Le théorème des 4 couleurs

Darche & C° - Orléans

La preuve et l'ordinateur

En 1852, alors qu'il coloriait une carte géographique, le jeune mathématicien anglais Francis Guthrie réalisa que quatre couleurs suffisaient pour colorier une carte tout en satisfaisant au critère des frontières : deux pays ayant une frontière commune doivent être de couleurs différentes. Il conjectura que ceci est vrai pour toute carte réelle ou imaginaire comme celles présentées ici.

Il fallut plus d'un siècle avant que la "théorème des 4 couleurs" soit prouvé.

La démonstration faite par Appel et Haken en 1976 a déclenché une controverse inédite à cette époque : la démonstration a nécessité pour la première fois de lourds calculs d'ordinateur.

Le nombre de cartes à vérifier était, même après réduction par la théorie des graphes, si important que le travail de coloriage ne pouvait être fait "à la main".

Pour prouver que le "théorème" était vrai, il a fallu, pour la première fois, démontrer aussi que le programme de calcul informatique utilisé était lui aussi correct et que l'ordinateur utilisé travaillait correctement (sans erreur).

Comme nous l'avons utilisé pour la carte d'Europe, vous pouvez illustrer le théorème des 4 couleurs sur la carte de France avec ses régions ou ses départements, la carte d'Afrique ou toute autre carte.
Vous pouvez aussi rechercher des stratégies permettant de bien colorier une telle carte.

Essayez de colorier cette carte en respectant les règles de coloriage.

Ce célèbre problème montre ce qu'est réellement la recherche mathématique.

Ce n'est pas seulement un outil de calcul ou de gestion des nombres mais aussi et surtout l'objet de mise en place de systèmes de preuves toujours plus complexes.

Le problème et son histoire

Combien faut-il de couleurs pour colorier une carte de géographie de façon à ce que deux pays voisins ne soient jamais de la même couleur ?

• Deux pays sont voisins lorsqu'ils ont une frontière commune (une ligne). On écarte ainsi la disposition en parts de gâteaux où il faut autant de couleurs que de pays.
• Chaque pays est en un seul morceau. On écarte donc les enclaves. Mais on peut parfois s'attaquer à ce cas (exemple de la Russie aujourd'hui).

Ce texte est une réécriture des textes du Plot n° 44 auquel avaient contribué Jean-François Canet (Avignon) et Jean Lefort (Wintzenheim).

Réabonnez-vous au PLOT 2 o o o

Le problème est connu, semble-t-il, depuis fort longtemps. Il a été formulé en 1852 par Francis Guthrie dans une lettre à son frère Frédéric qui était élève du mathématicien De Morgan. Le problème est présenté à la société mathématique .de Londres par Cayley en 1878.

Un avocat, Alfred Bray Kempe, membre de l'honorable société, propose une solution moins d'un an plus tard. En 1890, Heawood établit l'inexactitude de la solution de Kempe. Il généralise le problème à des cartes dessinées sur des surfaces plus compliquées (sur des tores par exemple) et démontre que pour colorier une carte dessinée sur une surface autre que la sphère ou le plan il faut au plus H (c) couleurs avec:

$$H(c) = E[(7 + \sqrt{49 - 24C}) / 2$$

où E désigne la fonction partie entière et C la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface (C = 0 pour un tore à un trou ; C = 2 pour le plan ou la sphère...). Il pensait que H(c) était le nombre exact de couleurs nécessaires.

Cette conjecture est vraie pour le tore à un trou, fausse pour la bouteille de Klein (Problème résolu en 1968 par Ringel et Youngs).

Depuis Kempe et Heawood, nombreux furent les mathématiciens amateurs ou professionnels qui s'intéressèrent au théorème et plusieurs résultats furent obtenus (on démontra successivement que le théorème était vrai pour des cartes comptant moins de 22 pays, puis 36,...).

Enfin en 1976 Kenneth Appel et Wolfgang Haken démontrent à l'aide d'ordinateurs le théorème des quatre couleurs.

