

# PLOT

91

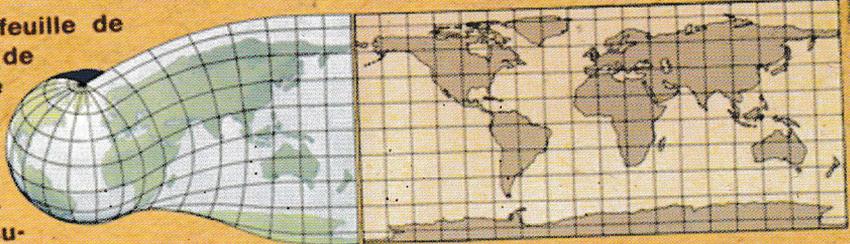
année 2000, numéro deux

Les géométries  
des surfaces

# Pourquoi toutes les cartes sont-elles fausses ?

Essayez d'envelopper une orange avec une feuille de papier. Le papier fait des plis ! Il en est de même de la Terre. On ne peut pas reproduire sur une feuille ce qui est dessiné sur un globe. Il y a des distorsions.

Les cartographes ont toujours fait un choix pour représenter la Terre : conserver les angles pour s'orienter, les distances locales pour mesurer ou les surfaces pour représenter une information.



50 F

été 2000

Année mondiale des mathématiques  
mathématiques dans la nature



74 71 - Vendu en France et à l'étranger.

**Directrice de publication**

Marie-Laure DANCHE-GIORGI

**Responsable de la rédaction**

Michel DANCHE

**Secrétariat**

Madeleine SCHLIENGER

**Comité de rédaction**

Jacques Borowczyk, Daniel Bouté,

Michel Clinard, Gérard Chauvat,

Roger Crépin, Luce Dossat,

Georges Le Nezet, Serge Parpay,

Michel Soufflet, Raymond Torrent.

**Abonnements**

PLOT-APMEP, IREM- UNIVERSITÉ,

BP 6759 45067 Orléans-Cedex 2

**Prix d'abonnement pour 2000**

160 FF pour 4 numéros

Etranger : supplt avion : 50 FF

**Photocomposition et maquette**

I.C.E.- Limoges

**Impression:** Fabrègue - St-Yrieix**Editeur**

APMEP d'Orléans - Tours et

ADECUM (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).

**Publié avec le concours**

du Ministère des Affaires Étrangères.

## Sommaire du n° 91

<b>1 - Deux p'tits bouts d'allumath !!!</b>	
Les allumés des maths	<b>02</b>
<b>2 - Les droites de notre Terre</b>	
Pascal Monsellier, Rennes	<b>05</b>
<b>3 - Les cartes de la Terre</b>	
Jean Lefort, Wintzensheim	<b>11</b>
<b>4 - Le théorème des 4 couleurs</b>	
Michel Darche, Orléans	<b>21</b>
<b>5 - La géométrie des surfaces</b>	
Marcel Berger, Paris	<b>27</b>
<b>5 - La géométrie hyperbolique</b>	
Bernard Ycart, Paris	<b>33</b>
<b>7 - Commandes - Abonnements</b>	<b>39</b>

## Éditorial 91

L'année mondiale des mathématiques poursuit son chemin. Les manifestations se multiplient en France et dans tous les pays.

Les éditeurs profitent de cet effet projecteur pour sortir livres et numéros spéciaux souvent de bonne qualité. On peut citer Belin et Pour la Science qui a fait un gros effort avec en particulier son numéro spécial sur Bourbaki. La Recherche avec ses numéros spéciaux sur les nombres (très bon) et sur les jeux (un peu plus anecdotique). Certains ne sont pas toujours du meilleur goût et ne cherchent pas toujours à montrer les mathématiques sous un jour attrayant mais vont plutôt dans le sens du poil des lecteurs potentiels.

Méfiez-vous donc avant d'acheter !

Ce numéro porte sur trois des 12 affiches de la série "mathématiques dans la nature". Il nous permet de compléter un numéro du Plot paru lors de la coupe du monde de football (n°82 - 1998) et qui portait sur la sphère. Nous parlerons ici de la sphère de la nature : la Terre, de sa cartographie et plus généralement des géométries des surfaces.

Prochain numéro : tout est illusion !!!

**Réabonnez-  
vous  
pour l'année  
2000,  
année  
mondiale  
des  
mathéma-  
tiques !**

# Des additions sans retenues !!!

Deux nouveaux bouts d'allumaths

par les allumés des maths !!!

Le groupe des allumaths (les "allumés" des mathématiques) réunit quelques professeurs et inspecteurs de mathématiques de l'Académie de Poitiers pour la plupart.

Ils échangent problèmes et solutions sans autre restriction que leur intérêt. Voici deux nouveaux sujets, l'un géométrique, l'autre numé-

## Plot 91 - Situation 1

## Plot 91 - Situation 2

### Un carré de "bons nombres"

Si un carré peut être partagé en  $n$  carrés, alors  $n$  est appelé un "bon nombre".

Il est clair que 1, 4, 9 ... sont des bons nombres.

Mais 7 est aussi un bon nombre, comme le montre la figure ci-dessous.

Trouvez tous les "bons nombres" !

Comment généraliser ?

### De différence en différence

On considère quatre nombres positifs :

$a$        $b$        $c$        $d$

puis leur différence de valeur absolue :

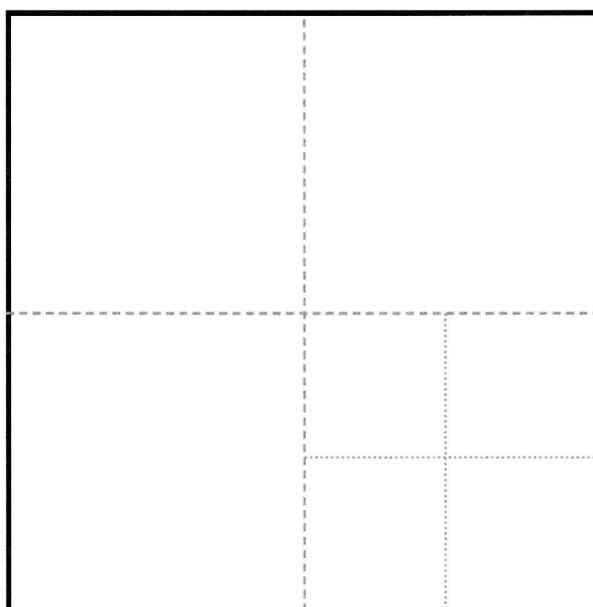
$|a - b|$   $|b - c|$   $|c - d|$   $|d - a|$

et on continue ...

A vous d'imaginer la suite ...

2

Envoyez vos commentaires  
à Marc Blanchard  
39, rue Barbès  
17300 Rochefort-sur-Mer



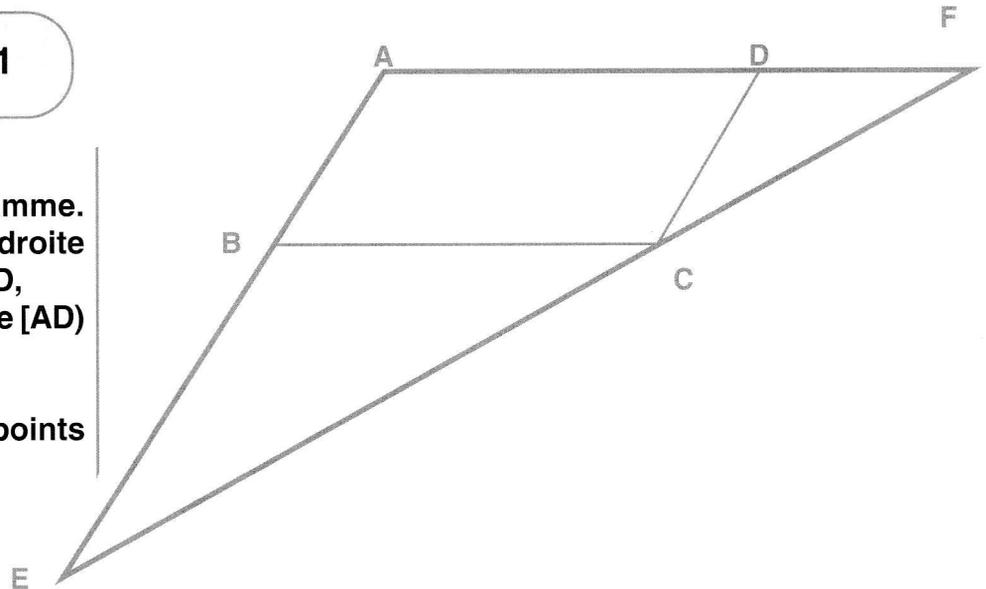
# Trois points alignés !

À propos des situations parues dans le PLOT n° 90

## Plot 90 - Situation 1

ABCD est un parallélogramme. Soit E le point de la demi-droite [AB) tel que :  $AE = AB + AD$ , et F le point de la demi-droite [AD) tel que  $AF = AB + AD$ .

Démontrez que les points C, E et F sont alignés.



### Donnons quelques résultats :

Posons  $AB = a$  et  $AD = b$ .

- 1-
  - C est le barycentre de (E, a) et (F, b).
  - Aire (AEF) / Aire (ABCD) =  $(a/2b) + (b/2a) + 1$

2- Si le plan est euclidien, alors (EF) est parallèle aux bissectrices des angles ABC et ADC.

3- Soit E' (resp. F') le symétrique de E (resp. F) par rapport à B (resp. D).

- C, E', F' sont alignés.
- (E'F') est parallèle aux bissectrices des angles BAD et BCA, donc perpendiculaires à (EF).

4- Construisons les points E'' et F'' tels que :  $AE'' = -BE$  et  $CF'' = DF$ . Cela revient à intervertir les rôles joués par A et C d'une part, et par B et D d'autre part.

On en déduit :

- D, E'', F'' sont alignés
- (E''F'') est parallèle aux bissec-

trices des angles BAD et BCA, donc (E'F') est perpendiculaire à (EF).  
• Les triangles isocèles AEF et AE''F'' ont même aire.

5- Soit C' le symétrique de C par rapport au milieu I de [EF].

On note B' l'intersection de (AB) et D' l'intersection de (AD) tel que AB'C'D' est un parallélogramme.

- Aire (ABCD) = Aire (AB'C'D'),
- (BD), (B'D'), (EF) sont parallèles,
- (ED), (FB') d'une part, (ED'), (FB) d'autre part sont concourantes sur (AI).

6- Et, avec Raymond Millon de Montigny le Bretonneux (fidèle lecteur dont nous publierons dans le prochain numéro quelques remarques sur l'existence supposée du nombre d'or dans certaines pyramides) : l'enveloppe de (BD) lorsque C se déplace sur (EF), est une parallèle de sommet le milieu de [OA] (où O est le milieu de [EF], d'arc la médiatrice de [EF], de foyer le centre du cercle circonscrit au triangle AEF passant par E et F où elle est tangente à (AE) et à (AF)).

2 0 0 0

# 1er janvier 2000 ???

À propos de la situation 2 parue dans le **PLOT** n° 90

## Plot 90 - Situation 2

Et si je ne savais pas calculer ?

$$17 + 5 = 12$$

$$18 + 8 = 16$$

$$55 + 66 = 11$$

...

Et si on décidait, en classe de CE<sub>1</sub>, d'oublier systématiquement les retenues lorsqu'on ajoute deux nombres entiers naturels ?!!

$$\begin{array}{r} 1974 \\ \times 26 \\ \hline 6424 \\ 2848 \\ \hline 24804 \end{array}$$

Par exemple :  
1974 x 26 = 24804 car :

- **IN** muni de "l'addition-sans-retenu" (notée **+**) a une structure de groupe isomorphe au groupe des suites de termes de **Z / 10Z** dont seul un nombre fini n'est pas nul.

Par exemple, l'opposé de 1075 est 9035.

- $n \in \mathbf{IN}^*$  étant fixé, si l'on note  $\mathbf{IN}_n$ , l'ensemble des naturels s'écrivant avec  $n$  chiffres au plus, alors c'est un sous-groupe isomorphe à  $(\mathbf{Z} / 10\mathbf{Z})^n$  muni de l'addition.

- Si l'on note **2.IN** l'ensemble des naturels qui ne s'écrivent qu'avec des chiffres pairs (0, 2, 4, 6, ou 8), alors c'est encore un sous-groupe.

Il en est de même avec **5.IN** l'ensemble des naturels qui ne s'écrivent qu'avec 0 ou 5.

On en déduit que **2.IN<sub>n</sub>** (=  $2\mathbf{IN} \cap \mathbf{IN}_n$ ) est un sous-groupe isomorphe à  $((\mathbf{Z} / 5\mathbf{Z})^n, +)$  et **5.IN<sub>n</sub>** (=  $5\mathbf{IN} \cap \mathbf{IN}_n$ ) est un sous-groupe isomorphe à  $((\mathbf{Z} / 2\mathbf{Z})^n, +)$ .

- En munissant en outre **IN** de la "multiplication-sans-retenu" (notée **x**) alors  $(\mathbf{IN}, +, \mathbf{x})$  est un anneau commutatif, de caractéristique 10.

Il est en fait isomorphe à  $(\mathbf{Z} / 10\mathbf{Z})[\mathbf{x}], +, \mathbf{x})$ , anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans **Z / 10Z**.

- cet anneau n'est pas intègre et les diviseurs de zéro sont les éléments de  $2\mathbf{IN} \cup 5\mathbf{IN}$ .

En outre, tout naturel est somme d'une seule façon d'un multiple de 2 et d'un multiple de 5. Pour ce calcul, il suffit d'utiliser la formule  $n = (6x)n + (5x)n$ .  
Par exemple :  $71 = 26 + 55$ .

$(\mathbf{IN}, +, \mathbf{x})$  est un anneau unitaire dont les unités sont 1, 3, 7 et 9. Tout naturel est donc divisible par 1, 3, 5, 7 ou 9.  
Par exemple :

$$71 = 3 \times 97 = 7 \times 13 = 9 \times 71.$$

Remarquons que :  
 $97 = 7 \times 71$ ,  $13 = 3 \times 71$ ,  $39 = 9 \times 71$ .

- Comme en arithmétique classique, il est possible d'introduire une notion de congruence, de nombres premiers ou irréductibles, de factorisation de naturels comme produits de puissances de nombres premiers, de PGCD et de ppcm.

Le lecteur intéressé rencontrera des surprises (?), par exemple :

- l'ensemble des nombres dont les chiffres des unités est pair (resp. multiple de 5) est 56 **IN** (resp. 65 **IN**).

# Les droites de notre Terre

Pascal Monsellier, Rennes

## Des droites sur une sphère !

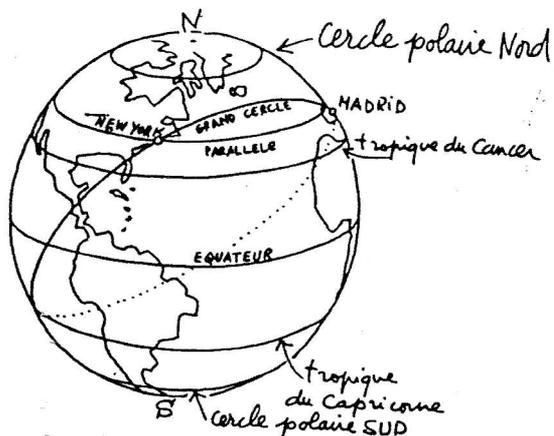
On a l'habitude d'appeler droite, le plus court chemin permettant d'aller d'un point à un autre.

Si l'on généralise l'usage de cette définition, il y a des droites sur toute surface et en particulier sur la sphère.

Pour les trouver, il suffit de tendre entre deux points un élastique ou une "règle universelle" (règle plate coupée dans du caoutchouc) qui déterminent aussi bien les lignes droites sur un plan que sur une sphère.

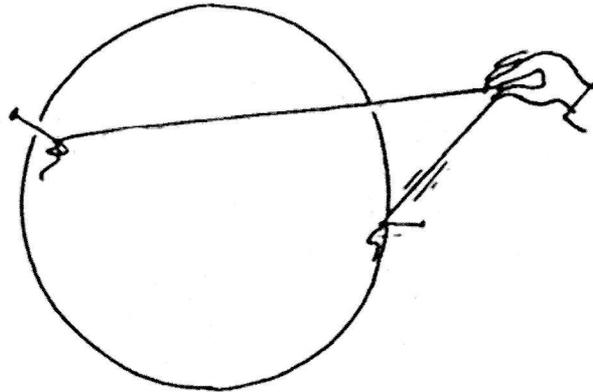
### des cercles différents

Sur une sphère, choisissons deux points fixes A et B aux antipodes. Un cercle de la sphère est un ensemble de points situés à la même distance

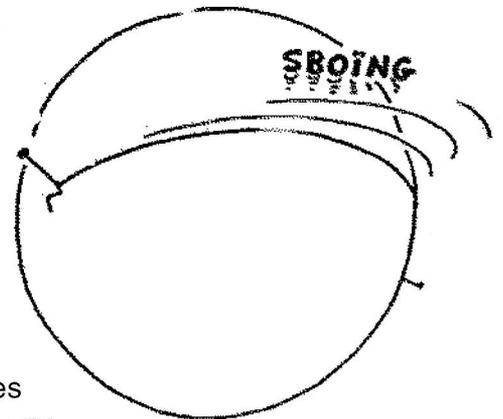


de A (remarquez qu'ils sont aussi à la même distance de B !).

Les cercles de même "centre" (ou "pôles") A et B sont dits parallèles.



Celui qui est le plus grand de tous, équidistant de A et de B est appelé "grand cercle" ou "équateur". C'est le seul de la famille dont le plan contient le centre de la sphère.

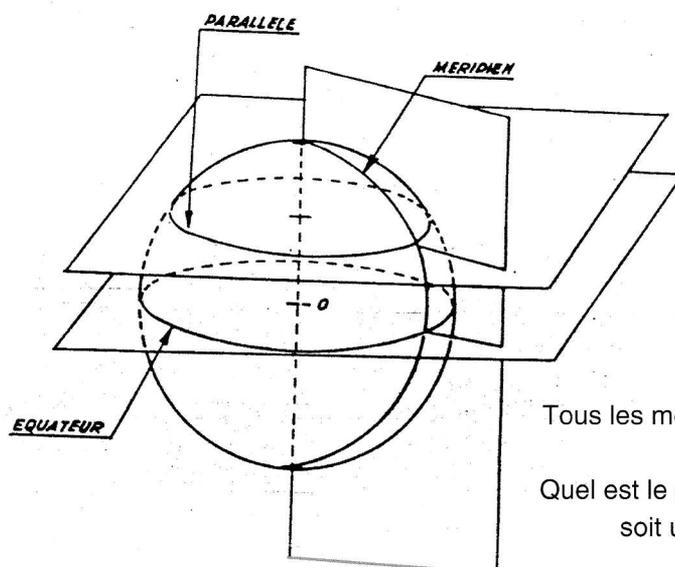


Les lignes droites (plus court chemin) sur une sphère sont les grands cercles.

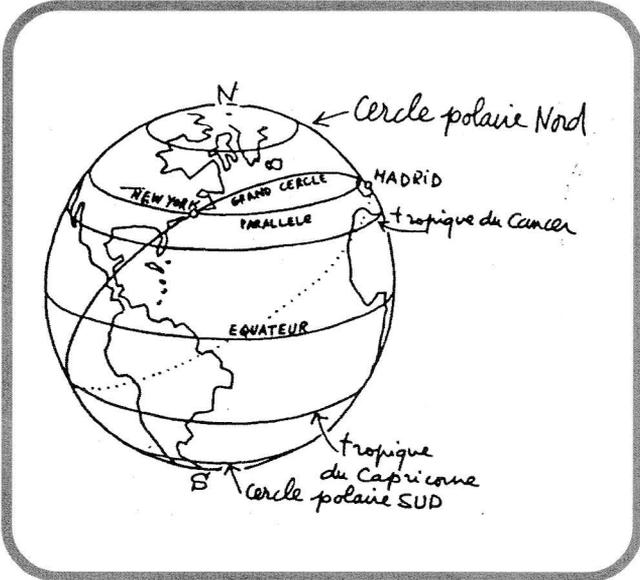
Ils sont appelés de plusieurs façons : grand cercle - géodésique - orthodromie (pour les géographes).

