalant sur le plan $\mathbf{R}^2$. Par contre, essayez donc avec $\mathbf{S}^2$. La somme des angles d'un triangle simplement connexe y vaut toujours Π. Alors que pour un paraboloïde hyperbolique on a toujours au contraire $A + B + C < \Pi$.

Mieux, on peut construire les étapes d'une déformation continue de surfaces qui ont même géométrie intrinsèque (on dit qu'elles sont isométriques) alors qu'elles ne sont évidemment pas congrues, c'est-à-dire déduites par un déplacement. Mieux encore, toutes ces surfaces ont, aux points se correspondant par isométrie, leurs deux rayons de courbure principaux égaux, car il s'agit de surfaces minima.

Avant Gauss, on ne connaissait des surfaces que la notion de rayons de courbure principaux (Euler, Meusnier) et le fait que les plus courts chemins sont portés par des courbes appelées géodésiques, caractérisées par la condition que leur vecteur accélération est normal de la surface considérée (Bernouilli, Euler).

Ce que Gauss a trouvé (1827)

En bon géodésien, il paramétra ses surfaces par des cartes et s'occupa des changements de cartes. Il exprima alors la métrique intrinsèque (dans une carte donnée (u,v)) sous la forme

$$E(u,v)\, du^2 + 2F(u,v) du dv + G(u,v)\, dv^2$$

La donnée d'un tel ds^2 est équivalente de celle de la métrique intrinsèque.

Puis Gauss introduisit un invariant, la courbure K (dite courbure de Gauss ou courbure totale), qui est une fonction numérique sur la surface. Un des résultats fondamentaux de Gauss donne trois propriétés de K :

(i) $K = 1/R_1 \cdot 1/R_2$, le produit des inverses des

rayons de courbures principaux ;
(ii) pour un triangle T de la surface, on a toujours $A+B+C-\Pi = \int_T K(m)\, dm$ où la mesure dm est l'aire de la surface à savoir $\sqrt{EG - F^2}dudv$ dans une carte (u, v)
(iii) dans une carte (u, v) on a

$E_u = \partial E/\partial u$, $E_{vv} = \partial^2 E/\partial v^2$, etc ...

L'équivalence entre (i) et (iii) est le "theorema egregium". Il montre que :
$K = 1/R_1 \bullet 1/R_2$ ne dépend en fait pas du plongement de la surface, mais seulement de sa métrique intrinsèque.

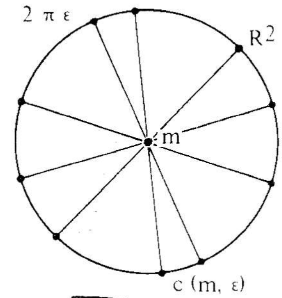
La formule de (iii) montre, elle, que K est calculable, sur la métrique intrinsèque, de façon géométrique. En outre, on y retrouve que, dans un plan euclidien ou une métrique isométrique, comme on a $K \equiv 0$, on a $A + B + C \equiv$ pour tout triangle.

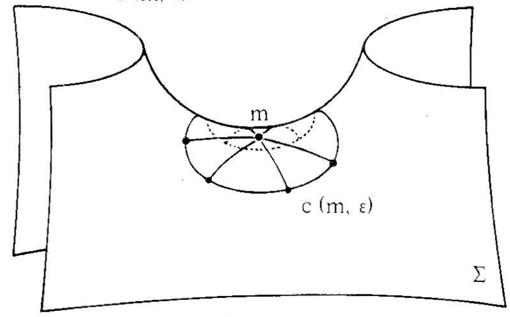
Et réciproquement, si $K \equiv 0$, on est isométrique à la géométrie euclidienne. On peut donc bien dire que K est l'invariant qui mesure le défaut "d'euclidienneté" de la surface. Aux autres bouts, $K \equiv 1$ pour la sphère, et l'on retrouve la formule d'A. Girard ; tandis que $K < 0$ sur un paraboloïde hyperbolique et donc $A + B + C < \Pi$.