La démonstration

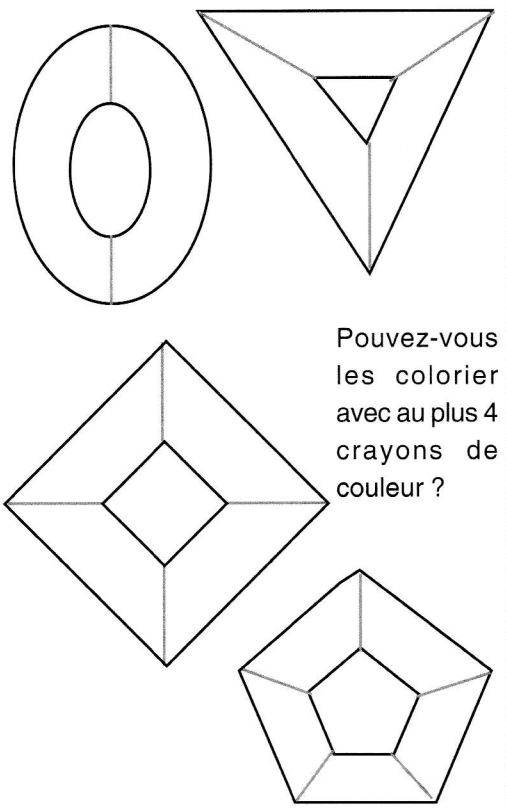
Kempe a essayé de démontrer le théorème par l'absurde. Il définit une carte normale comme étant une carte dans laquelle:

- aucun pays n'entoure entièrement d'autres pays,
- en aucun point, plus de trois pays se rencontrent.

Il établit que, s'il existe une carte pentachromatique (c'est-à-dire nécessitant cinq couleurs pour être coloriée), alors il existe une carte normale pentachromatique. Toutes les recherches seront alors faites sur des cartes normales.

Kempe établit alors que sur une carte normale il existe au moins un pays ayant moins de six voisins.

Ce qui revient à dire qu'une des quatre configurations : pays avec deux voisins, pays avec trois voisins, pays avec quatre voisins, pays avec cinq voisins est inévitable.



Pouvez-vous les colorier avec au plus 4 crayons de couleur ?

Pour obtenir une contradiction, Kempe essaya de démontrer qu'une carte pentachromatique minimale (c'est-à-dire ayant un nombre minimum de pays) ne pouvait contenir aucune des quatre configurations. Sa démonstration était correcte pour les trois premières configurations mais inexacte pour la quatrième.

Appel et Hankel reprirent l'idée de la démonstration, mais en étudiant un système d'environ 1500 configurations inévitables. Le travail nécessita environ 1200 heures de calcul sur trois puissants ordinateurs de l'université de l'Illinois. En fait dans l'étude, chaque pays est remplacé par un point (sa capitale). Deux pays voisins ont leur capitale reliée par un chemin. La carte devient alors un graphe. Colorier la carte revient à colorier chaque sommet du graphe. Une carte normale correspond à un graphe dont chaque face est un triangle.

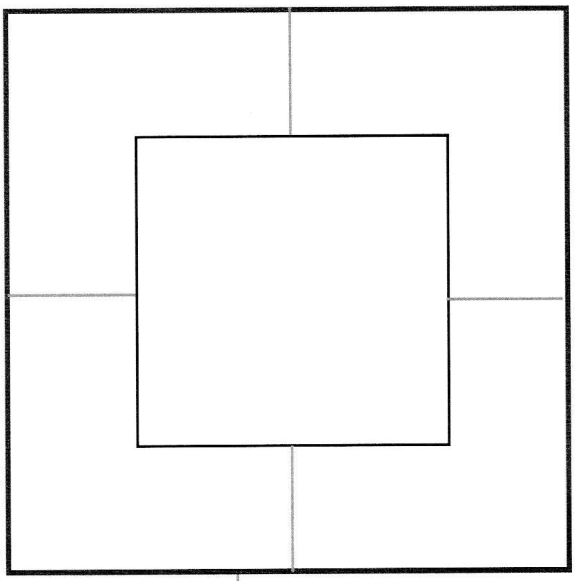
Un bon théorème ?