Sur notre planète Terre, les cercles polaires, les tropiques sont des parallèles, mais ne sont pas des grands

Un élastique tendu sur une sphère réalise le "plus court chemin" entre ses extrémités.



Tous les méridiens sont des grands cercles. Quel est le seul parallèle qui soit un grand cercle ?



La Planète Terre

cercles. Le seul parallèle qui soit un grand cercle est l'équateur. Ainsi, Madrid et New York sont sur le même parallèle mais l'arc de parallèle qui les joint n'est pas le plus court chemin qui les relie sur Terre. Les méridiens

sont eux des grands cercles. Ils passent tous par les pôles.

même aire sur la carte. Cette propriété permet de respecter les équilibres visuels entre continents. Mais cela se paie au prix de déformations importantes des figures.

Une carte ne peut être à la fois conforme et équivalente ! Il faut choisir.

Selon l'usage que l'on veut faire d'une carte, et son étendue (planétaire ou locale), on privilégie l'une ou l'autre de ces qualités. Pour tous les travaux demandant un repérage précis (navigation, topographie ...) on utilisera des cartes conformes. Pour des comparaisons géographiques entre régions de basses et hautes latitudes, on choisira des cartes équivalentes.

### Conforme or not conforme ?

Une carte est une représentation de la réalité. Elle peut privilégier un aspect de cette réalité plutôt qu'un autre. Les cartes conformes respectent les formes. L'angle de deux courbes sur la Terre y est égal à l'angle de leurs images sur la carte. On dit qu'il y a conservation des formes.

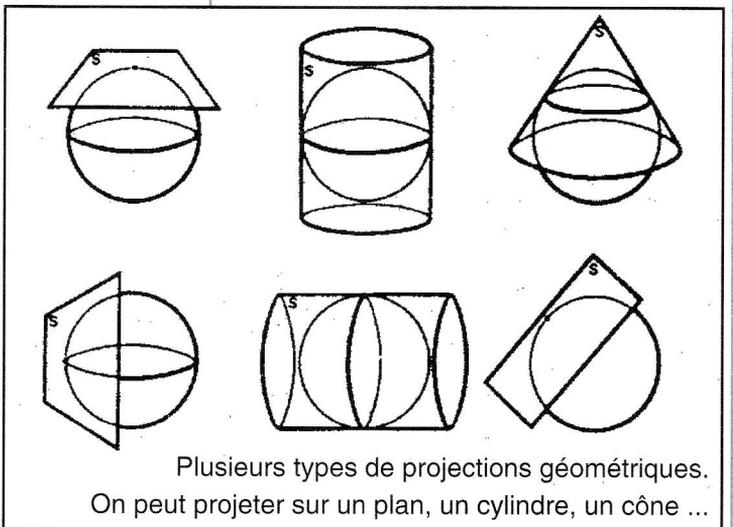
De telles cartes permettent de reconnaître les continents, les pays ... mais elles ont un inconvénient majeur

: les rapports d'aires ne sont pas conservés, ce qui contribue à hypertrophier les régions proches des pôles par rapport aux régions équatoriales.

Les cartes équivalentes respectent, elles, les rapport d'aire : deux régions de même aire sur la Terre auront des images de

Cela n'aurait évidemment aucun sens de déterminer la route la plus courte entre Moscou et Los Angeles sur la carte équivalente de Lambert, ou de comparer l'étendue de l'Inde à celle de la Scandinavie sur une carte conforme de Mercator!

Réaliser une carte, c'est établir une correspondance entre la sphère terrestre et un plan (on néglige ici le fait que la Terre mieux approchée par une ellipsoïde que par une sphère).



Plusieurs types de projections géométriques. On peut projeter sur un plan, un cylindre, un cône ...

## Projections et maillages

Il est nécessaire d'établir entre les points de la sphère et ceux de la carte des relations du type :

$$\begin{aligned} x &= f(\alpha, \lambda) & y &= g(\alpha, \lambda) \\ \alpha &= h(x, y) & \lambda &= k(x, y) \end{aligned}$$

où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées rectangulaires dans le plan,  $\alpha$  la latitude et  $\lambda$  la longitude du point sur la sphère,  $f, g, h, k$  des fonctions continues quelconques.

Parmi les solutions possibles à ce problème, les mathématiciens en ont décrits près de deux cents dont une trentaine sont employées dans les applications usuelles.

En pratique deux familles de solutions sont envisageables :

----> Soit on utilise une projection géométrique de tout ou partie de la sphère terrestre sur une surface développable (plan, cylindre ou cône) tangent à la Terre et on aplatit cette surface pour obtenir la carte recherchée. Les résultats obtenus, on le verra, sont très divers.

Mais à l'origine géométrique du procédé permet dans beaucoup de cas des tracés, des mesures et des calculs sur les cartes, en particulier avec l'ordinateur.

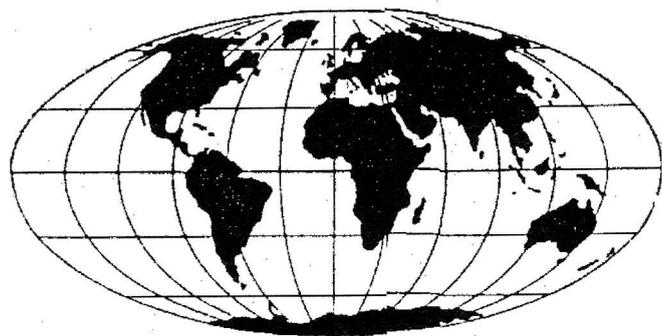
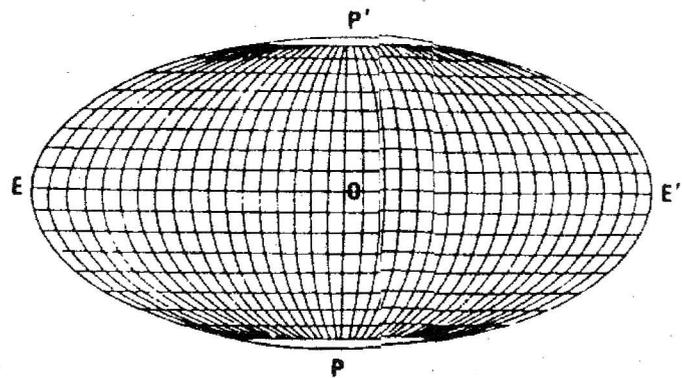
----> Soit la relation entre les coordonnées est de type analytique et ne correspond à aucune projection perspective.

On obtient alors soit des cartes se prêtant aux tracés, soit des cartes purement géopolitiques, soit des planisphères.

Dans tous les cas, les cartes se dessinent par rapport à un réseau, ou maillage, image des méridiens et des parallèles quadrillant la sphère terrestre.

Remarquons que méridiens et parallèles étant orthogonaux, une pro-

jection conforme (qui conserve les angles) donnera naissance à un maillage où tous les angles sont droits (mais un maillage orthogonal ne correspond pas nécessairement à une projection conforme !).



Exemples de canevas conventionnel :

Il sert à la planisphère de Mollweide, carte équivalente dans laquelle les méridiens sont des arcs d'ellipse et les parallèles sont des droites parallèles tracées à des distances telles que l'équivalence des mailles est conservée.

## Existe-t-il une carte isométrique ?

La vie serait belle s'il en était ainsi ! En effet, une telle carte respecterait par définition toutes les distances et :

- pour construire une telle carte, il suffirait de reporter sur le papier toutes les distances mesurées sur le terrain par topographie (à une échelle près bien entendu),

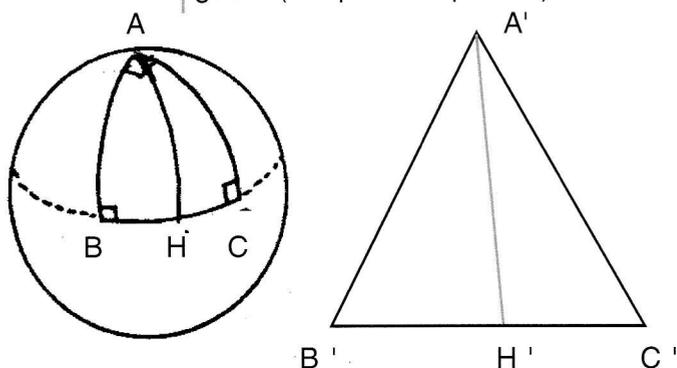
• pour connaître la distance de deux points quelconques, il suffirait de mesurer leur distance sur la carte (et d'appliquer l'échelle de celle-ci).

Malheureusement, une telle carte n'existe pas !

En voici une démonstration simple.

Une remarque au préalable : si une carte isométrique existait, les "plus courtes distances" (géodésiques) de la sphère et du plan se correspondraient, à savoir que les grands cercles de la sphère auraient pour image les droites du plan.

Considérons un huitième de sphère, c'est-à-dire un triangle sphérique ayant 3 angles droits, et tel que les côtés AB, BC et CA aient même longueur (un quart d'équateur).



Si une carte isométrique existait, le triangle sphérique "équilatéral" ABC aurait pour image un triangle plan équilatéral A'B'C'. Remarquons au passage que les angles droits du triangle sphérique ABC auraient pour image des angles de  $60^\circ$  : la carte ne conserverait pas les angles.

Soit AH, l'arc correspondant au quart de grand cercle passant par A, de longueur égale, elle aussi, à un quart d'équateur. Son image A'H', nécessairement segment de droite, serait corde du triangle A'B'C'.

Or on a toujours  $A'H' < A'B'$ .

Une telle carte isométrique ne peut exister puisque les deux arcs AB

et AH, de même longueur, ont des images de longueurs inégales.

### Faute de grives ...

... on mange des merles.

À défaut d'avoir des cartes isométriques, on se contentera de projections ayant, au mieux, l'une des propriétés suivantes :

- soit conformes (elles conservent les angles),
- soit équivalentes (elles conservent les aires à un facteur près).

Malheureusement, chacune de ces propriétés, complète ses avantages par beaucoup d'inconvénients, et elles sont en outre incompatibles !!!

### Retour sur l'échelle

Nous aborderons souvent la notion d'échelle (que les géographes appellent souvent "module linéaire").

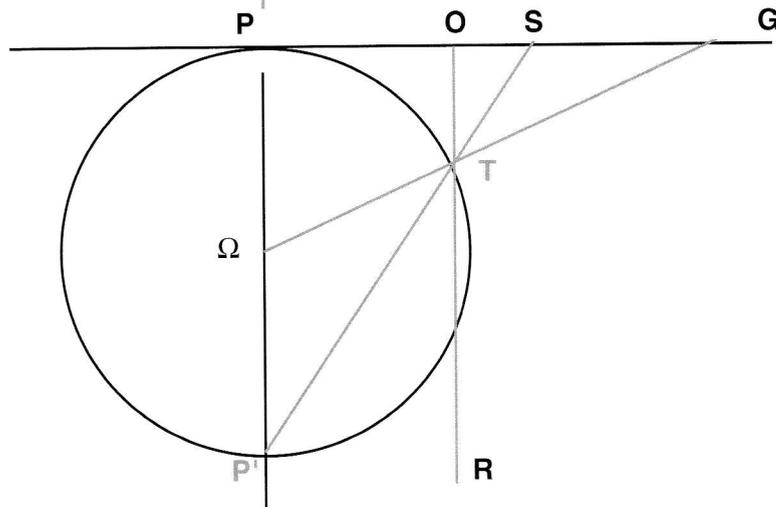
Rappelons ce dont il s'agit :

Une courbe AB sur la Terre a pour image une courbe A'B' sur une carte plane. On appellera échelle sur la courbe considérée, le rapport longueur A'B' / longueur AB. C'est le coefficient multiplicateur qui transforme les distances. Notons que nous ne tenons pas compte de la taille réelle de la Terre et que nous supposons que la sphère et la carte ont même ordre de grandeur.

Par exemple, une carte isométrique, qui respecterait toutes les distances, aurait en tout point une échelle valant 1.

Mais une telle carte... n'existe pas !!! (bis repetita placent).

## Retour sur la conservation



Pour aplatir une sphère, il y a 3 possibilités qui correspondent chacune à projeter sur une surface développable simple : un plan, un cône ou un cylindre tangents à la sphère.

Cela donne des projections

- azimutales,
- coniques ou
- cylindriques.

Une autre façon de classer les projections cartographiques est de partir du point de projection.

Ainsi, pour une projection azimutale, il y a plusieurs façons de projeter un point T de la Terre. Sur le dessin ci-dessus apparaissent les 3 principaux types de projection des points de la Terre sur un plan :

- **gnomonique** :  $\Omega TG$ ,  
le centre de la Terre est centre de projection,
- **stéréographique** :  $P'TS$ ,  
T' est le point - le pôle - opposé au point de tangence du plan de projection,
- **orthographique** :  $RTO$ ,  
le centre de projection est à l'infini.

Troisième voie pour classer les projections cartographiques : les propriétés qu'elles conservent, sachant qu'elles ne peuvent en conserver que très peu.

### Les angles :

Ce sont les projections conformes. Tout angle sur la sphère est projeté sans changement sur le plan. Par exemple, les méridiens et les parallèles qui sont perpendiculaires sur la sphère terrestre restent perpendiculaires sur le plan.

### Les aires :

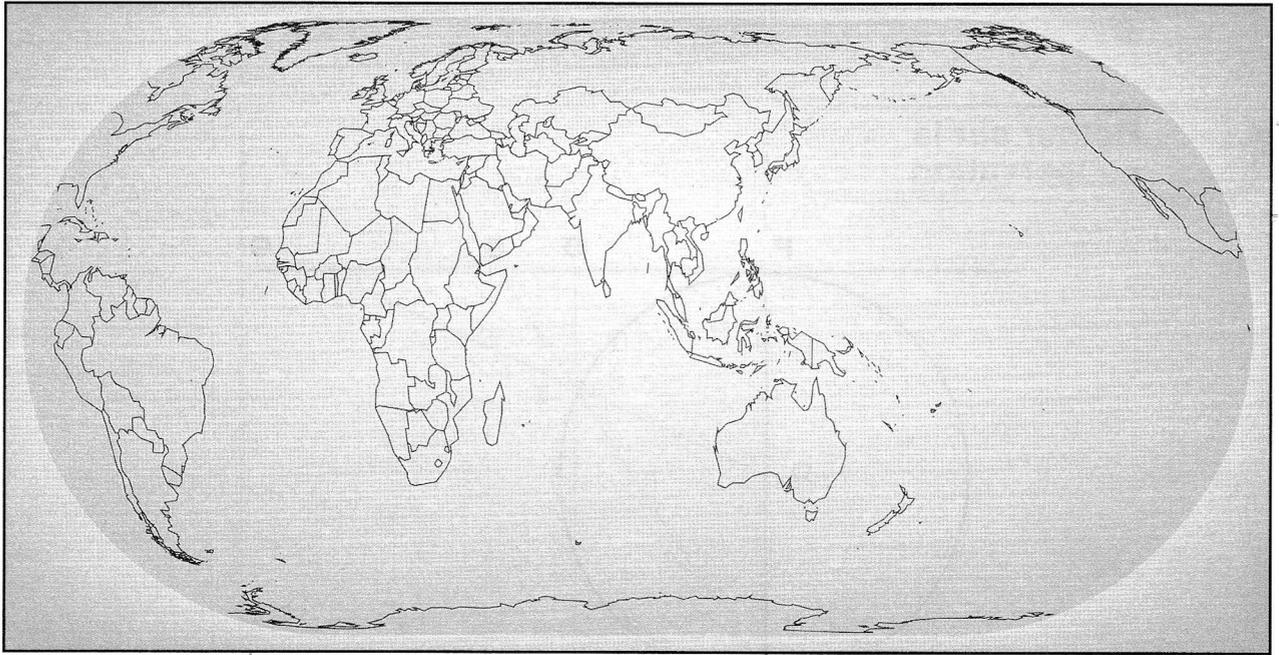
Cette propriété nécessite que toute région de la sphère, aussi petite soit-elle, conserve la même aire sur le plan (proportionnellement aux autres).

### Les distances :

Les distances au centre de la carte restent identiques sur le plan et la sphère. C'est bien sûr celle qui est le plus utilisée par le commun des ... utilisateurs de cartes.

### Les directions :

Les directions par rapport aux méridiens, par exemple, sont conservées sur la carte.

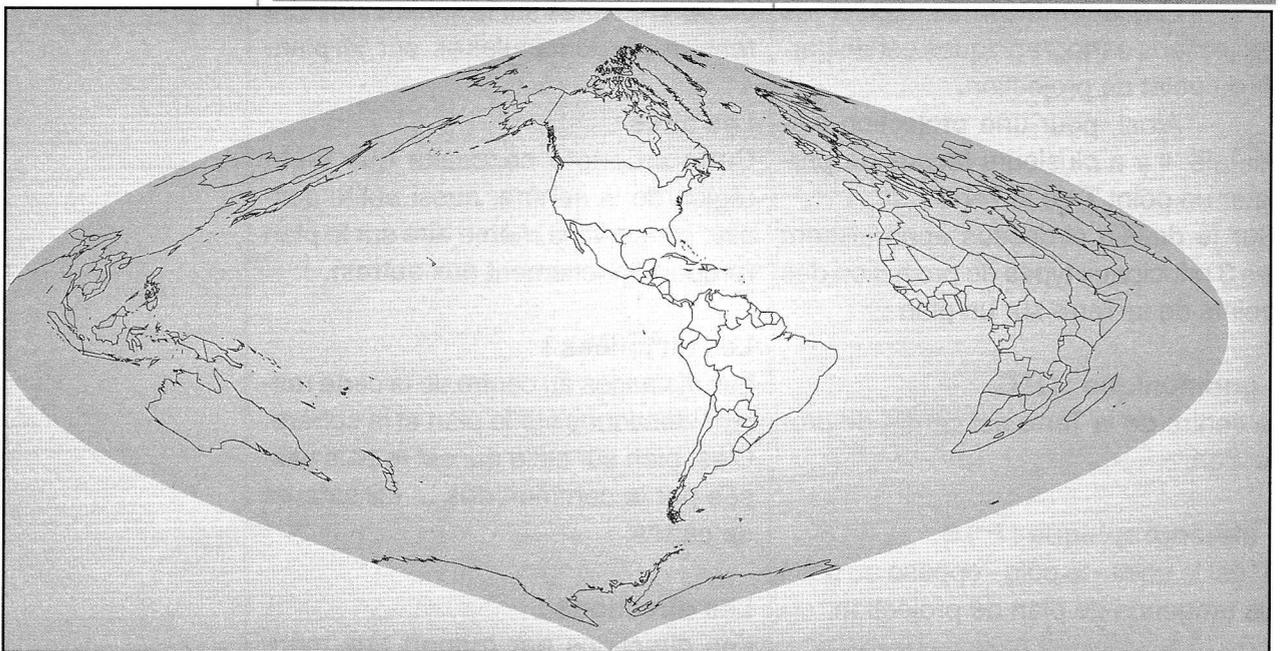


**Le monde vu d'Asie :** L'Asie et ses deux milliards d'habitants, et la masse du désert australien au bout d'un chapelet d'îles. A ses portes, l'Europe et l'Afrique, ainsi que l'ouverture sur le Pacifique.