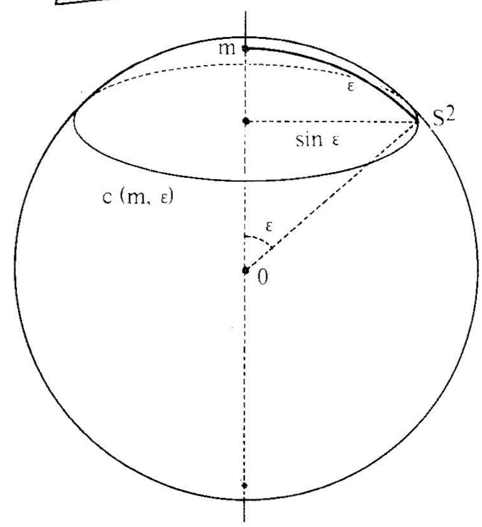
Une formulation plaisante de la découverte de K par la métrique intrinsèque est due à Diquet.
Dans le plan euclidien la longueur d'un cercle de rayon ε vaut toujours $2\Pi\varepsilon$.
Sur une surface Σ on peut parler du cercle $C(M, \varepsilon)$ de centre un point m de Σ et de rayon ε. Un habitant de Σ en effet, même ignorant tout du monde extérieur, connaît bien les plus courts chemins par antimasochisme. On a alors :

$$(C(M, \varepsilon)) = 2\Pi\varepsilon.(1-K(m)\varepsilon^2/6+ o(\varepsilon^2)).$$

Par exemple, cette longueur est supérieure à $2\Pi\varepsilon$, le paraboloïde hyperbolique, tandis qu'elle est plus petite sur S^2. En fait, on la connaît : c'est $2\Pi \sin\varepsilon$ et comme $\sin\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^3/6 + o(\varepsilon^3)$, on retrouve bien que $K \equiv 1$ pour la sphère.







Les fondements de la géométrie selon Riemann (1854)

Gauss nous laissait sur notre faim pour au moins deux raisons.

D'une part, on ne peut se contenter de géométrie plane. De rnême que la géométrie intrinsèque des surfaces est une généralisation de celle de R^2, il faut certainement généraliser la géométrie de R^3.

D'autre part, même en géométrie plane une grogne légère subsistait: on avait découvert la géométrie hyperbolique plane mais elle était mal fondée. Et pour cause, car elle ne peut jamais être réalisée complètement par une surface de R^3. Le but de Riemann, c'était de savoir ce qu'est une géométrie.

Pour Riemann une géométrie plane c'est un ouvert U de R^2 et sur U un $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ où E, F, G sont des fonctions sur U et la forme quadratique associée doit être définie positive en chaque point (u, v) de U.

La métrique est définie comme la borne inférieure de la longueur des courbes (joignant les deux points considérés), la longueur elle-même des courbes étant par définition $\int \| c'(t) \| dt$.

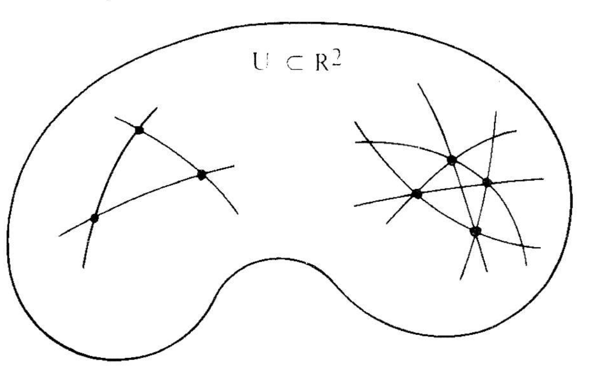
Moralité : *une géométrie plane, c'est un continuum deux dimensions muni en chaque point dune structure infinitésimalement euclidienne.* C'est un retournement complet de mentalité.

Maintenant l'extension en dimension quelconque est automatique ; sur un ouvert U de R^n, n entier quelconque, on définira un ds^2 par :

$$ds^2 = \Sigma g_u(x_1,\ldots,x_n)dx_i dx_j$$

où la forme quadratique que définissent les fonctions g_i doit être partout définie positive. En fait, c'est une structure euclidienne sur l'espace tangent à U au point considéré.

Pour les variétés de Riemann le problème des plus courts chemins est résolu, au moins localement. Ces plus courts chemins sont portés par les géodésiques et par deux points suffisamment voisins, il en passe une et une seule qui réalise le plus court chemin, ainsi qu'il en était en géométrie euclidienne.



Il revenait à Riemann de trouver l'invariant qui généralise en dimension quelconque la courbure K découverte par Gauss pour le cas n = 2. La réponse n'est pas un être simple. Riemann découvrit cet animal par un développement limité habile du ds^2.