On s'interroge souvent sur la valeur "bonne" ou "mauvaise" des questions que se posent les mathématiciens.

Celle des 4 couleurs est souvent cité comme exemple de "mauvaise question". On attache à "bonne question, bon problème", une question posée, pas nécessairement encore résolue, mais qui a déjà fait la preuve de sa capacité a créer de nouveaux concepts, de nouveaux résultats mathématiques.

À cet égard, le "dernier théorème de Fermat" est, était déjà un bon problème bien avant d'être résolu par David Willes. La recherche de sa preuve a en effet, dès la naissance de la conjecture, fourni de nombreux résultats, en particulier les idéaux.

De nombreux mathématiciens donnent le théorème des 4 couleurs comme exemple de mauvais problème car, en dehors de l'aspect "utilisation de l'ordinateur", il n'a pas apporté d'autres fruits à la connaissance mathématique ou scientifique.



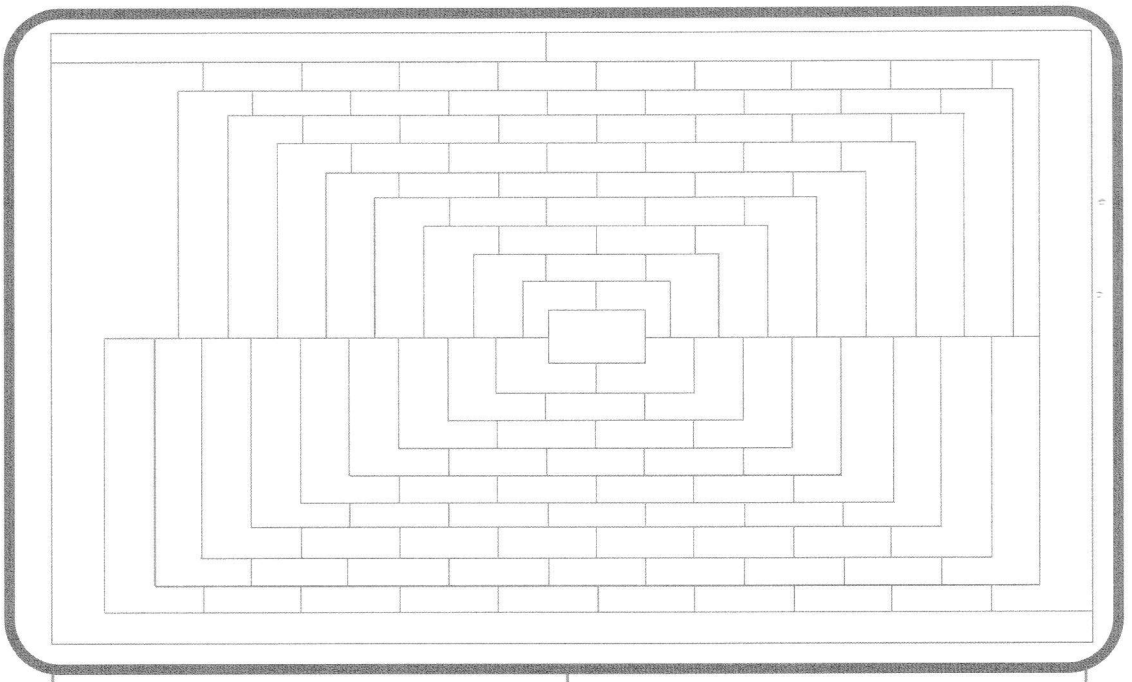
Combien de couleurs au minimum ?

Certains diront que ce n'est déjà pas si mal. D'autres rajouteront que l'aspect "algorithme de coloriage" (voir plus loin) qui reste malgré tout en suspend peut encore donner de beaux jours au théorème.

Davis et Hersh (cf bibliographie) ont exprimé l'opinion de beaucoup de mathématiciens au moment de l'annonce de la démonstration:

" Ma première réaction fut : Formidable ! Mais comment ont-ils fait ? J'attendais quelque intuition géniale, une démonstration dont l'idée centrale serait d'une élégance capable d'ensoleiller ma journée. Lorsque je connus la réponse, le fait qu'ils avaient simplement découpé la difficulté en des milliers de morceaux, pour les faire tous examiner par l'ordinateur l'un après l'autre, je fus totalement déconcerté, et ma réaction fut : si c'est cela, alors ce n'était pas vraiment un bon problème."