Projection Eckert IV, de type pseudo-cylindrique, centrée sur le méridien de longitude 90° passant par l'Asie. Cette projection qui conserve les aires est principalement utilisée pour représenter le monde.

### Classifications des projections cartographiques

Projection plane	Source de projection	Conservation
Azimutale	Gnomonique	Angles égaux
Conique	Stéréographique	Aires égales
Cylindrique	Orthographique	Distances égales
		Directions conservées



**Le monde vu des USA :** L'accent est mis sur un effet de renvoi dos à dos, ou de symétrie : la côte Est des États-Unis tournée vers l'Europe, la côte Ouest

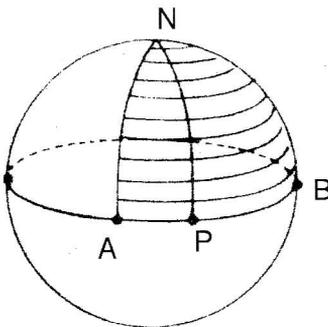
tournée vers l'Asie. L'économie trouve ses racines dans la géographie. Projection sinusoïdale de Samnon-Flamsteed, de type pseudo-cylindrique.

# Cartes de la Terre

Jean Lefort, Witzensheim

**La représentation de tout ou partie de la sphère terrestre sur une carte plane pose des problèmes délicats. Ces problèmes, quiconque a essayé d'aplatir une pelure d'orange sur son assiette, les remarque immédiatement : des déchirures ou des déformations apparaissent.**

Supposons que l'on désire faire une carte qui donne une idée fidèle des distances entre les points à la surface de la Terre : les arcs de grands cercles (plus courts chemins sur la sphère) devront alors être représentés par des segments de droites (plus courts chemins sur le plan)



Essayons de cette façon de faire une carte du huitième de sphère ABN, (c'est le "triangle sphérique" coloré du dessin ci-dessus) où N est le pôle nord, NA et NB des quarts de méridien et AB un quart d'équateur. Il devra être représenté dans le plan par un triangle équilatéral A'B'N' pour respecter l'égalité des longueurs des côtés. Cette représentation offre, entre autres, deux aspects choquants :

\* Le quart de méridien NP a même longueur que NA ou NB ; sur la carte son image N'P' est plus courte que N'A' ou N'B'.

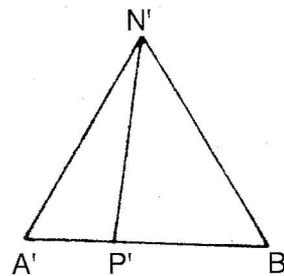
\* Sur la sphère le "triangle ABN" a tous ses angles droits ( $90^\circ$ ) ; sur la carte, ils font  $60^\circ$ .

On peut classer les différentes cartes selon les propriétés qui sont conservées, par exemple :

**Les représentations conformes :** il y a conservation des angles,

**Les représentations équivalentes :** il y a conservation du rapport des surfaces ; mais il y a loin d'un carré  $1 \times 1$  à un rectangle  $10 \times (1/10)$ .

Les représentations azimutales : il y a conservation de la direction à partir



d'un point particulier.

**Les représentations sphériques :** les méridiens et les parallèles ont pour image des cercles (et parfois des droites).

On peut aussi classer les différentes cartes selon la méthode par laquelle elles ont été obtenues ; par exemple :

**Les projections cylindriques :** obtenues par développement d'un cylindre auxiliaire.

**Les projections coniques :**

obtenues par développement d'un cône auxiliaire.

**Les projections perspectives :**

obtenues par projection sur une surface plane ou non, partir d'un point de vue.

**Quelques exemples de projections**

**Projection homolosine discontinue de Goode :**

On a raccordé le long de l'équateur les différentes parties obtenues en choisissant des méridiens origines distincts. Les déformations sont moindres, mais il y a apparition de discontinuités.

On notera l'angle sur chaque méridien au niveau du 40° parallèle. Il provient du fait que la méthode de calcul n'est pas la même de part et d'autre de ce parallèle. C'est une projection équivalente.

**Projection de Bonne :**

projection conique équivalente qui fut utilisée par la carte de France au 1/80 000 dite carte d'État-Major.

L'échelle est respectée sur les parallèles et sur le méridien central.

On peut représenter la Terre entière mais avec de très fortes déformations.

**Projection azimutale par arcs, à partir du pôle nord.**

L'échelle est la même le long de tous les méridiens et l'angle que font les méridiens entre eux est conservé.

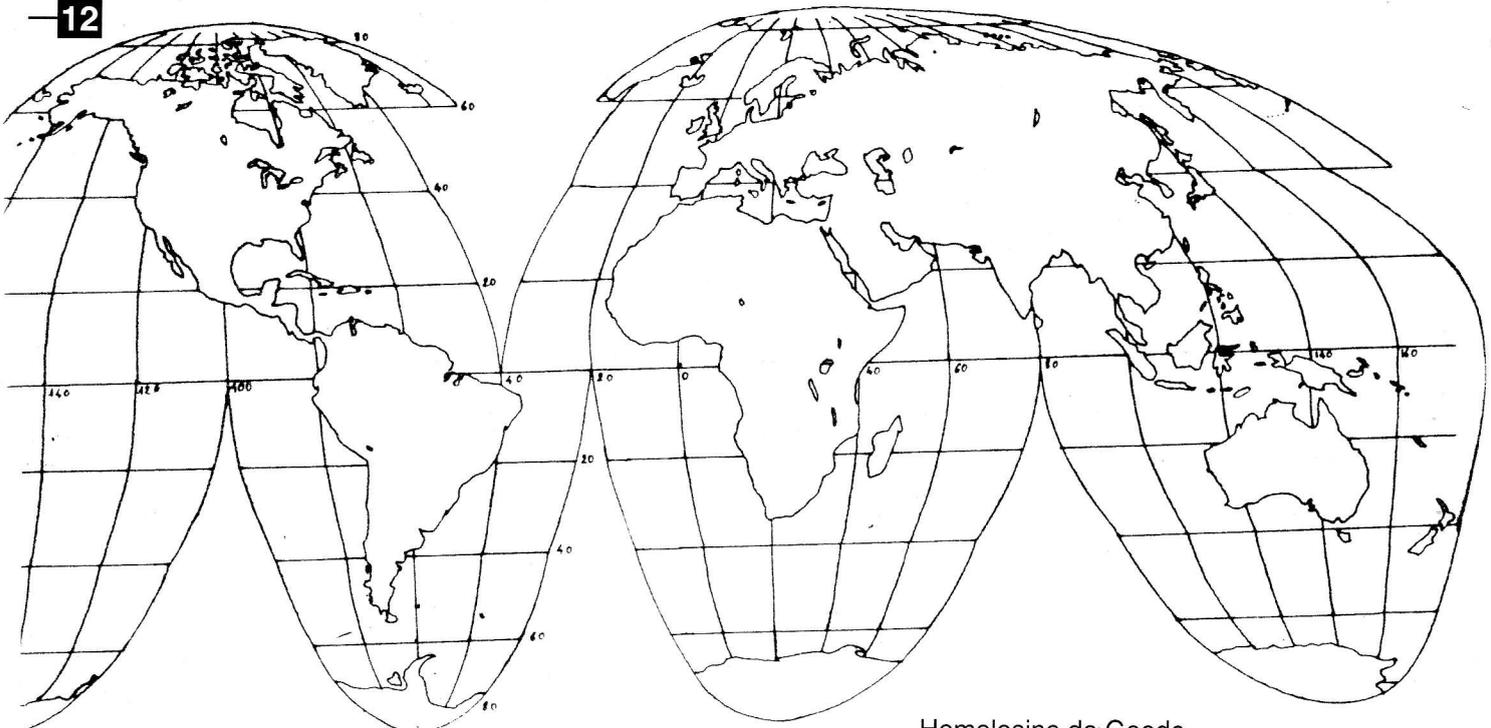
Les déformations deviennent très importantes dans l'hémisphère sud.

**Projection Eckert :**

elle est équivalente.

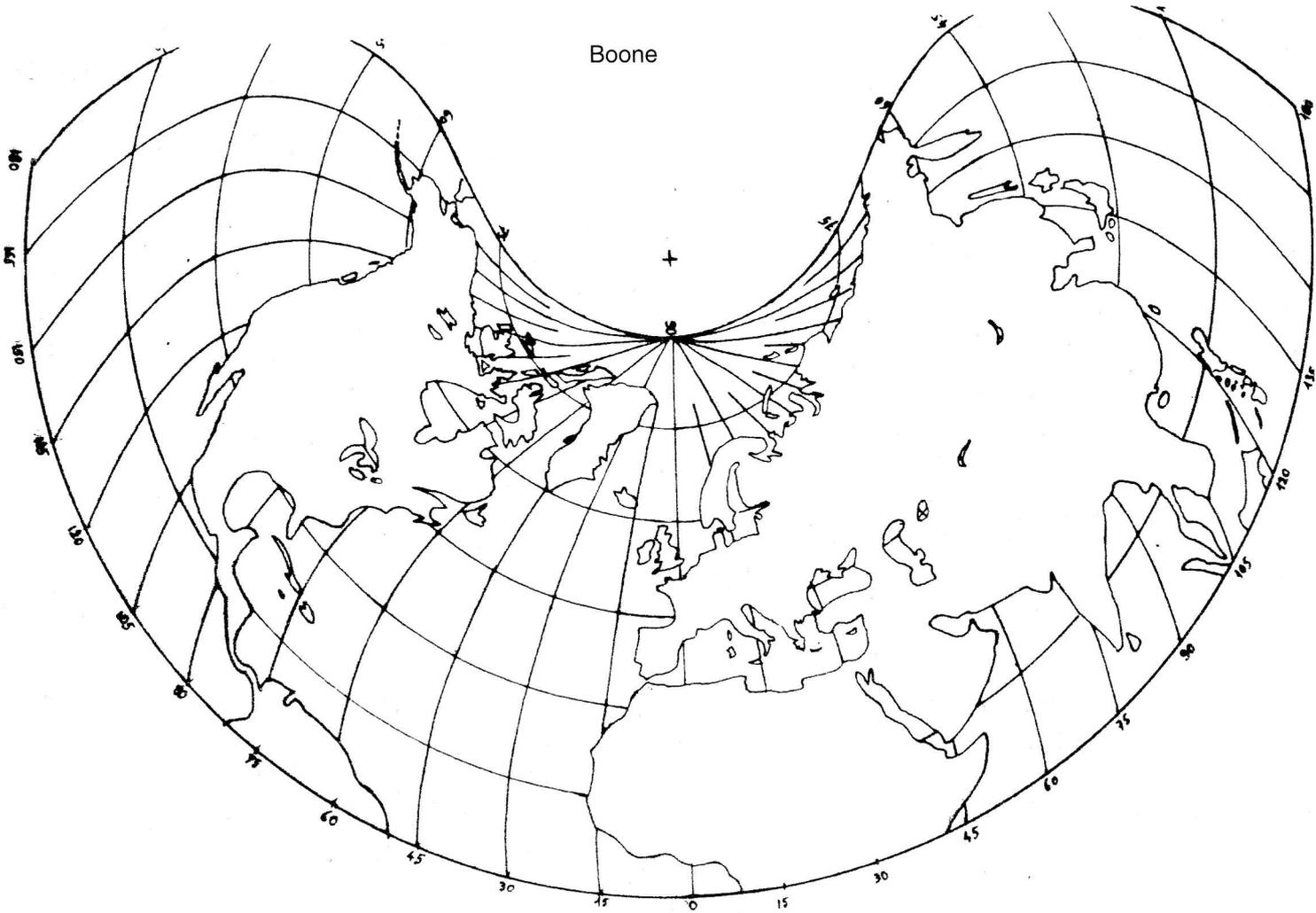
**Projection polyconique :**

L'échelle est la même le long des parallèles et du méridien central. La carte est analogue dans l'hémisphère sud (même canevas pour les méridiens et les parallèles).

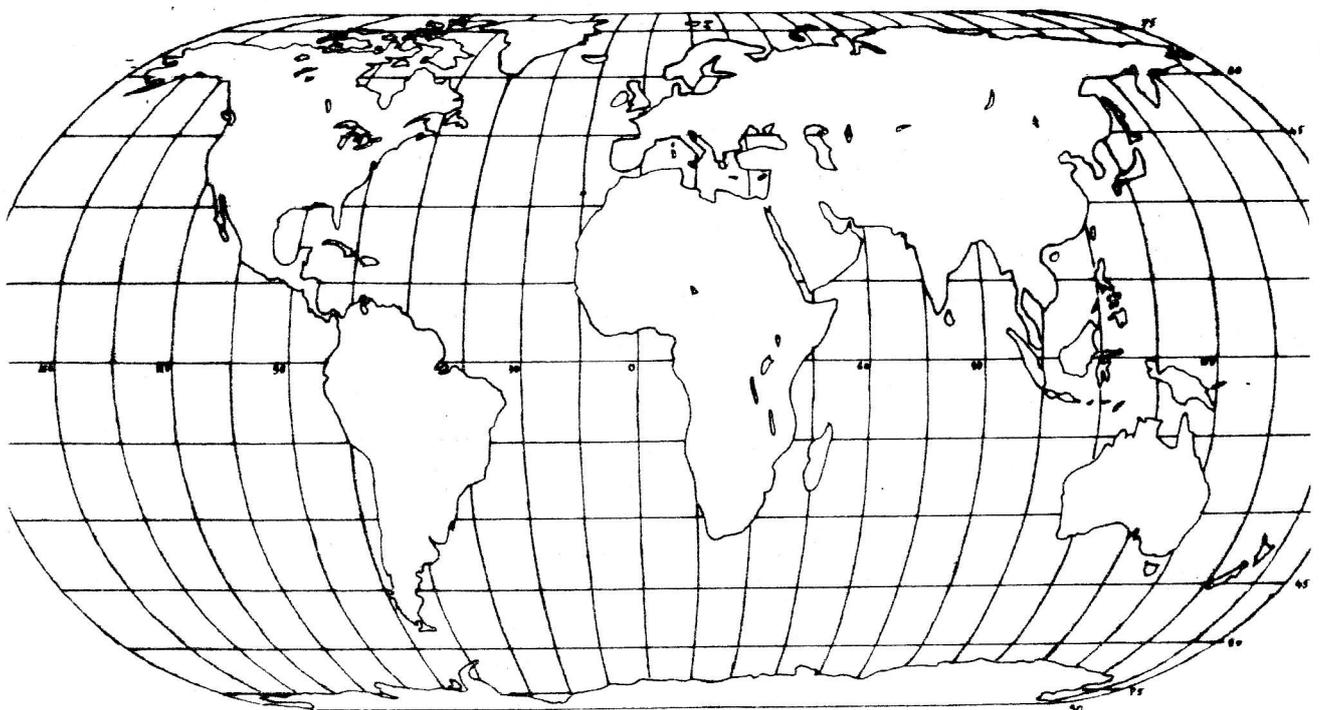


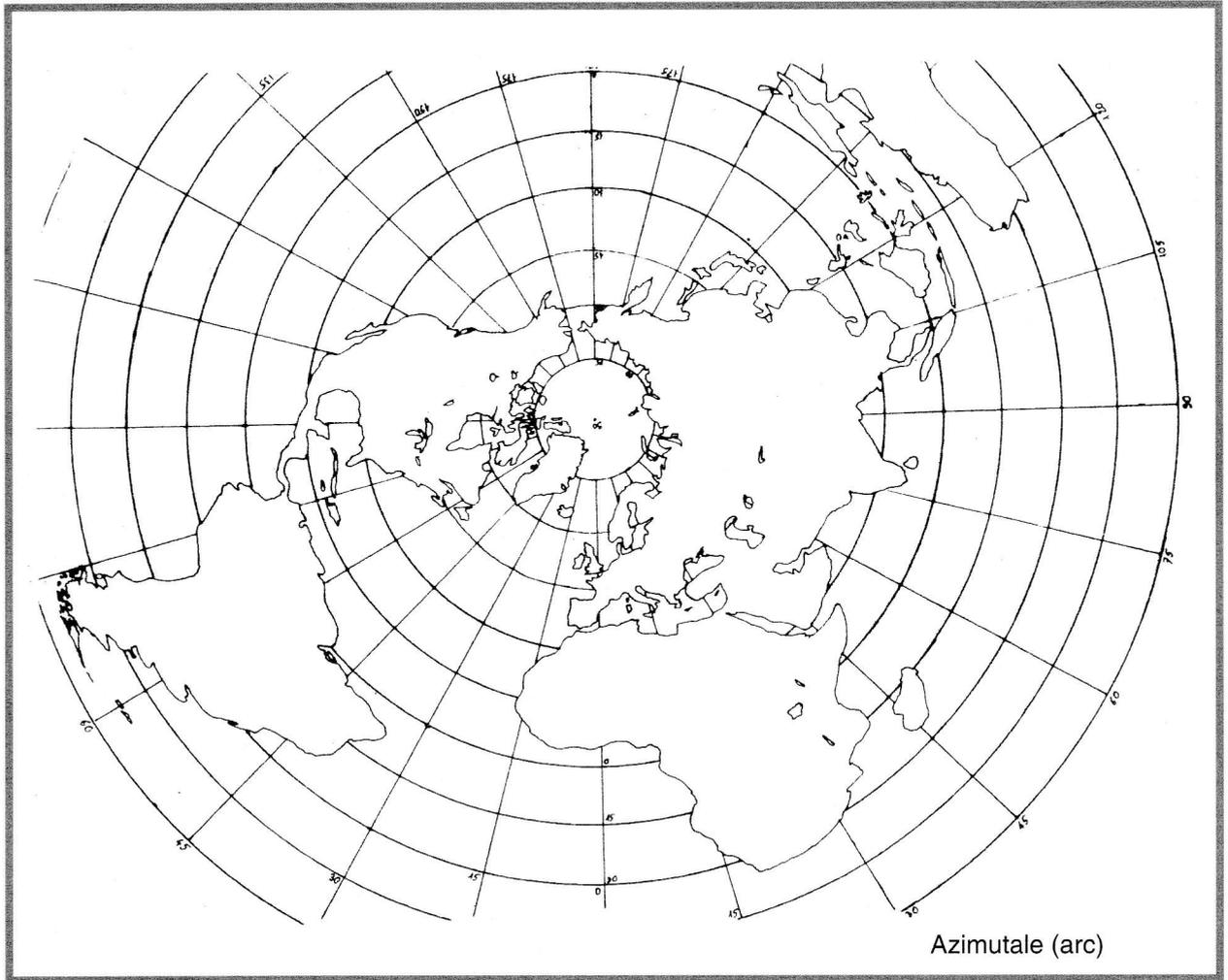
Homolosine de Goode

Boone



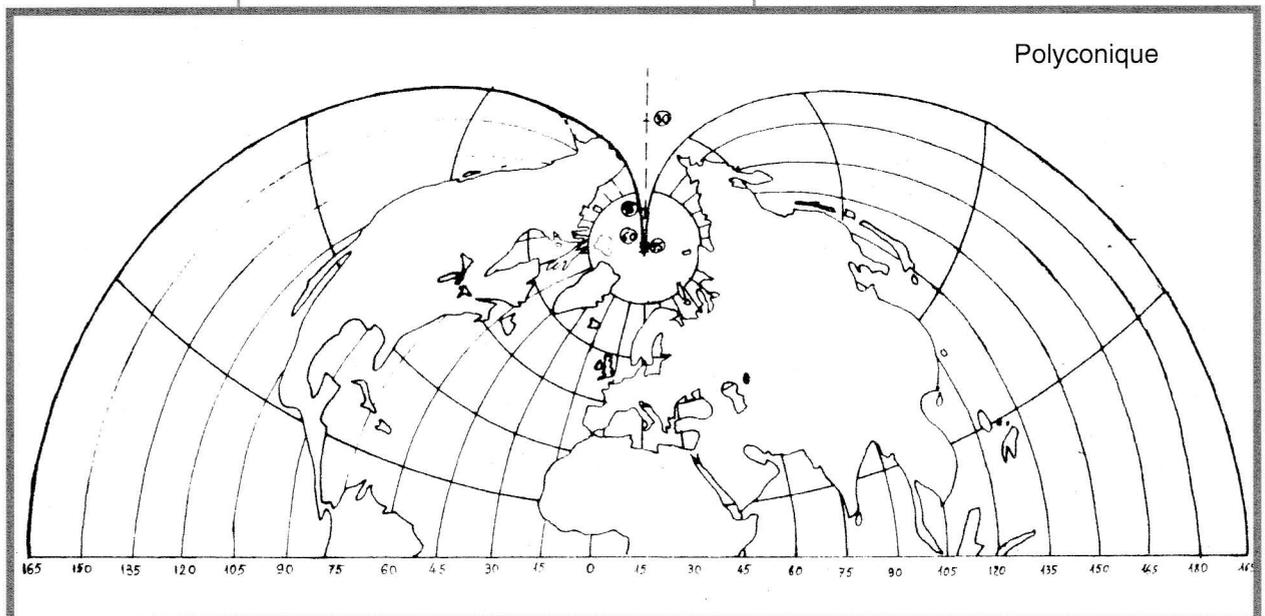
Echert





**Projection azimutale de Lambert**  
 (ou projection azimutale par cordes).  
 C'est une projection équivalente  
 qui conserve l'angle des directions à  
 partir du centre de la carte (ici le point

de l'équateur de longitude 70° E) .  
 Cette projection peut s'étendre  
 à la Terre toute entière, mais on préfère  
 souvent accoler les cartes des deux  
 hémisphères.