On peut toujours annuler les termes du premier ordre : la morale est qu'une variété de Riemann n'a pas de dérivées du premier ordre qui soient significatives. Mais que, par contre, elle en a du second ordre, qui constituent le tenseur de courbure.

Cet animal est, en chaque point, une forme quadrilinéraire R (••,••,••,••) qui est antisymétrique en les deux premiers indices, antisymétrique en les deux derniers, symétrique en ces deux paires et satisfait aussi l'identité de Jacobi pour les trois premiers indices.
Même en dimension 4 ce tenseur de courbure n'est pas complètement compris.

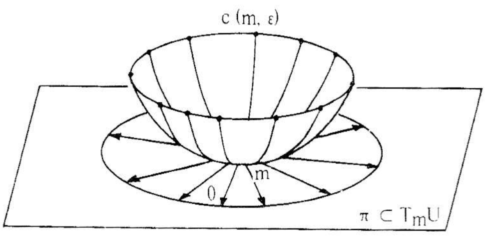
Riemann avait procédé ainsi. Il prenait pour coordonnées des coordonnées orthonormées telles que toutes les géodésiques issues de l'origine soient des droites pour ces coordonnées. Alors, par un calcul utilisant l'équation des géodésiques, il montrait que le développement de Taylor de la métrique était nécessairement de la forme.

$$ds^2 = dx_1^2 + \ldots dx_n^2 + \sum_{i,j,k,h} (?)(x_i\,dx_j - x_j\,dx_i)(x_k\,dx_h - x_h dx_k) + \ldots o(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

Remarquons ici que R n'a guère de sens quand n = l : il n'y a pas de géométrie riemannienne en dimension 1 car, comme on l'a remarqué plus haut, toutes ces courbes sont localement isométriques entre elles.

Et si n = 2, comme R^2 est de dimension 1, on voit que la forme quadrilinéaire R s'identifie à un scalaire (la courbure de Gauss).

Les identités que satisfait R montrent que K détermine R par polarisation.



De même qu'en dimension 2, pour tout n la courbure (R ou K) mesure bien le *défaut d'euclidienneté* de (U, ds^2).
Car K $\equiv$ 0 entraîne que la variété de Riemann considérée est localement isométrique à l'espace euclidien R^n. Plus généralement les continuums de Riemann où K est une constante k sont nécessairement, localement du moins, les sphères si k > 0 et les espaces hyperboliques si k < 0.

Globalement un résultat de base est que, pour tout k réel, il existe (A une isométrie près) une et une seule variée riemannienne simplement connexe et à courbure sectionnelle constant égale à k, que l'on peut dénoter par $S^n(k)$. C'est la sphère de rayon $1/\sqrt{k}$ si k > 0, l'espace euclidien si k =0 et l'espace hyperbolique donné par la formule de Riemann citée plus haut. Il est capital, comme on le verra plus loin,de disposer ainsi d'une famille indexée exactement par les réels, comme espaces de comparaison.

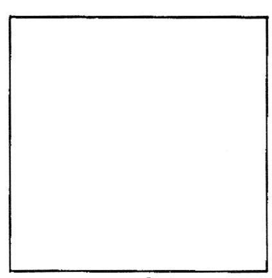
Ce qu'Il fallait faire après Riemann

Riemann ne faisait que du *local.* Pour faire du global, il faut d'abord bien définir un continuum à n dimensions. C'est la notion de variété différentielle (de dimension n), terminée avec Whitney après H. Weyl et Elie Cartan entre autres.

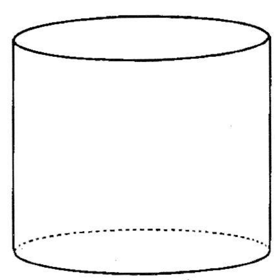
Sur une telle variété M rappelons que l'on peut parler de fonctions numériques C^∞, de vecteurs et d'espace tangents, de différentielle (dérivée première) d'une fonction, de tenseurs et en particulier de formes différentielles extérieures.

Par contre, il n'existe pas de dérivées seconde, troisième ... d'une fonction ; en effet, contrairement all cas de la dérivée première, les dérivées ultérieures dépendent de la carte choisie. De même, on ne peut pas dériver des champs de vecteurs ni des tenseurs.