Davis et Hersh formulent une autre remarque : *"Pour le philosophe il y a une énorme différence entre une démonstration qui repose sur la fiabilité d'une machine, et une qui ne dépend que du*



Encore un bel exercice de coloriage !

raisonnement humain. Pour le mathématicien, la faillibilité de la raison est un fait tellement banal qu'il est heureux de trouver dans l'ordinateur une sécurité de calcul qu'il ne peut égaler."

L'algorithme des ... 6 couleurs !!!

Un jeu de coloriage !

Le Jeu : Choisissez une carte représentant des pays. Deux joueurs jouent, plaçant à tour de rôle une couleur de leur choix sur un pays non encore colorié. Une même couleur ne peut être attribuée à deux pays ayant une frontière commune.

Gagne celui qui, à la fin du jeu, a utilisé le moins de couleurs. Le jeu peut se jouer à un, deux ou trois joueurs. Jean Lefort (Wintzenheim) décrit ci-après l'algorithme qui permet au joueur solitaire ne n'utiliser que six couleurs.

Théorème: chaque pays a, en moyenne, moins de six pays voisins.

Le nombre V_i de voisins d'un pays est égal au nombre d'arêtes qui bordent ce pays. Comme chaque arête est frontière de deux pays, on a :
$\Sigma V_i = 2a$, a désignant le nombre total d'arêtes d'où la moyenne $m = 2a / f$ où f désigne le nombre de pays.

La relation d'Euler-Poincaré liant sommets (s), arêtes (a) et faces (f) d'un graphe planaire étant la suivante :

$$s + f = a + 2$$

soit encore $s / a + f / a = 1 + 2 / a$
On obtient pour la moyenne des pays frontaliers : (1) $s/a + 2/m = 1 + 2/a$.
Mais en chaque sommet arrivent au moins 3 arêtes et chaque arête joint exactement 2 sommets donc: $3 s \leq 2 a$
en reportant dans (1), la relation devient:

$$2/3 + 2/m \geq 1 + 2/a$$

d'où, tous calculs faits : $m \leq 6-36/(a+6) < 6$

Dans une carte plane, il y a nécessairement au moins un pays qui a strictement moins de 6 voisins.

Soit P_1 l'un de ces pays, annexons-le à l'un de ses voisins.

Sur la nouvelle carte, à nouveau, un pays a moins de 6 voisins. Notons-le P_2 et annexons-le à l'un de ses voisins, et répétons le processus...

On arrive ainsi à une carte de 5 pays qu'il est facile de colorier avec 5 couleurs.

Puis on rend leur "indépendance" aux pays annexés, dans l'ordre inverse de leur annexion. On utilise la sixième couleur pour le pays P_n.

Pour le pays P_{n-1}, comme il a au plus 5 voisins, il y a certainement une

couleur libre pour lui parmi les six précédentes... et l'on peut ainsi colorier la carte avec au plus six couleurs différentes !

L'algorithme est polynomial.

Au pire, on parcourt les p pays, puis p-1, puis p-2,...

On a donc un algorithme en p^2, p étant le nombre total de pays.

Question subsidiaire :

cela permet-il de trouver une stratégie gagnante avec 6 couleurs quand on joue à deux ?