Horizontale de Lambert

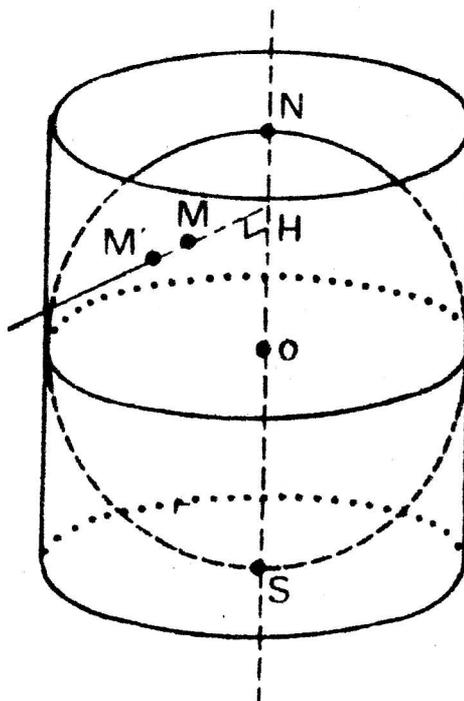


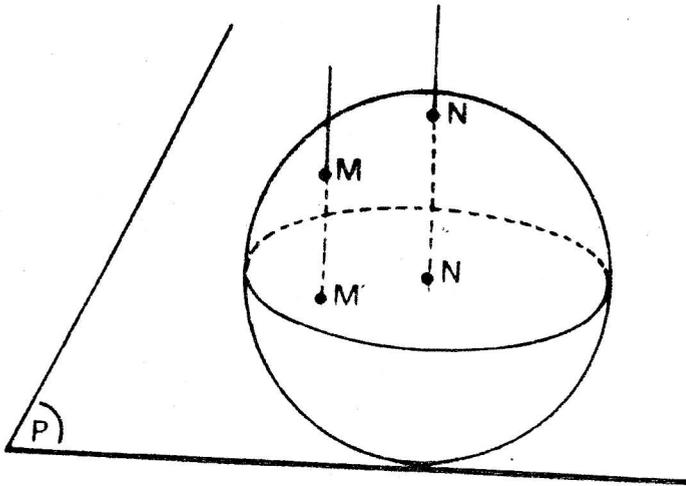
### Les projections isocylindriques

Les projections isocylindriques consistent à projeter la sphère terrestre sur un cylindre circonscrit (le long de l'équateur, par exemple).

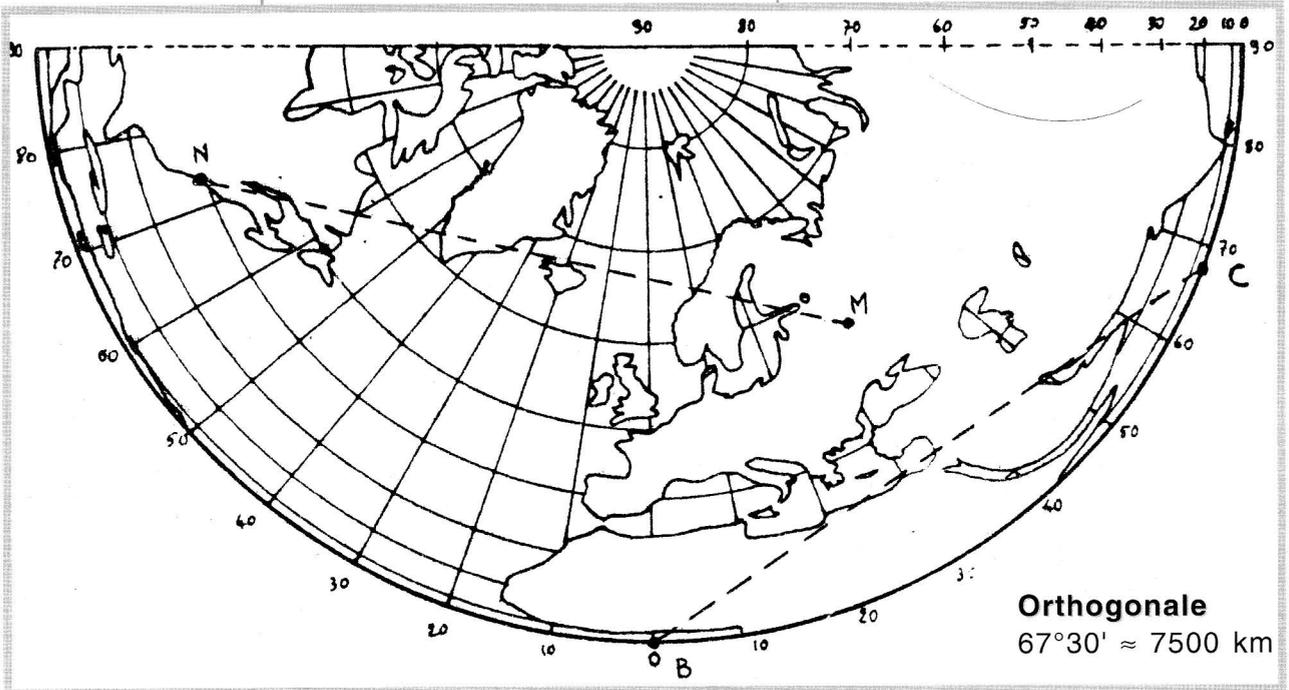
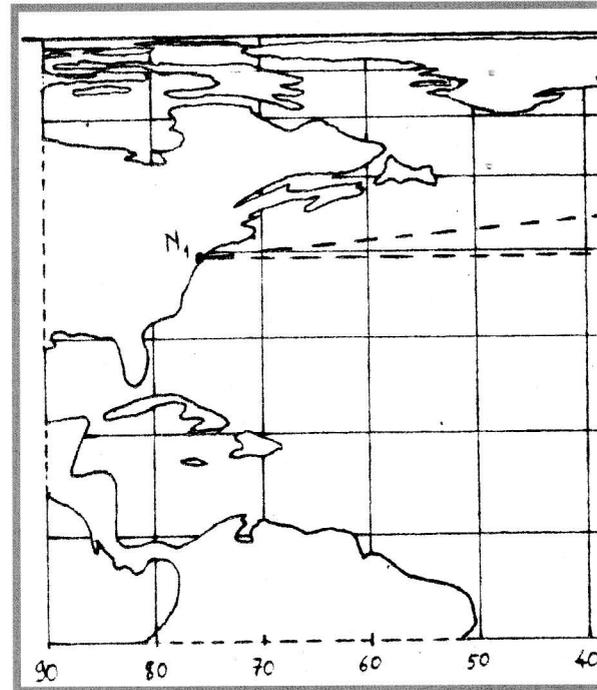
$M'$  est l'image de  $M$  et  $MM'$  est perpendiculaire à l'axe du cylindre).

Pour obtenir une carte plane, on découpe ensuite le cylindre en suivant une génératrice (la ligne de changement de date, par exemple), on le déroule puis on effectue une réduction d'échelle pour avoir une carte de dimensions convenables.





La projection isocylindrique conserve le rapport des surfaces. En particulier la sphère terrestre et le cylindre circonscrit ont la même superficie. Les déformations sont cependant importantes près des pôles.



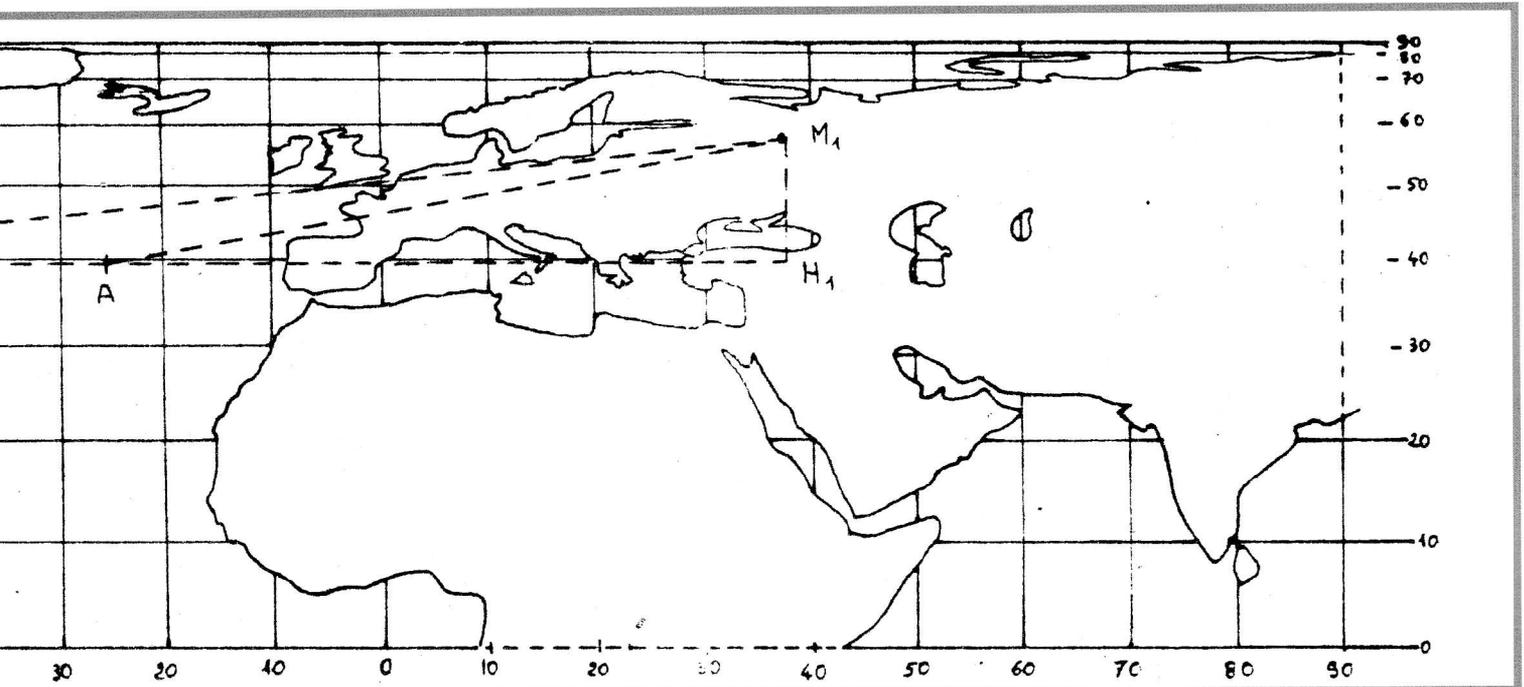
La projection orthogonale n'a pas de propriétés particulières simples. On note que les déformations sont importantes près de l'équateur.

Si l'on dispose de deux cartes ayant la même échelle le long de l'équateur, l'une obtenue par projection orthogonale et l'autre par projection isocylindrique, il est possible de construire la distance, à la surface de la Terre, de

deux points.

Par exemple, entre Moscou (noté M et  $M_1$ ) et New-York (noté N et  $N_1$ ) : on trace le triangle rectangle  $M_1N_1H_1$  ( $M_1H_1$  suit un méridien). On reporte  $MN$  en  $AH_1$ , puis  $AM_1$  en  $BC$ .

L'arc  $BC$  mesuré sur l'équateur de la projection orthogonale représente la distance cherchée.



### La projection gnomonique

La projection gnomonique consiste à projeter une demi-sphère sur un plan à partir du centre de la sphère.

M' est l'image de M. I, qui a pour image I', s'appelle le point central de la projection.

Cette projection qui n'est ni conforme ni équivalente, présente le grand avantage de transformer les grands cercles (chemins les plus courts sur la sphère) en droites (chemin les plus courts sur le plan).

Les méridiens et l'équateur, qui sont des grands cercles, ont pour image des coniques : hyperboles, paraboles, ellipses en général ou des cercles quand le point central est un pôle.

Dans tous les cas, le calcul des angles est assez facile. Par exemple, si le point central est un pôle, l'angle  $v$  entre la direction du pôle et le chemin suivi s'obtient à parti de l'angle  $V$  lu sur

la carte et la latitude  $I$  du lieu où l'on fait la mesure par la formule :

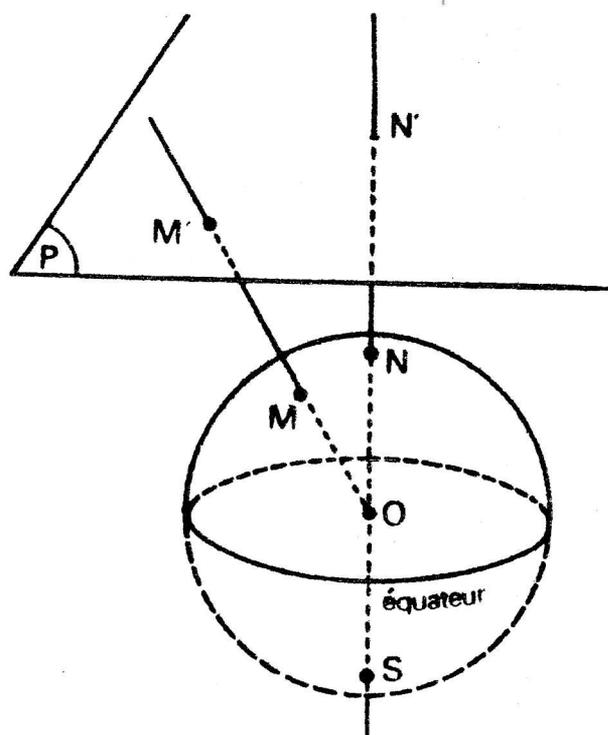
$$\text{tg } v = \text{tg } V / \sin I$$

Par exemple, sur une route entre Miami (M) et Paris (P) :

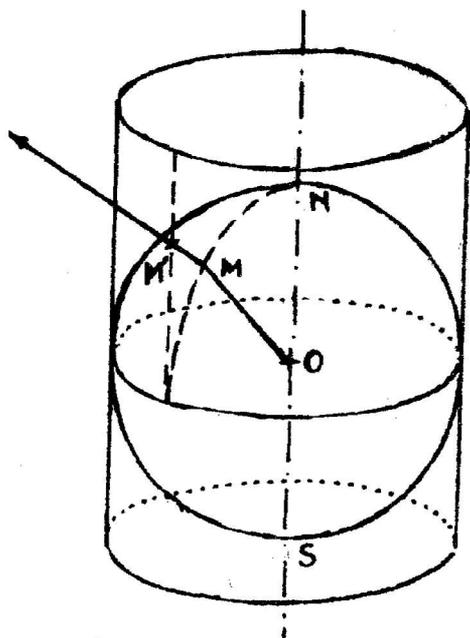
$$V = 20^\circ \text{ et } I = 30^\circ \\ \text{donc } v = 36^\circ 00'$$

$$V = 50^\circ \text{ et } I = 45^\circ \\ \text{donc } v = 59^\circ 20'$$

### Isocylindrique



## La projection de Mercator



Le flamand Gerhard Kremer, dit

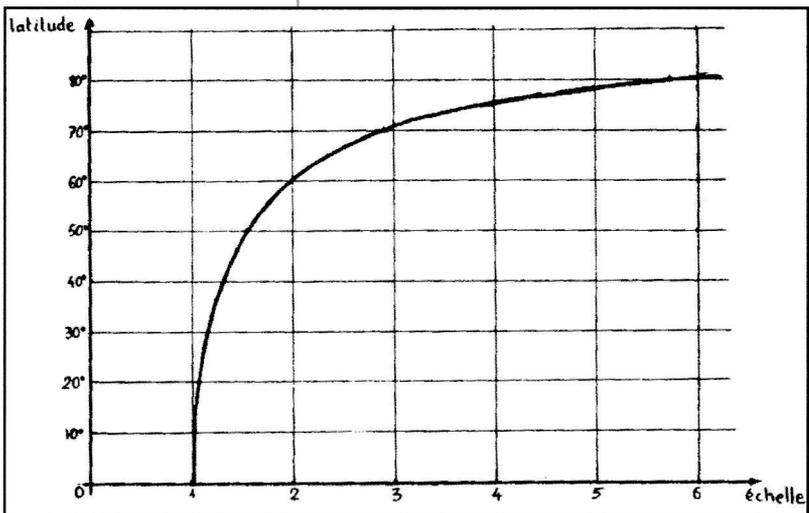
Mercator, est né à Rupelmonde en 1512 et est mort à Duisbourg en 1594. Il fut le premier à asseoir la cartographie sur de solides bases mathématiques. C'est en 1569 qu'il publia la première carte du monde en dix-huit feuillets, en utilisant la projection qui porte son nom.

Dans la projection de Mercator usuelle, on projette un point M de la surface terrestre en M' sur un cylindre tangent à l'équateur. Attention : les points O, M et M' ne sont pas alignés mais sont dans un même plan méridien.

Pour obtenir une carte plane, on découpe ensuite le cylindre puis on le déroule. Enfin une réduction d'échelle permet d'obtenir une carte de dimensions convenables.

Sur le canevas obtenu, les méridiens sont des droites parallèles régulièrement espacées, les parallèles sont des droites perpendiculaires aux précédentes mais dont l'écartement croît quand on s'éloigne de l'équateur. (L'écartement est inversement proportionnel au cosinus de la latitude.)

La projection de Mercator est une projection conforme, c'est-à-dire qu'elle conserve les angles. De plus elle représente par des droites les routes dont le cap est constant. Mais les déformations sont d'autant plus importantes que l'on se rapproche des pôles.



La projection de Mercator est donc essentiellement utilisée pour la représentation des régions équatoriales.

Le graphique ci-dessus donne la relation entre l'échelle et la latitude. Par exemple, l'échelle de la carte vaut deux fois celle à l'équateur pour les points de latitude 60°. À partir de cette

valeur l'échelle croît très rapidement.

Pour les besoins de la navigation aérienne on utilise la projection de Mercator oblique : le cylindre auxiliaire de projection est tangent au grand cercle itinéraire de l'avion. On parle de projection de Mercator transverse quand le cylindre est tangent à un méridien.