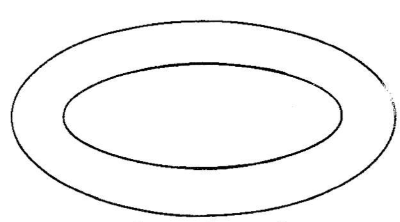
La notion de variété abstraite permet de bien distinguer entre une variété et ses quotients. Par exemple entre la sphère S^n et son quotient par l'antipodie - l'espace projectif réel $R.P^n$. Entre R^n et les cylindres S^1x...xS^1xR^{n-k} qui aboutissent au tore $T^n = R^n/Z^n$.



$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R} \times S^1$

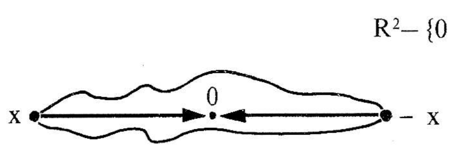


$S^1 \times S^1 = T^2$

Une *variété riemannienne* sera maintenant la donnée d'une variété différentielle M munie, sur chacun de ses espaces tangents T_mM, d'une structure euclidienne g_m. (i.e. une forme quadratique définie positive et bien sûr, la correspondance m -> g_m devra être C^∞).On peut noter (M, g) une telle variété riemannienne.

La première question globale concerne la métrique, toujours définie comme la borne inférieure de la longueur des courbes joignant deux points.
A savoir : étant donné deux points m, n inclus dans M, *existe-t-il toujours un plus court chemin de rn à n* ?
On sait que ces plus courts chemins sont portés par les géodésiques, des courbes de M dont il existe une et une seule ayant une origine et un vecteur vitesse initiale donnés.
Mais en général, il n'y a aucune raison que ces géodésiques, régies par une équation différentielle du second ordre mais non linéaire, soient définies jusqu'à l'infini.

On va voir que ce fait est lié à ce que la réponse à la question ci-dessus est en général *non* : dans R^2- 0 (l'origine ôtée) deux points comme x et -x ne sont jamais joints par un plus court chemin. Plus généralement, ceci arrivera dès que l'on troue une "bonne" variété.



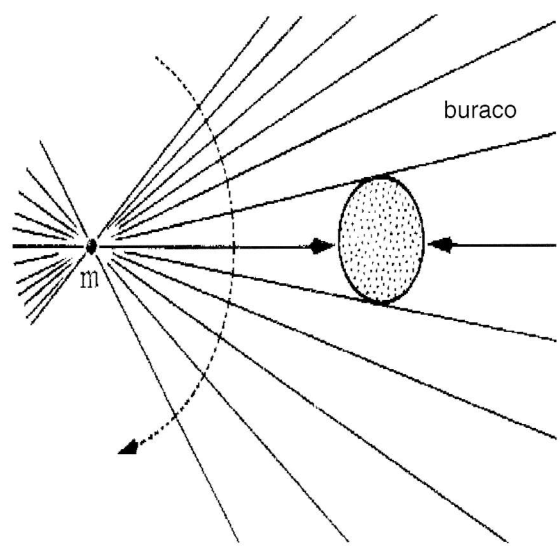
En fait, la question dépend non seulement de la variété mais de la métrique riemannienne qu'elle porte. Par exemple, le cylindre R x $S^1 \subset R^3$ donne une réponse positive à la question, tandis que la même variété en donne une négative.

La réponse finale est donnée par le théorème de H. Hopf-Rinow (1931) :
- il y a équivalence pour une (M, g) entre:

(i) les géodésiques issues d'un point $m \in$ M sont définies jusqu'à l'infini ;
(ii) toutes les géodésiques sont définies jusqu'à l'infini ;
(iii) la métrique est complète.

En outre, l'une quelconque de ces conditions entraîne que : deux points quelconques de M sont joints par un plus court chemin. Mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montre un disque ouvert de R^2. Par contre dès que m est une variété compacte, elle sera toujours complète. Dans toute la suite, on ne considérera que des variétés riemanniennes complètes.

Le fait que (i) entraîne (iii) est la mise en forme de L'idée intuitive que le balayage de M par les géodésiques infinies issues d'une point fixe m empêche l'existence de trous :



Quant à la question de *l'unicité* du plus court chemin, alias la théorie du cut-locus, elle est extrêmement difficile et n'est actuellement résolue que dans des cas extrêmement particuliers, comme les sphères canoniques. Sur un ellipsoïde de R^3, le résultat est connu mais difficile à démontrer.