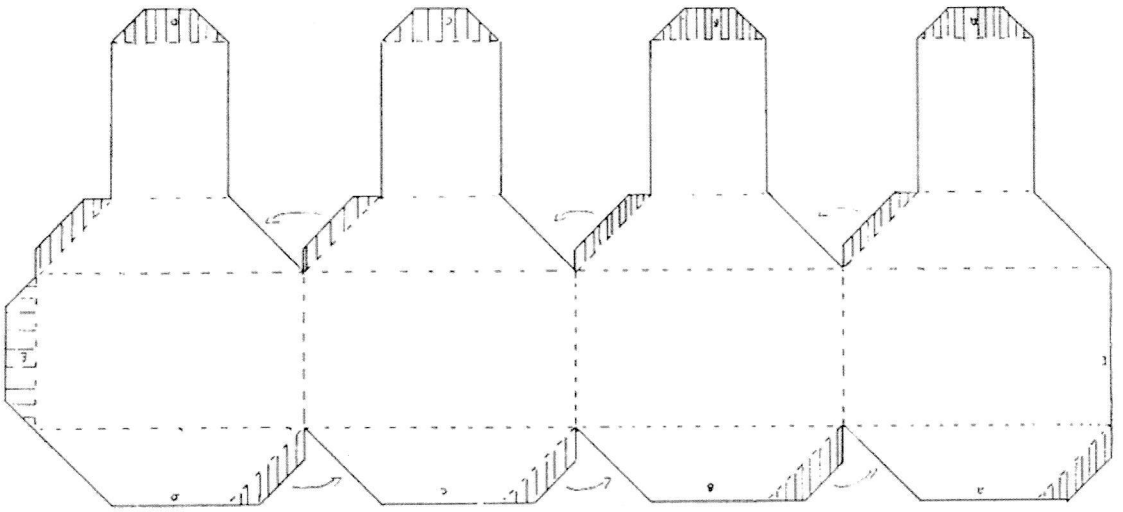
et 3, et 4, et 5 et ... 7 couleurs !!!

Faites une photocopie agrandie de ce patron de tore...polyédrique. Découpez-le et collez les languettes comme indiqué.

Dessinez les frontières comme l'indique le dessin n° 2.

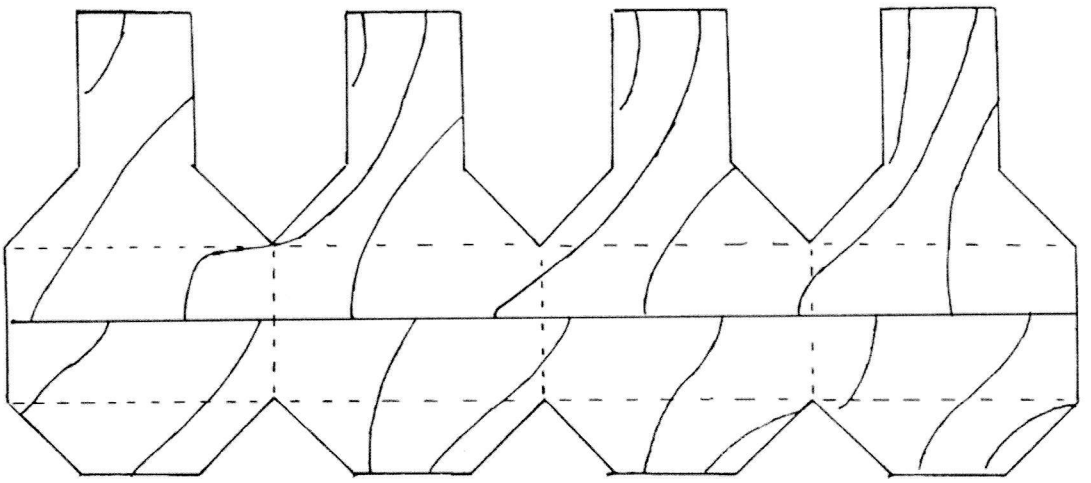
Combien délimitent-elles de pays ? Combien faut-il de couleurs au minimum pour les colorier suivant la régle bien connue ?