### La projection stéréographique

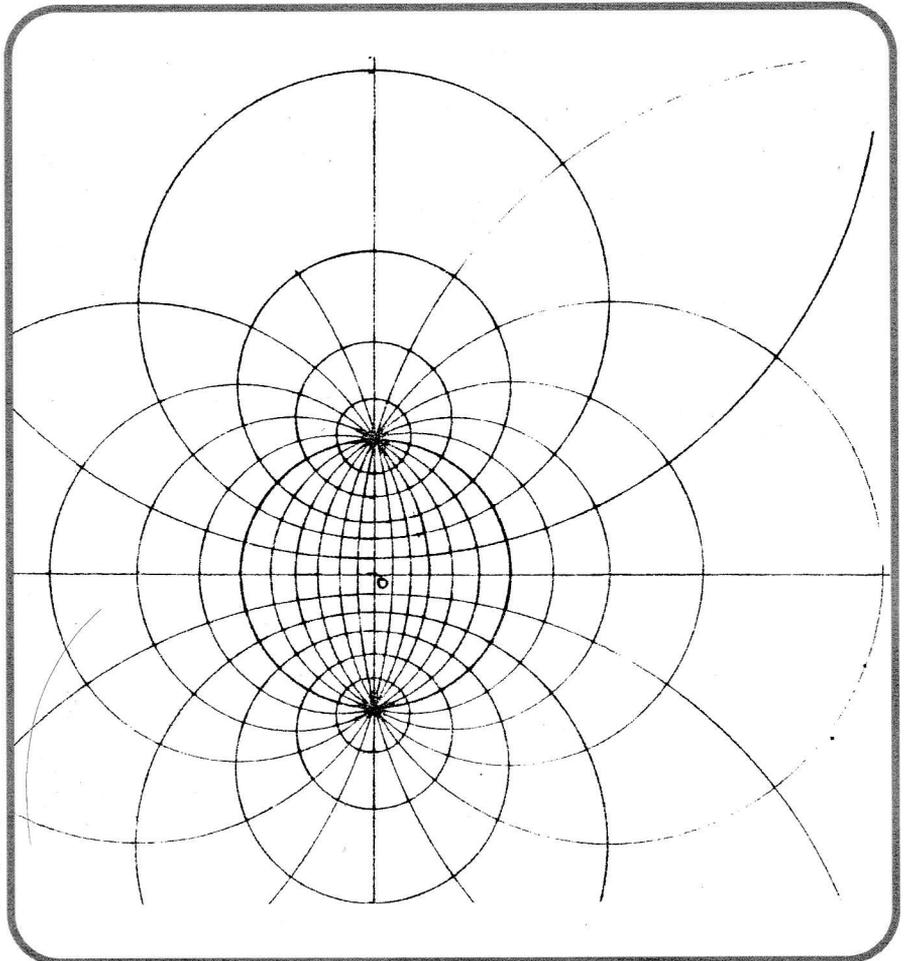
La projection stéréographique consiste à projeter la sphère terrestre, à l'exception d'un point (I sur le dessin) sur un plan. Les points I et J sont diamétralement opposés sur la sphère. M' est l'image de M.

Les images des cercles tracés sur la sphère sont des cercles et parfois des droites sur la carte. Le canevas ci-dessous représente le cas particulier des méridiens et des parallèles.

La projection stéréographique conserve les angles ; c'est une représentation conforme.

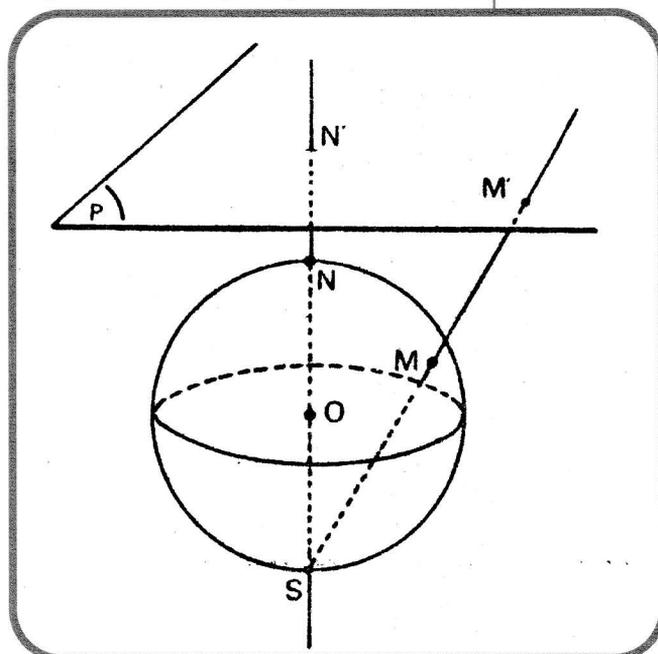
La projection stéréographique est surtout utilisée pour les cartes des régions polaires, auquel cas les méridiens sont des droites concourantes au pôle (le point I à partir duquel s'effectue la projection est le pôle opposé) et les parallèles sont des cercles concentriques.

L'image du plus court chemin entre deux points A et B (il s'agit de Lima et Sydney dans cet exemple) est le cercle tracé en trait épais. Pour construire ce cercle, on construit le tri-

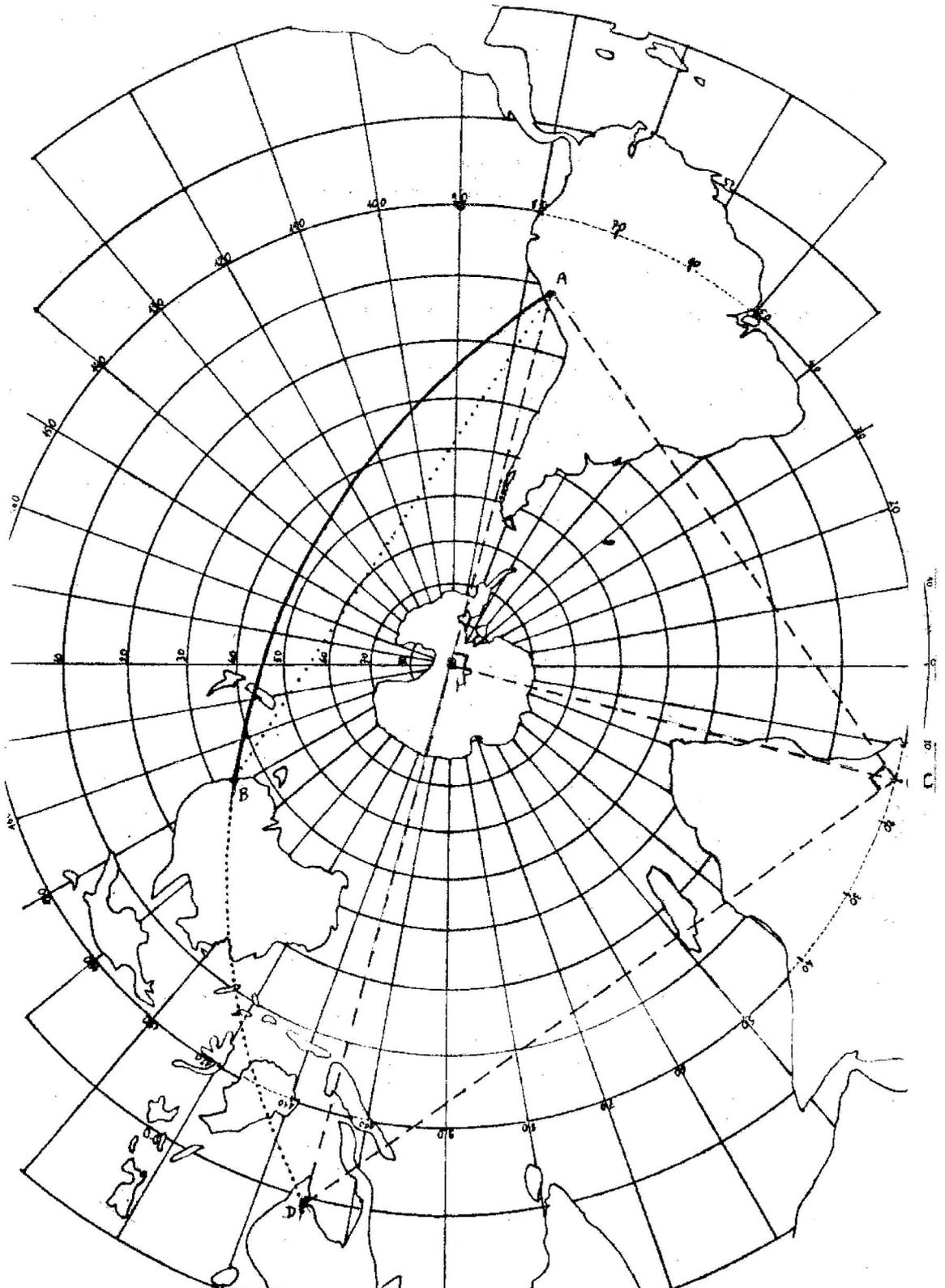


### Canevas pour une projection stéréographique de 15° en 15°

angle rectangle APC où P est le pôle et C se trouve sur l'équateur, puis le triangle rectangle ACD où D est aligné avec A et P. Le cercle passant par A, B et D est l'image du grand cercle passant par Lima et Sydney.



carte stéréographique



# Le théorème des 4 couleurs

Darche & C° - Orléans

## La preuve et l'ordinateur

En 1852, alors qu'il coloriait une carte géographique, le jeune mathématicien anglais Francis Guthrie réalisa que quatre couleurs suffisaient pour colorier une carte tout en satisfaisant au critère des frontières : deux pays ayant une frontière commune doivent être de couleurs différentes. Il conjectura que ceci est vrai pour toute carte réelle ou imaginaire comme celles présentées ici.

Il fallut plus d'un siècle avant que la "théorème des 4 couleurs" soit prouvé.

La démonstration faite par Appel et Haken en 1976 a déclenché une controverse inédite à cette époque : la démonstration a nécessité pour la première fois de lourds calculs d'ordinateur.

Le nombre de cartes à vérifier était, même après réduction par la théorie des graphes, si important que le travail de coloriage ne pouvait être fait "à la main".

Pour prouver que le "théorème" était vrai, il a fallu, pour la première fois, démontrer aussi que le programme de calcul informatique utilisé était lui aussi correct et que l'ordinateur utilisé travaillait correctement (sans erreur).

Comme nous l'avons utilisé pour la carte d'Europe, vous pouvez illustrer le théorème des 4 couleurs sur la carte de France avec ses régions ou ses départements, la carte d'Afrique ou toute autre carte.

Vous pouvez aussi rechercher des stratégies permettant de bien colorier une telle carte.



Ce célèbre problème montre ce qu'est réellement la recherche mathématique.

Ce n'est pas seulement un outil de calcul ou de gestion des nombres mais aussi et surtout l'objet de mise en place de systèmes de preuves toujours plus complexes.

Essayez de colorier cette carte en respectant les règles de coloriage.

## Le problème et son histoire

Combien faut-il de couleurs pour colorier une carte de géographie de façon à ce que deux pays voisins ne soient jamais de la même couleur ?

- Deux pays sont voisins lorsqu'ils ont une frontière commune (une ligne). On écarte ainsi la disposition en parts de gâteau où il faut autant de couleurs que de pays.
- Chaque pays est en un seul morceau. On écarte donc les enclaves. Mais on peut parfois s'attaquer à ce cas (exemple de la Russie aujourd'hui).

Ce texte est une réécriture des textes du Plot n° 44 auquel avaient contribué Jean-François Canet (Avignon) et Jean Lefort (Wintzenheim).

Le problème est connu, semble-t-il, depuis fort longtemps. Il a été formulé en 1852 par Francis Guthrie dans une lettre à son frère Frédéric qui était élève du mathématicien De Morgan. Le problème est présenté à la société mathématique de Londres par Cayley en 1878.

Un avocat, Alfred Bray Kempe, membre de l'honorable société, propose une solution moins d'un an plus tard. En 1890, Heawood établit l'inexactitude de la solution de Kempe. Il généralise le problème à des cartes dessinées sur des surfaces plus compliquées (sur des tores par exemple) et démontre que pour colorier une carte dessinée sur une surface autre que la sphère ou le plan il faut au plus  $H(c)$  couleurs avec:

$$H(c) = E[(7 + \sqrt{49 - 24C}) / 2]$$

où  $E$  désigne la fonction partie entière et  $C$  la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface ( $C = 0$  pour un tore à un trou ;  $C = 2$  pour le plan ou la sphère...). Il pensait que  $H(c)$  était le nombre exact de couleurs nécessaires.

Cette conjecture est vraie pour le tore à un trou, fautive pour la bouteille de Klein (Problème résolu en 1968 par Ringel et Youngs).

Depuis Kempe et Heawood, nombreux furent les mathématiciens amateurs ou professionnels qui s'intéressèrent au théorème et plusieurs résultats furent obtenus (on démontra successivement que le théorème était vrai pour des cartes comptant moins de 22 pays, puis 36,...).

Enfin en 1976 Kenneth Appel et Wolfgang Haken démontrent à l'aide d'ordinateurs le théorème des quatre couleurs.

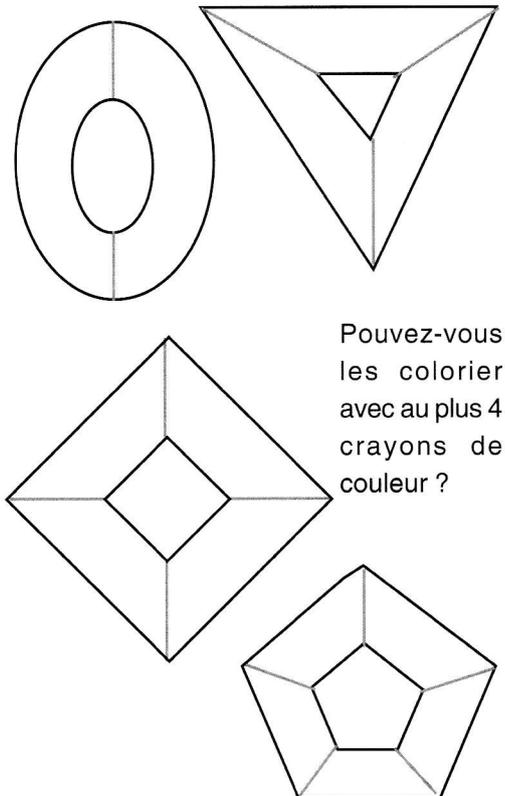
### La démonstration

Kempe a essayé de démontrer le théorème par l'absurde. Il définit une carte normale comme étant une carte dans laquelle:

- aucun pays n'entoure entièrement d'autres pays,
- en aucun point, plus de trois pays se rencontrent. Il établit que, s'il existe une carte pentachromatique (c'est-à-dire nécessitant cinq couleurs pour être coloriée), alors il existe une carte normale pentachromatique. Toutes les recherches seront alors faites sur des cartes normales.

Kempe établit alors que sur une carte normale il existe au moins un pays ayant moins de six voisins.

Ce qui revient à dire qu'une des quatre configurations : pays avec deux voisins, pays avec trois voisins, pays avec quatre voisins, pays avec cinq voisins est inévitable.



Pouvez-vous les colorier avec au plus 4 crayons de couleur ?

Pour obtenir une contradiction, Kempe essaya de démontrer qu'une carte pentachromatique minimale (c'est-à-dire ayant un nombre minimum de pays) ne pouvait contenir aucune des quatre configurations. Sa démonstration était correcte pour les trois premières configurations mais inexacte pour la quatrième.

Appel et Hankel reprirent l'idée de la démonstration, mais en étudiant un système d'environ 1500 configurations inévitables. Le travail nécessita environ 1200 heures de calcul sur trois puissants ordinateurs de l'université de l'Illinois. En fait dans l'étude, chaque pays est remplacé par un point (sa capitale). Deux pays voisins ont leur capitale reliée par un chemin. La carte devient alors un graphe. Colorier la carte revient à colorier chaque sommet du graphe. Une carte normale correspond à un graphe dont chaque face est un triangle.

### Un bon théorème ?

On s'interroge souvent sur la valeur "bonne" ou "mauvaise" des questions que se posent les mathématiciens.

Celle des 4 couleurs est souvent citée comme exemple de "mauvaise question". On attache à "bonne question, bon problème", une question posée, pas nécessairement encore résolue, mais qui a déjà fait la preuve de sa capacité à créer de nouveaux concepts, de nouveaux résultats mathématiques.

À cet égard, le "dernier théorème de Fermat" est, était déjà un bon problème bien avant d'être résolu par David Willes. La recherche de sa preuve

a en effet, dès la naissance de la conjecture, fourni de nombreux résultats, en particulier les idéaux.

De nombreux mathématiciens donnent le théorème des 4 couleurs comme exemple de mauvais problème car, en dehors de l'aspect "utilisation de l'ordinateur", il n'a pas apporté d'autres fruits

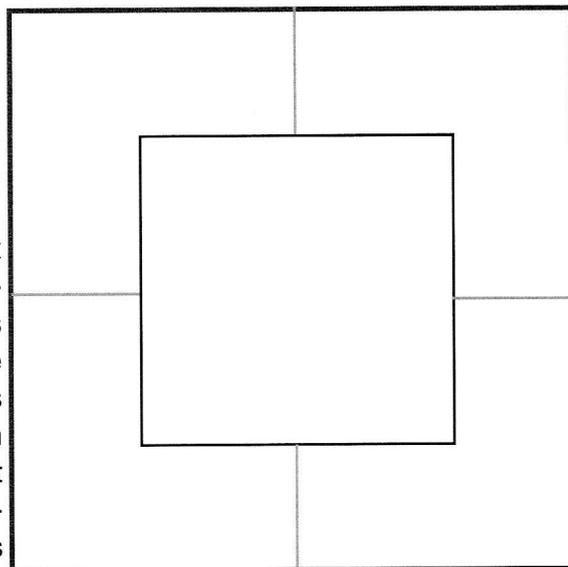
à la connaissance mathématique ou scientifique.

Certains diront que ce n'est déjà pas si mal. D'autres rajouteront que l'aspect "algorithme de coloriage" (voir plus loin) qui reste malgré tout en suspens peut encore donner de beaux jours au théorème.

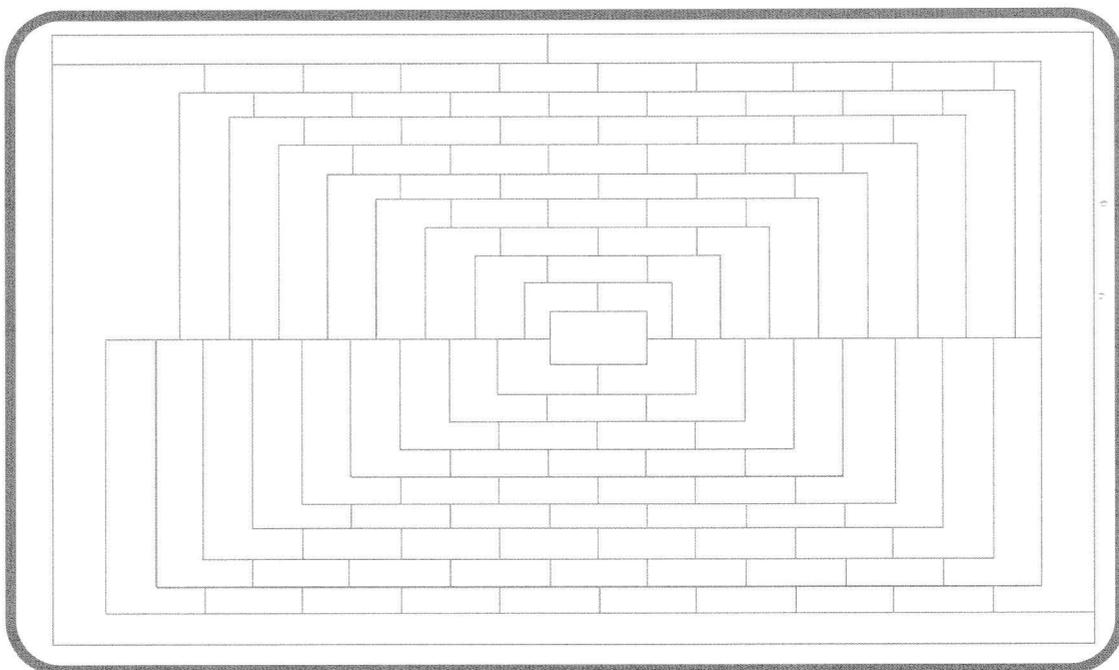
Davis et Hersh (cf bibliographie) ont exprimé l'opinion de beaucoup de mathématiciens au moment de l'annonce de la démonstration:

*"Ma première réaction fut : Formidable ! Mais comment ont-ils fait ? J'attendais quelque intuition géniale, une démonstration dont l'idée centrale serait d'une élégance capable d'ensoleiller ma journée. Lorsque je connus la réponse, le fait qu'ils avaient simplement découpé la difficulté en des milliers de morceaux, pour les faire tous examiner par l'ordinateur l'un après l'autre, je fus totalement déconcerté, et ma réaction fut : si c'est cela, alors ce n'était pas vraiment un bon problème."*

Davis et Hersh formulent une autre remarque : *"Pour le philosophe il y a une énorme différence entre une démonstration qui repose sur la fiabilité d'une machine, et une qui ne dépend que du*



Combien de couleurs au minimum ?



Encore un bel exercice de coloriage !

*raisonnement humain. Pour le mathématicien, la faillibilité de la raison est un fait tellement banal qu'il est heureux de trouver dans l'ordinateur une sécurité de calcul qu'il ne peut égaler."*

**L'algorithme des ...  
6 couleurs !!!**

**Un jeu de coloriage !**

Le Jeu : Choisissez une carte représentant des pays. Deux joueurs jouent, plaçant à tour de rôle une couleur de leur choix sur un pays non encore colorié. Une même couleur ne peut être attribuée à deux pays ayant une frontière commune.

Gagne celui qui, à la fin du jeu, a utilisé le moins de couleurs. Le jeu peut se jouer à un, deux ou trois joueurs. Jean Lefort (Wintzenheim) décrit ci-après l'algorithme qui permet au joueur solitaire ne n'utiliser que six couleurs.

**Théorème:** chaque pays a, en moyenne, moins de six pays voisins.

Le nombre  $V_i$  de voisins d'un pays est égal au nombre d'arêtes qui bordent ce pays. Comme chaque arête est frontière de deux pays, on a :  $\sum V_i = 2a$ , a désignant le nombre total

d'arêtes d'où la moyenne  $m = 2a / f$  où f désigne le nombre de pays.

La relation d'Euler-Poincaré liant sommets (s), arêtes (a) et faces (f) d'un graphe planaire étant la suivante :

$$s + f = a + 2$$

soit encore  $s / a + f / a = 1 + 2 / a$   
On obtient pour la moyenne des pays frontaliers : (1)  $s/a + 2/m = 1 + 2/a$ .

Mais en chaque sommet arrivent au moins 3 arêtes et chaque arête joint exactement 2 sommets donc:  $3s \leq 2a$  en reportant dans (1), la relation devient:

$$2/3 + 2/m \geq 1 + 2/a$$

d'où, tous calculs faits :  $m \leq 6 - 36/(a+6) < 6$

Dans une carte plane, il y a nécessairement au moins un pays qui a strictement moins de 6 voisins.

Soit  $P_1$  l'un de ces pays, annexons-le à l'un de ses voisins.

Sur la nouvelle carte, à nouveau, un pays a moins de 6 voisins. Notons-le  $P_2$  et annexons-le à l'un de ses voisins, et répétons le processus...

On arrive ainsi à une carte de 5 pays qu'il est facile de colorier avec 5 couleurs.

Puis on rend leur "indépendance" aux pays annexés, dans l'ordre inverse de leur annexion. On utilise la sixième couleur pour le pays  $P_n$ .

Pour le pays  $P_{n-1}$ , comme il a au plus 5 voisins, il y a certainement une

couleur libre pour lui parmi les six précédentes... et l'on peut ainsi colorier la carte avec au plus six couleurs différentes !

**L'algorithme est polynomial.**

Au pire, on parcourt les  $p$  pays, puis  $p-1$ , puis  $p-2$ ,...

On a donc un algorithme en  $p^2$ ,  $p$  étant le nombre total de pays.

**Question subsidiaire :**

cela permet-il de trouver une stratégie gagnante avec 6 couleurs quand on joue à deux ?

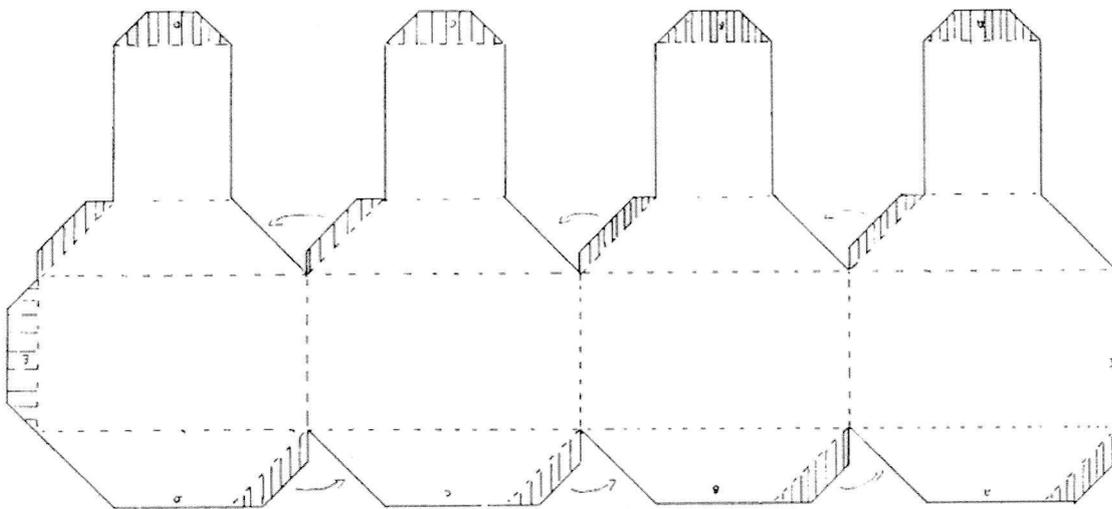
**et 3, et 4, et 5 et ...  
7 couleurs !!!**

Faites une photocopie agrandie de ce patron de tore...polyédrique. Découpez-le et collez les languettes comme indiqué.

Dessinez les frontières comme l'indique le dessin n° 2.

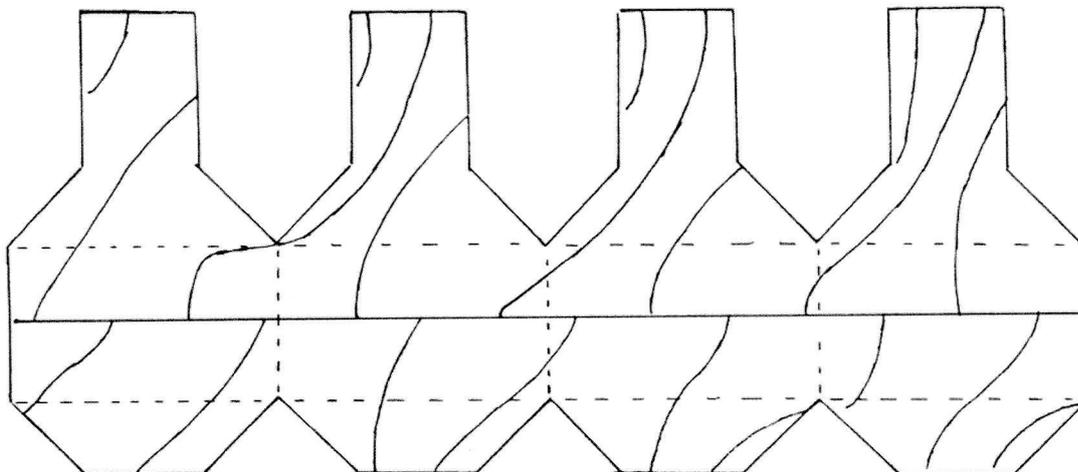
Combien délimitent-elles de pays ?  
Combien faut-il de couleurs au minimum pour les colorier suivant la règle bien connue ?

dessin n°1

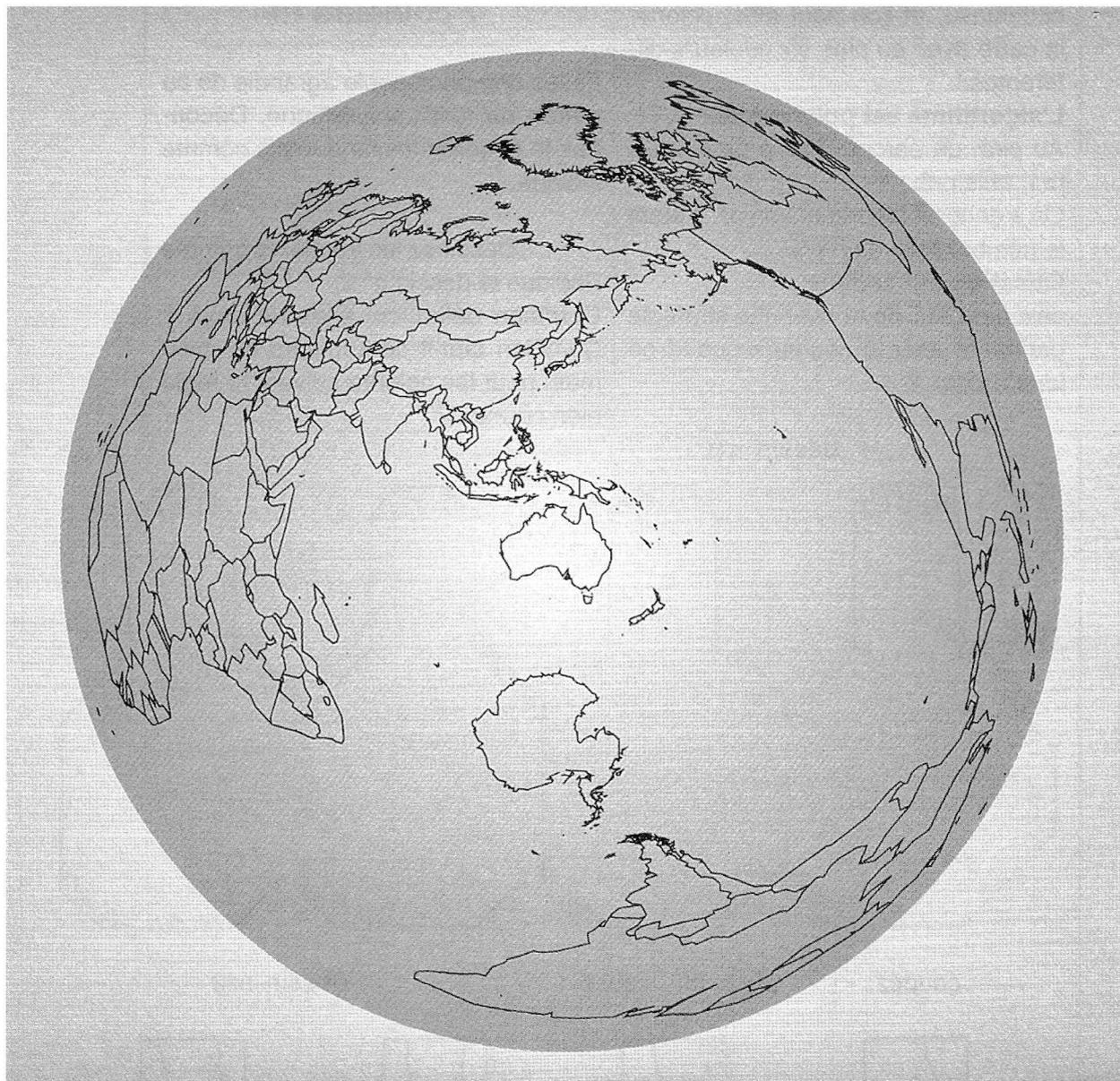


— coupez, - - - pliez, ||||| collez

dessin n°2



## Le disque plat



26

Et la Terre redevient le disque plat des Anciens, bordé par un continent, l'Antarctique.

Depuis le pôle Nord, apparaît le face à face entre l'Amérique et la Russie, éclairant sous un jour nouveau l'opposition entre l'Est et l'Ouest.

### Illustration :

IGN, Institut Géographique National,  
Saint-Mandé, 1999

Projection dite équidistante entre deux points, de type planaire modifié, prise entre les deux points de coordonnées:

- $0^\circ$  de longitude,  $90^\circ$  de latitude
- et
- $180^\circ$  de longitude,  $85^\circ$  de latitude.

Cette projection donne une représentation correcte des distances de l'un des deux points de la carte.

# La géométrie des surfaces

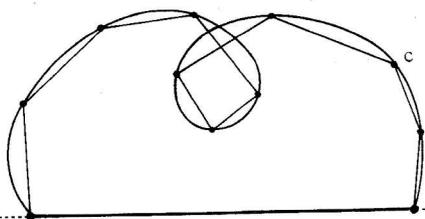
Marcel Berger - Paris

## Grandeurs et insuffisances d'Euclide

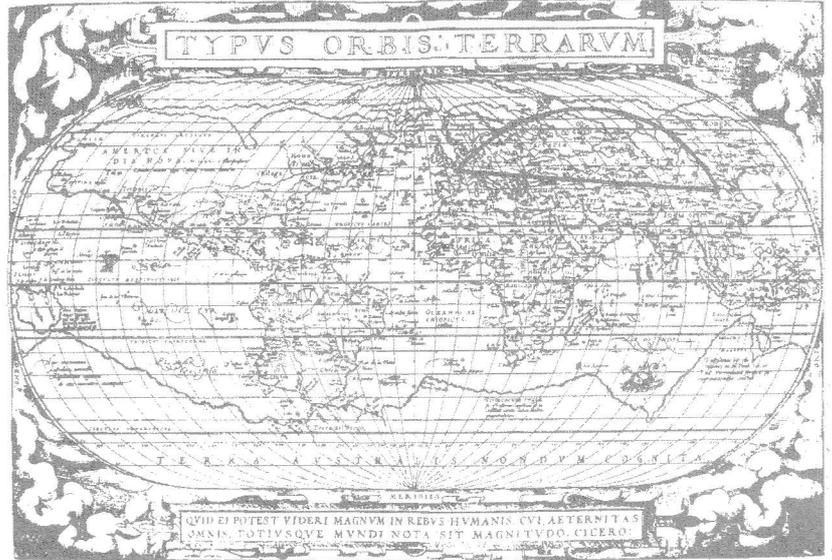
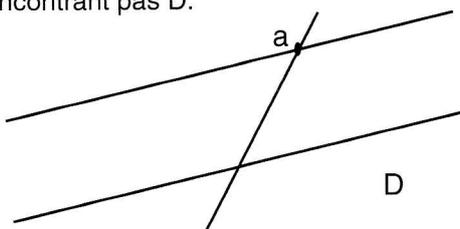
Étymologiquement géométrie veut dire "mesurer la Terre". Celle-ci fut longtemps considérée comme plate et décrite par la géométrie euclidienne classique, celle de  $\mathbb{R}^2$  ou plus généralement de  $\mathbb{R}^n$ .

Le plan euclidien est, entre autres, un espace métrique. Entre deux points le plus court chemin est unique, c'est un segment porté par la droite qui passe par ces deux points, droite unique s'ils sont distincts.

"**Plus court chemin**" veut dire : la longueur d'une courbe est la borne supérieure des lignes polygonales qui y sont inscrites et seule une courbe portée de façon monotone par le segment ayant deux points pour extrémités  $a_1$  et pour longueur leur distance. Notez que si une courbe  $c$  est  $C^1$  par morceaux, sa longueur est alors égale à  $\int |c'(t)| dt$ .



Au tournant XVIII<sup>e</sup>-XIX<sup>e</sup> siècles cette géométrie euclidienne faisait doublement grogner. D'abord par son axiomatique : tout le monde acceptait bien les axiomes d'Euclide à l'exception de son postulat. A savoir : par un point  $a$  extérieur  $A$  une droite  $D$  passe une seule droite ne rencontrant pas  $D$ .



Theatrum orbis terrarum, 1570, B.N. Paris

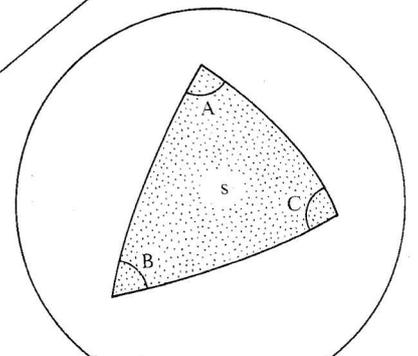
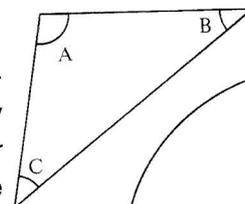
Ensuite parce qu'il existait d'autres géométries, par exemple la géométrie sphérique. Avec une échelle convenable, elle représentait assez bien la Terre. La métrique à considérer sur la sphère n'est pas celle induite  $\mathbb{R}^3$  par mais celle dite intrinsèque, à savoir que la distance entre deux points est la borne inférieure de la longueur des courbes de  $\mathbb{R}^3$  qui ont ces points pour extrémités et sont tracées sur  $S^2$ , la sphère unité: défense de creuser des tunnels, C'est trop cher.

Sur cette figure on a représenté une carte de Mercator ordinaire et dessiné les ellipses des vecteurs de même norme ; on voit bien que les distances dans la carte ne sont pas celles d'Euclide.

**Ce plus court chemin** est unique si les deux points ne sont pas aux antipodes, c'est l'arc de grand cercle qui les joint. Mentionnons enfin la formule d'A. Girard (1625) : la surface  $s$  d'un triangle de  $S^2$  dont les angles aux sommets sont  $A, B, C$  est égale à :

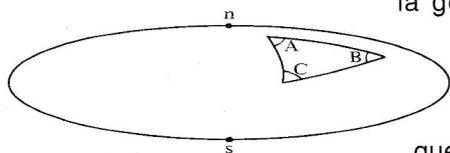
$$s = A + B + C - \Pi$$

En particulier,  $A + B + C > \pi$  pour tout triangle. Il y avait là matière à réfléchir car il était connu à l'époque que le postulat d'Euclide était équivalent au fait que la somme des angles d'un triangle vaille exactement  $\Pi$ .



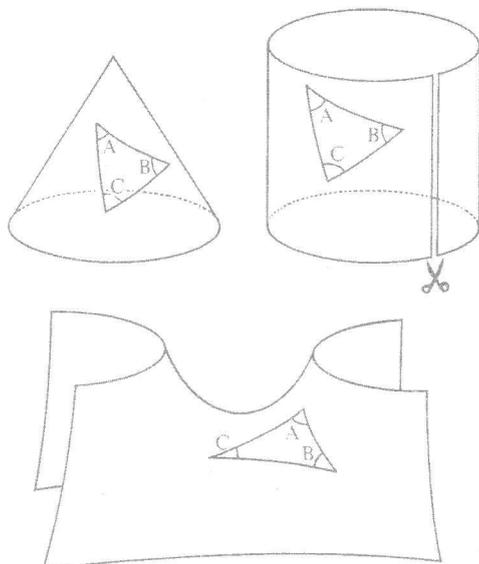
### Les désirs de Gauss

Gauss semble avoir été doublement motivé. Dès l'âge de 15 ans (en 1784), il étudiait en effet l'axiomatique de la géométrie. De 1812 à 1816, il eut à faire de la géodésie. Il la voulut plus précise que ses prédécesseurs ; c'est-à-dire sur l'ellipsoïde de révolution aplati qui représente assez bien notre Terre. D'où des problèmes de plus court chemin sur une telle surface, de "trigonométrie" : calculer les éléments d'un triangle lorsque l'on en connaît trois. Par exemple, deux côtés et l'angle compris. Et que vaut sur un ellipsoïde  $A + B + C - \Pi$  ?