dessin n°1

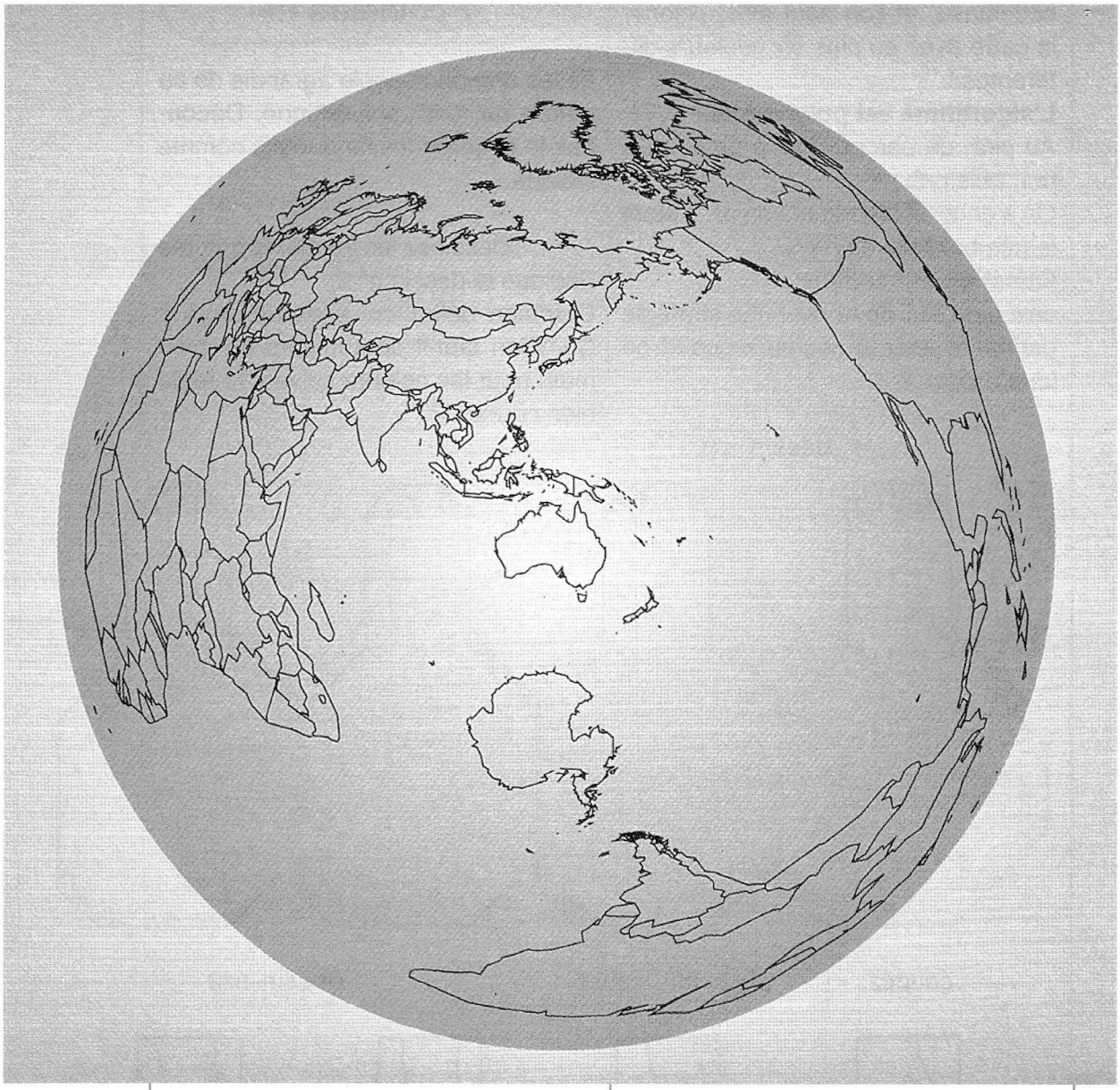


—— coupez, - - - - pliez, IIIIII collez

dessin n°2



Le disque plat



Et la Terre redevient le disque plat des Anciens, bordé par un continent, l'Antarctique.

Depuis le pôle Nord, apparaît le face à face entre l'Amérique et la Russie, éclairant sous un jour nouveau l'opposition entre l'Est et l'Ouest.

Illustration :
IGN, Institut Géographique National, Saint-Mandé, 1999

Projection dite équidistante entre deux points, de type planaire modifié, prise entre les deux points de coordonnées:
• 0° de longitude, 90° de latitude
et
• 180° de longitude, 85° de latitude.
Cette projection donne une représentation correcte des distances de l'un des deux points de la carte.