En bref, Gauss voulait comprendre la géométrie intrinsèque des surfaces, indépendamment de leur situation dans  $\mathbf{R}^3$ . En effet, cette métrique intrinsèque peut être la même pour des surfaces différentes .

Par exemple un cylindre, un cône et plus généralement les surfaces développables ont une géométrie intrinsèque qui est la même que celle de  $\mathbf{R}^2$  (au moins localement, comme on peut s'en rendre compte en ouvrant le cône ou le cylindre



avec une paire de ciseaux et en l'étalant sur le plan  $\mathbf{R}^2$ . Par contre, essayez donc avec  $\mathbf{S}^2$ . La somme des angles d'un triangle simplement connexe y vaut toujours  $\Pi$ . Alors que pour un paraboloïde hyperbolique on a toujours au contraire  $A + B + C < \Pi$ .

Mieux, on peut construire les étapes d'une déformation continue de surfaces qui ont même géométrie intrinsèque (on dit qu'elles sont isométriques) alors qu'elles ne sont évidemment pas congrues, c'est-à-dire déduites par un déplacement. Mieux encore, toutes ces surfaces ont, aux points se correspondant par isométrie, leurs deux rayons de courbure principaux égaux, car il s'agit de surfaces minima.

Avant Gauss, on ne connaissait des surfaces que la notion de rayons de courbure principaux (Euler, Meusnier) et le fait que les plus courts chemins sont portés par des courbes appelées géodésiques, caractérisées par la condition que leur vecteur accélération est normal de la surface considérée (Bernouilli, Euler).

### Ce que Gauss a trouvé (1827)

En bon géodésien, il paramétrisa ses surfaces par des cartes et s'occupa des changements de cartes. Il exprima alors la métrique intrinsèque (dans une carte donnée  $(u,v)$ ) sous la forme

$$E(u,v) du^2 + 2F(u,v) du dv + G(u,v) dv^2$$

La donnée d'un tel  $ds^2$  est équivalente de celle de la métrique intrinsèque.

Puis Gauss introduisit un invariant, la courbure  $K$  (dite courbure de Gauss ou courbure totale), qui est une fonction numérique sur la surface. Un des résultats fondamentaux de Gauss donne trois propriétés de  $K$  :

(i)  $K = 1/R_1 \cdot 1/R_2$ , le produit des inverses des

rayons de courbures principaux ;  
 (ii) pour un triangle  $T$  de la surface, on a toujours  $A+B+C-\Pi = \int_T K(m) dm$  où la mesure  $dm$  est l'aire de la surface à savoir  $\sqrt{EG - F^2} du dv$  dans une carte  $(u, v)$   
 (iii) dans une carte  $(u, v)$  on a  
 $E_u = \partial E / \partial u$ ,  $E_{vv} = \partial^2 E / \partial v^2$ , etc ...  
 L'équivalence entre (i) et (iii) est le "theorem egregium". Il montre que :  
 $K = 1/R_1 \cdot 1/R_2$  ne dépend en fait pas du plongement de la surface, mais seulement de sa métrique intrinsèque.

La formule de (iii) montre, elle, que  $K$  est calculable, sur la métrique intrinsèque, de façon géométrique. En outre, on y retrouve que, dans un plan euclidien ou une métrique isométrique, comme on a  $K \equiv 0$ , on a  $A + B + C \equiv \Pi$  pour tout triangle.

Et réciproquement, si  $K \equiv 0$ , on est isométrique à la géométrie euclidienne. On peut donc bien dire que  $K$  est l'invariant qui mesure le défaut "d'euclidienneté" de la surface. Aux autres bouts,  $K \equiv 1$  pour la sphère, et l'on retrouve la formule d'A. Girard ; tandis que  $K < 0$  sur un parabolôïde hyperbolique et donc  $A + B + C < \Pi$ .

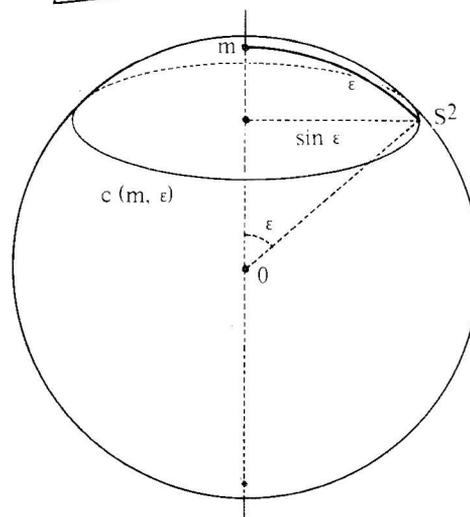
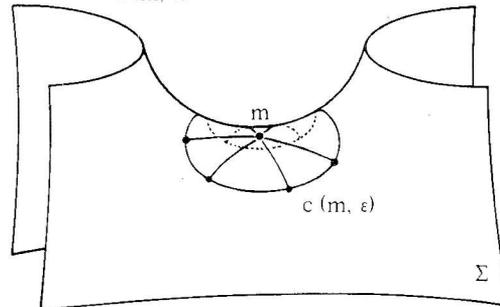
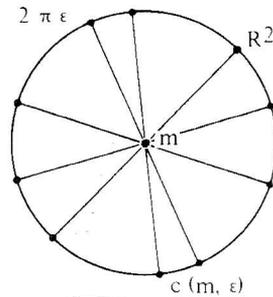
Une formulation plaisante de la découverte de  $K$  par la métrique intrinsèque est due à Diquet.

Dans le plan euclidien la longueur d'un cercle de rayon  $\epsilon$  vaut toujours  $2\Pi\epsilon$ .

Sur une surface  $\Sigma$  on peut parler du cercle  $C(M, \epsilon)$  de centre un point  $m$  de  $\Sigma$  et de rayon  $\epsilon$ . Un habitant de  $\Sigma$  en effet, même ignorant tout du monde extérieur, connaît bien les plus courts chemins par antimathémisme. On a alors :

$$(C(M, \epsilon)) = 2\Pi\epsilon \cdot (1 - K(m)\epsilon^2/6 + o(\epsilon^2)).$$

Par exemple, cette longueur est supérieure à  $2\Pi\epsilon$ , le parabolôïde hyperbolique, tandis qu'elle est plus petite sur  $S^2$ . En fait, on la connaît : c'est  $2\Pi \sin \epsilon$  et comme  $\sin \epsilon = \epsilon - \epsilon^3/6 + o(\epsilon^3)$ , on retrouve bien que  $K \equiv 1$  pour la sphère.



### Les fondements de la géométrie selon Riemann (1854)

Gauss nous laissait sur notre faim pour au moins deux raisons.

D'une part, on ne peut se contenter de géométrie plane. De même que la géométrie intrinsèque des surfaces est une généralisation de celle de  $R^2$ , il faut certainement généraliser la géométrie de  $R^3$ .

D'autre part, même en géométrie plane une grogne légère subsistait: on avait découvert la géométrie hyperbolique plane mais elle était mal fondée. Et pour cause, car elle ne peut jamais être réalisée complètement par une surface de  $R^3$ . Le but de Riemann, c'était de savoir ce qu'est une géométrie.

Pour Riemann une géométrie plane c'est un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et sur  $U$  un  $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$  où  $E, F, G$  sont des fonctions sur  $U$  et la forme quadratique associée doit être définie positive en chaque point  $(u, v)$  de  $U$ .

La métrique est définie comme la borne inférieure de la longueur des courbes (joignant les deux points considérés), la longueur elle-même des courbes étant par définition  $\int ||c'(t)|| dt$ .

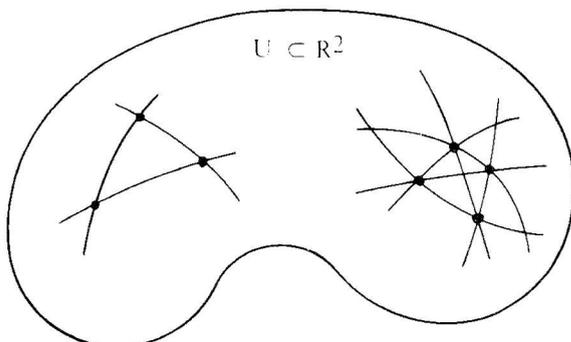
**Moralité** : une géométrie plane, c'est un continuum deux dimensions muni en chaque point d'une structure infinitésimalement euclidienne. C'est un retournement complet de mentalité.

Maintenant l'extension en dimension quelconque est automatique ; sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$  entier quelconque, on définira un  $ds^2$  par :

$$ds^2 = \sum g_{ij}(x_1, \dots, x_n) dx_i dx_j$$

où la forme quadratique que définissent les fonctions  $g_{ij}$  doit être partout définie positive. En fait, c'est une structure euclidienne sur l'espace tangent à  $U$  au point considéré.

Pour les variétés de Riemann le problème des plus courts chemins est résolu, au moins localement. Ces plus courts chemins sont portés par les géodésiques et par deux points suffisamment voisins, il en passe une et une seule qui réalise le plus court chemin, ainsi qu'il en était en géométrie euclidienne.



Il revenait à Riemann de trouver l'invariant qui généralise en dimension quelconque la courbure  $K$  découverte par Gauss pour le cas  $n = 2$ . La réponse n'est pas un être simple. Riemann découvrit cet animal par un développement limité habile du  $ds^2$ .

On peut toujours annuler les termes du premier ordre : la morale est qu'une variété de Riemann n'a pas de dérivées du premier ordre qui soient significatives. Mais que, par contre, elle en a du second ordre, qui constituent le tenseur de courbure.

Cet animal est, en chaque point, une forme quadrilinéaire  $R(\bullet\bullet, \bullet\bullet, \bullet\bullet, \bullet\bullet)$  qui est antisymétrique en les deux premiers indices, antisymétrique en les deux derniers, symétrique en ces deux paires et satisfait aussi l'identité de Jacobi pour les trois premiers indices.

Même en dimension 4 ce tenseur de courbure n'est pas complètement compris.

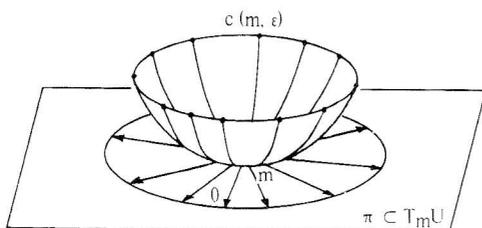
Riemann avait procédé ainsi. Il prenait pour coordonnées des coordonnées orthonormées telles que toutes les géodésiques issues de l'origine soient des droites pour ces coordonnées. Alors, par un calcul utilisant l'équation des géodésiques, il montrait que le développement de Taylor de la métrique était nécessairement de la forme.

$$ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2 + \sum_{i,j,k,h} (?) (x_i dx_j - x_j dx_i)(x_k dx_h - x_h dx_k) + \dots + \alpha(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

Remarquons ici que  $R$  n'a guère de sens quand  $n = 1$  : il n'y a pas de géométrie riemannienne en dimension 1 car, comme on l'a remarqué plus haut, toutes ces courbes sont localement isométriques entre elles.

Et si  $n = 2$ , comme  $\mathbb{R}^2$  est de dimension 1, on voit que la forme quadrilinéaire  $R$  s'identifie à un scalaire (la courbure de Gauss).

Les identités que satisfait R montrent que K détermine R par polarisation.



De même qu'en dimension 2, pour tout n la courbure (R ou K) mesure bien le défaut d'euclydienneté de  $(U, ds^2)$ .

Car  $K \equiv 0$  entraîne que la variété de Riemann considérée est localement isométrique à l'espace euclidien  $R^n$ . Plus généralement les continus de Riemann où K est une constante k sont nécessairement, localement du moins, les sphères si  $k > 0$  et les espaces hyperboliques si  $k < 0$ .

Globalement un résultat de base est que, pour tout k réel, il existe (A une isométrie près) une et une seule variété riemannienne simplement connexe et à courbure sectionnelle constant égale à k, que l'on peut dénoter par  $S^n(k)$ . C'est la sphère de rayon  $1/\sqrt{k}$  si  $k > 0$ , l'espace euclidien si  $k = 0$  et l'espace hyperbolique donné par la formule de Riemann citée plus haut. Il est capital, comme on le verra plus loin, de disposer ainsi d'une famille indexée exactement par les réels, comme espaces de comparaison.

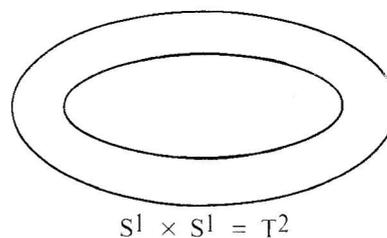
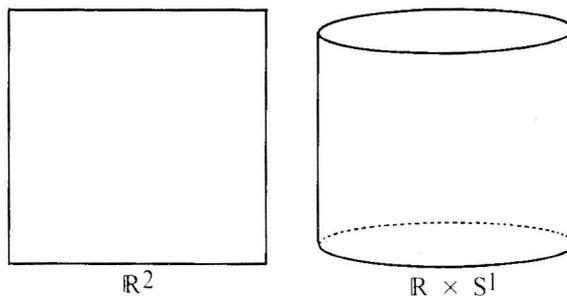
**Ce qu'il fallait faire après Riemann**

Riemann ne faisait que du local. Pour faire du global, il faut d'abord bien définir un continuum à n dimensions. C'est la notion de variété différentielle (de dimension n), terminée avec Whitney après H. Weyl et Elie Cartan entre autres.

Sur une telle variété M rappelons que l'on peut parler de fonctions numériques  $C^\infty$ , de vecteurs et d'espace tangents, de différentielle (dérivée première) d'une fonction, de tenseurs et en particulier de formes différentielles extérieures.

Par contre, il n'existe pas de dérivées seconde, troisième ... d'une fonction ; en effet, contrairement au cas de la dérivée première, les dérivées ultérieures dépendent de la carte choisie. De même, on ne peut pas dériver des champs de vecteurs ni des tenseurs.

La notion de variété abstraite permet de bien distinguer entre une variété et ses quotients. Par exemple entre la sphère  $S^n$  et son quotient par l'antipodie - l'espace projectif réel  $R.P^n$ . Entre  $R^n$  et les cylindres  $S^1 \times \dots \times S^1 \times R^{n-k}$  qui aboutissent au tore  $T^n = R^n/Z^n$ .



Une variété riemannienne sera maintenant la donnée d'une variété différentielle M munie, sur chacun de ses espaces tangents  $T_m M$ , d'une structure euclidienne  $g_m$ . (i.e. une forme quadratique définie positive et bien sûr, la correspondance  $m \rightarrow g_m$  devra être  $C^\infty$ ). On peut noter  $(M, g)$  une telle variété riemannienne.

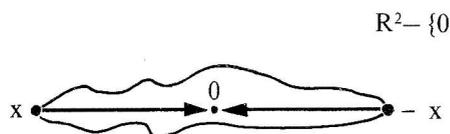
La première question globale concerne la métrique, toujours définie comme la borne inférieure de la longueur des courbes joignant deux points.

A savoir : étant donné deux points  $m, n$  inclus dans  $M$ , *existe-t-il toujours un plus court chemin de  $m$  à  $n$  ?*

On sait que ces plus courts chemins sont portés par les géodésiques, des courbes de  $M$  dont il existe une et une seule ayant une origine et un vecteur vitesse initiale donnés.

Mais en général, il n'y a aucune raison que ces géodésiques, régies par une équation différentielle du second ordre mais non linéaire, soient définies jusqu'à l'infini.

On va voir que ce fait est lié à ce que la réponse à la question ci-dessus est en général *non* : dans  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  (l'origine ôtée) deux points comme  $x$  et  $-x$  ne sont jamais joints par un plus court chemin. Plus généralement, ceci arrivera dès que l'on trouve une "bonne" variété.



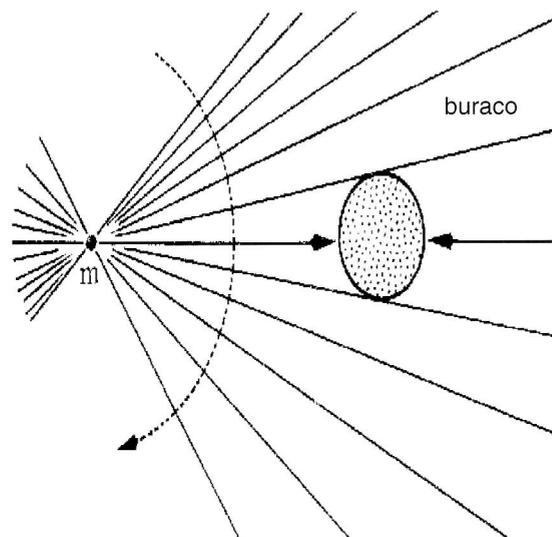
En fait, la question dépend non seulement de la variété mais de la métrique riemannienne qu'elle porte. Par exemple, le cylindre  $\mathbb{R} \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$  donne une réponse positive à la question, tandis que la même variété en donne une négative.

La réponse finale est donnée par le théorème de H. Hopf-Rinow (1931) : - il y a équivalence pour une  $(M, g)$  entre:

- (i) les géodésiques issues d'un point  $m \in M$  sont définies jusqu'à l'infini ;
- (ii) toutes les géodésiques sont définies jusqu'à l'infini ;
- (iii) la métrique est complète.

En outre, l'une quelconque de ces conditions entraîne que : deux points quelconques de  $M$  sont joints par un plus court chemin. Mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montre un disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Par contre dès que  $m$  est une variété compacte, elle sera toujours complète. Dans toute la suite, on ne considérera que des variétés riemanniennes complètes.

Le fait que (i) entraîne (iii) est la mise en forme de l'idée intuitive que le balayage de  $M$  par les géodésiques infinies issues d'un point fixe  $m$  empêche l'existence de trous :



Quant à la question de l'*unicité* du plus court chemin, alias la théorie du cut-locus, elle est extrêmement difficile et n'est actuellement résolue que dans des cas extrêmement particuliers, comme les sphères canoniques. Sur un ellipsoïde de  $\mathbb{R}^3$ , le résultat est connu mais difficile à démontrer.

# La géométrie hyperboliques

Bernard Ycart - Paris

Cet article, réalisé pour l'exposition **Horizons mathématiques** puis **Maths 2000**, avait pour but de faire partager l'enthousiasme pour quelques beaux résultats et, si possible, de donner envie au lecteur d'en apprendre plus sur ce vaste sujet.

Pendant des siècles, sur la base de la Bible que constituaient les "éléments" d'Euclide (IIIe siècle avant J.-C.), faire de la géométrie a consisté à définir des points, des droites, et à les assembler en suivant une sorte de règle du jeu : un ensemble d'axiomes ou postulats.

Ces axiomes étaient tous basés sur l'intuition sensible d'ailleurs la limite entre ce qui était "l'évidence physique" et simple convention, n'apparaissait pas toujours clairement.

On peut formuler la règle du jeu de la géométrie euclidienne plane de la façon suivante (Hilbert) :

## Axiomes d'incidence

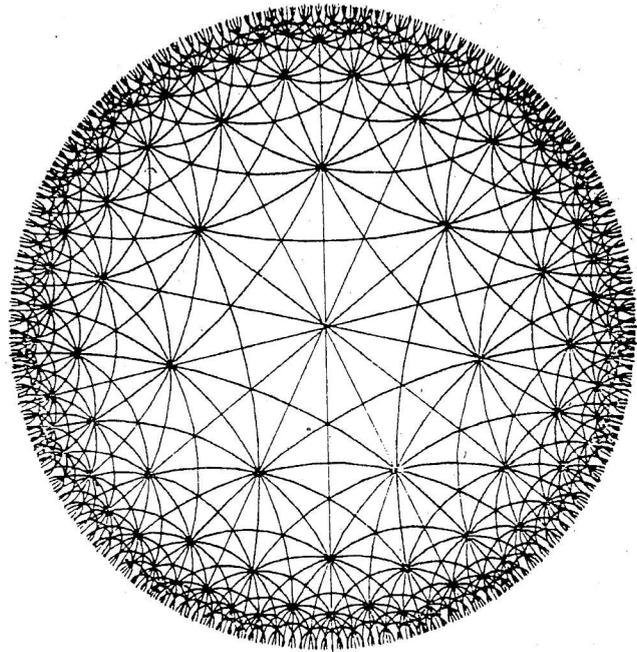
- Deux points appartiennent à une droite et une seule.
- Toute droite contient au moins trois points.
- Il existe au moins trois points non alignés.

## Axiomes d'ordre

- Si trois points sont alignés, un et un seul est entre les deux autres.
- Soient A et B deux points de la droite  $\Delta$ , il existe un point C de  $\Delta$  tel que B soit entre A et C.

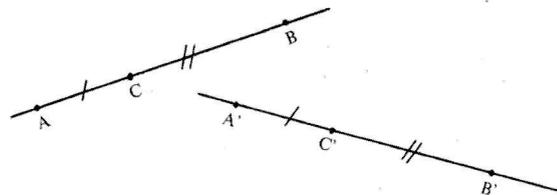


- Soit (A, B, C) un triangle, D un point entre A et B, toute droite  $\Delta$  passant par D coupe l'un des côtés (B, C) ou (A, C).

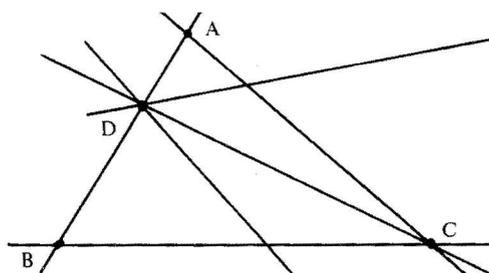


## Axiomes de congruence

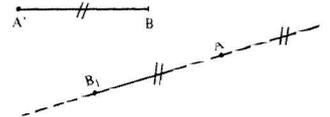
- Si deux segments sont congrus à un troisième, ils sont congrus entre eux. Soit A un point d'une droite  $\Delta$ . Soit (A', B') un segment. Il existe sur  $\Delta$  deux points B<sub>1</sub> et B<sub>2</sub> tels que les segments (A, B<sub>1</sub>), (A, B<sub>2</sub>) et (A', B') soient congrus.

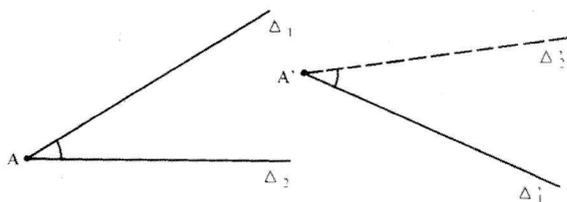


- Soient A, B, C (resp. : A', B', C') trois points d'une droite  $\Delta$  (resp. :  $\Delta'$ ) tels que C soit entre A et B (resp. : C' entre A' et B'). Si (A, B) est congru à (A', B') et (A, C) est congru à (A', C') alors (C, B) est congru à (C', B').

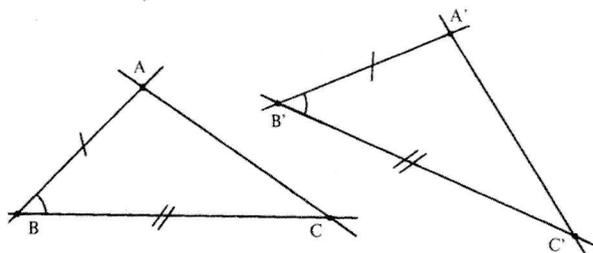


Mosaïque hyperbolique de Christian Léger - Paris



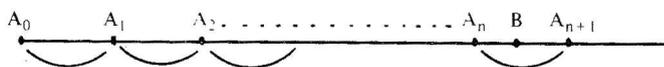


- Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux demi-droites d'origine A. Soit  $\Delta'_1$ , une demi-droite d'origine A'. Il existe une demi-droite  $\Delta'_2$  d'origine A' telle que les angles  $(\Delta_1, \Delta_2)$  et  $(\Delta'_1, \Delta'_2)$  soient congrus.
- Soient  $(A, B, C)$  et  $(A', B', C')$  deux triangles. Si  $[A, B]$  est congru à  $[A', B']$ ,  $[B, C]$  à  $[B', C']$  et l'angle ABC à l'angle  $A'B'C'$ ; alors les deux triangles sont congrus (cas d'égalité des triangles!).



### Axiome d'Archimède

- Soit  $\Delta$  une demi-droite d'origine  $A_0, A_1$  un point de  $\Delta$ . Construisons sur  $\Delta$  les points  $A_2, \dots, A_n, \dots$  tels que pour tout n, le segment  $[A_n, A_{n+1}]$  soit congru au segment  $[A_0, A_1]$ . Pour tout point B de  $\Delta$ , il existe un entier n tel que B soit entre  $A_n$  et  $A_{n+1}$ .



### Axiome d'Euclide

- Soit A une droite A un point n'appartenant pas d A. On peut mener par A une droite et une seule ne rencontrant pas A.

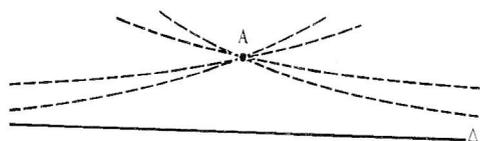


Ce dernier postulat a eu une histoire mouvementée : pendant vingt siècles de nombreux géomètres se sont attachés à le démontrer, c'est-à-dire à le déduire comme un théorème des axiomes précédents. Dans un premier temps, beaucoup ont tenté des démonstrations directes, chacun commençant par montrer en quoi ses prédécesseurs avaient tort, puis fournissant des preuves tout aussi peu convaincantes.

Plus intéressantes pour notre sujet sont des tentatives de démonstrations par l'absurde, apparues dès la fin du XVIIe siècle, notamment chez G. Sacchieri (1667-1733): il s'agissait de supposer vrai un postulat opposé à celui d'Euclide et d'en déduire, si possible, une contradiction.

### Axiome non-Euclide (P)

- Soit  $\Delta$  une droite et A un point n'appartenant pas à  $\Delta$ . On peut mener par A une infinité de droites ne rencontrant pas  $\Delta$ .



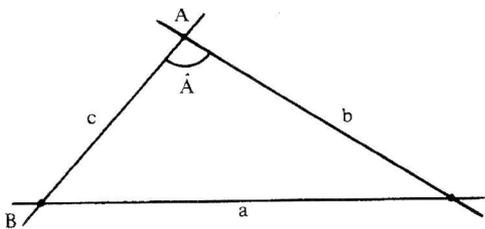
Après de nombreux développements sans contradiction flagrante, Sacchieri concluait néanmoins à la véracité du postulat d'Euclide, par un argument qui tenait plus de la conviction intime que de la rigueur mathématique.

C'est le mérite des mathématiciens du XIXe siècle : Lobachevski, Bolyai et sans doute Gauss, que d'avoir su observer que ces deux postulats sur les parallèles, aucun n'était plus contra-

dictoire que l'autre (1). Il fallait donc désormais les considérer non comme des théorèmes à démontrer, mais bien comme des axiomes dormant chacun naissance de deux géométries différentes. On pouvait dans la nouvelle géométrie dite de Lobachevski, ou hyperbolique, définir une distance, étudier les propriétés des triangles, des cercles, et plus généralement chercher un équivalent à chacun des résultats connus de la géométrie euclidienne.

Voici quelques exemples de formules concernant les triangles :

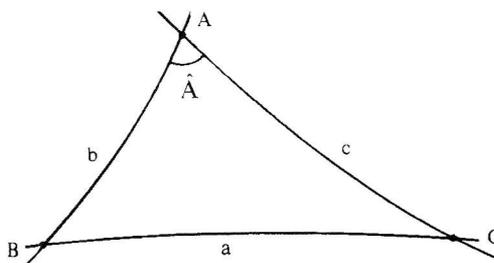
**Géométrie d'Euclide**



$$a / \sin A = b / \sin B = c / \sin C$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

**Géométrie de Lobachevski**



$$\frac{\text{sh } a}{\sin \hat{A}} = \frac{\text{sh } b}{\sin \hat{B}} = \frac{\text{sh } c}{\sin \hat{C}}$$

$$\text{ch } a = \text{ch } b \cdot \text{ch } c - \text{sh } b \cdot \text{sh } c \cdot \cos A.$$

cas particulier (théorème de Pythagore)

$A = \pi/2$  :  $a^2 = b^2 + c^2.$

et  $\text{ch } a = \text{ch } b \text{ ch } c$

(sh et ch désignent les fonctions sinus et cosinus hyperboliques).

On constate, en prenant un développement limité à l'ordre deux des formules nouvelles, que l'on retrouve les premières.

La géométrie d'Euclide apparaît en fait comme un cas particulier de celle des

Lobachevski, le cas de l'infiniment petit.

En d'autres termes, à condition d'être "suffisamment petits", nous pourrions très bien vivre dans un espace de Lobachevski sans nous apercevoir de la différence.

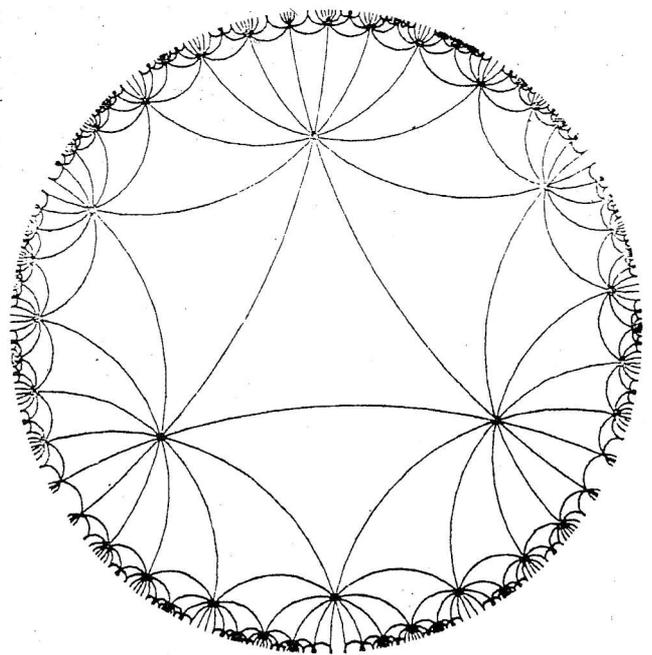
Il existe pourtant des différences fondamentales : la somme des angles d'un triangle euclidien est  $\pi$ , pour un triangle non-euclidien, elle est simplement inférieure à  $\pi$ .

On peut donc espérer une plus grande variété dans les figures de géométrie non euclidienne : il existe par exemple des triangles équilatéraux dont tous les angles valent  $\pi/4$  ou  $\pi/5$ , etc.

Cette diversité est en quelque sorte tempérée par l'absence de similitude : dans le plan euclidien, deux triangles ayant les mêmes angles sont semblables, mais non nécessairement égaux ; alors que deux triangles non euclidiens ayant les mêmes angles sont superposables. Leur aire commune est égale au "déficit angulaire" :

$$\pi - A - B - C.$$

(1) La preuve mathématique de cette affirmation, C'est justement l'existence des mêmes (euclidien, de Poincaré).



Vue sous l'angle historique, la géométrie de Lobachevski semble jusqu'ici n'être qu'une création artificielle née d'un raffinement axiomatique. Il n'en est rien : nous allons voir qu'en fait elle s'introduit de façon tout d fait naturelle en mathématiques.

**Modèles de la géométrie hyperbolique**

En 1872, dans son "Programme d'Erlangen", Félix Klein bouleverse la notion même de géométrie en la rattachant à la théorie des groupes. Une géométrie est désormais l'étude des invariants d'un espace sous l'action transitive d'un groupe donné. C'est en d'autres termes l'étude des propriétés de certaines figures géométriques qui se conservent quand on applique à ces figures les transformations d'un groupe donné.

C'est en ce sens que la géométrie de Lobachevski apparaît naturellement en mathématiques, dans un domaine à priori assez inattendu : l'analyse complexe.

Nous supposons connues dans le plan complexe  $\mathbb{C}$  (identifié à  $\mathbb{R}^2$ ), les notions suivantes : transformation holomorphe, arc de courbe paramétré, intégrale curviligne, angle (non orienté) de deux arcs de courbes différentiables.

Désignons par  $H$  le demi-plan complexe supérieur ouvert

$$H = \{z = x + iy : y > 0\}$$

Un automorphisme complexe de  $H$  est une bijection de  $H$  dans lui-même, holomorphe, dont la réciproque est également holomorphe. L'ensemble de tous

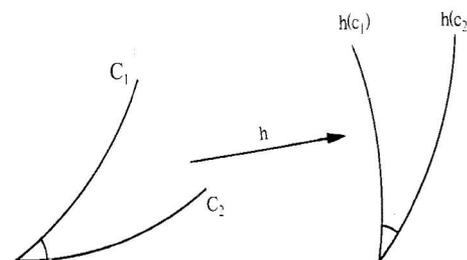
les automorphismes complexes de  $H$ , muni de la composition des applications, forme un groupe  $G$  qu'il est relativement aisé de déterminer ((5), p. 185):

$$G = \{ Z \rightarrow h(z) = (az + b) / (cz + d) : (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, ad - bc = 1 \}$$

Ce groupe est isomorphe au groupe  $SL_2(\mathbb{R})$  des matrices réelles carrées d'ordre 2 et de déterminant 1.

Grâce à l'analyse complexe,  $H$  est donc naturellement muni d'un groupe de transformations. Pour déterminer quelle est la géométrie correspondante, cherchons quels sont les invariants de  $H$  sous l'action de  $G$  (cf. (3), p. 354).

Remarquons tout d'abord que tous les éléments du groupe  $G$  sont des transformations conformes : elles conservent les angles. Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux arcs de courbe différentiables dans  $H$ , de même origine, alors l'angle entre  $h(C_1)$  et  $h(C_2)$  est le même que l'angle entre  $C_1$  et  $C_2$ , pour toute transformation  $h$  de  $G$ .



Soit  $C$  un arc de courbe de classe  $C^1$  inclus dans  $H$ , paramétré par :

$$x = f(t), y = g(t), t \text{ variant de } a \text{ à } b.$$

Considérons l'intégrale :

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}}{g(t)} dt$$

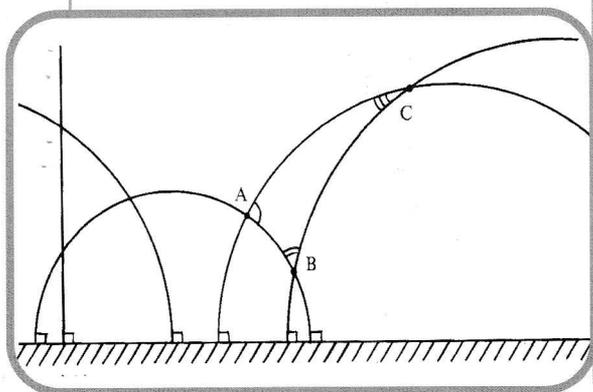
Sa valeur ne dépend pas du paramétrage choisi. On vérifie aisément qu'elle est invariante par toutes les transformations de  $G$ . Nous appellerons "longueur" (non euclidienne) de l'arc de courbe  $C$ , notée  $L(C)$ , la valeur de cette intégrale.

On a  $L(C) = L(h(C))$ ,  $h \in G$ .

Ayant défini une longueur, nous pouvons rechercher les géodésiques (les "droites") de  $H$  pour cette longueur : ce sont les courbes réalisant "le plus court chemin" d'un point à un autre. On peut montrer que parmi les arcs de courbes de  $H$  d'extrémités  $z_0$  et  $z_1$ , celui dont la longueur  $L(C)$  est minimale est l'arc de cercle centré sur l'axe réel passant par  $z_0$  et  $z_1$ , si  $z_0$  et  $z_1$  n'ont pas la même partie réelle, le segment de la demi-droite orthogonale à  $R$  passant par  $z_0$  et  $z_1$  sinon.

Nous appellerons "droite" (non-euclidienne), tout demi-cercle de  $H$  centré sur  $R$ , et toute demi-droite orthogonale à  $R$ . La "distance" de deux points  $z_0$  et  $z_1$  de  $H$  est donc la longueur  $L(C)$  de l'arc  $C$  d'extrémités  $z_0$ ,  $z_1$  tracé sur la "droite" passant par  $z_0$  et  $z_1$ .

Il est bien connu que les applications de  $G$  (homographies) transforment toujours une "droite" ainsi définie en une autre.



Considérons enfin,  $\Omega$  étant un domaine de  $H$ , l'intégrale double

$$\Sigma(\Omega) = \iint_{\Omega} dx dy / y^2, \quad \Omega \text{ dans } H$$

On peut montrer :  $\Sigma(h(\Omega)) = \Sigma(\Omega)$ ,  $h \in G$

C'est donc naturellement la valeur de cette intégrale double que l'on appellera "surface" (non euclidienne) du domaine  $\Omega$ .

Par la manière même dont nous venons de construire les notions d'angle, de droite, de distance et d'aire, le groupe  $G$  s'interprète évidemment comme le groupe des "isométries" de notre nouvelle géométrie. Celle-ci vérifie tous les axiomes de définition de la géométrie de Lobachevski.

Le demi-plan  $H$ , muni du groupe  $G$ , constitue ce qu'on appelle un *modèle* de la géométrie hyperbolique. Celui-ci, dit modèle de Poincaré, présente essentiellement deux avantages :

- On dispose de formules analytiques simples décrivant les isométries de la géométrie hyperbolique.
- On peut désormais, tout comme en géométrie euclidienne, construire des figures de la règle et au compas.

Remarque : il existe bien car d'autres modèles de la géométrie hyperbolique (cf, (2)).

On peut par exemple considérer le disque unité  $U$  de  $C$ , image de  $H$  par la transformation de Cayley :

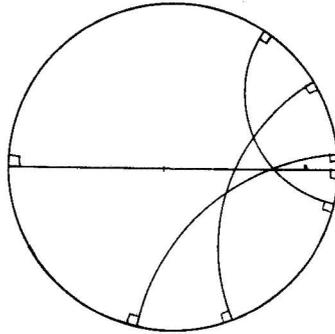
$$z \mapsto (z - i) / (z + i)$$

Le groupe des automorphismes complexes de  $U$  est le suivant

$$G_1 = \{ z \mapsto g(z) = e^{i\theta} (z + \alpha) / (1 + \bar{\alpha} z), \theta \in \mathbb{R}, |\alpha| < 1 \}. \text{ (cf. (5), p. 187).}$$

On peut appliquer à  $U$  et  $G$ , des raisonnements du type précédent pour constater que  $G$ , induit sur  $U$  la géométrie hyperbolique : les "droites" sont

ici les arcs de cercle orthogonaux au cercle unité et les diamètres du cercle unité.



**Petite bibliographie sur les géométries non euclidiennes**

[0] P.J. DAVIDS & R. HERSH L'Univers Mathématiques. Gauthier-Villars, 1985

[1] Ian STEWART - Les mathématiques Pour la Science - Belin, Paris, 1989

[2] M. BERGER - Géométrie - CEDIC, 1977.

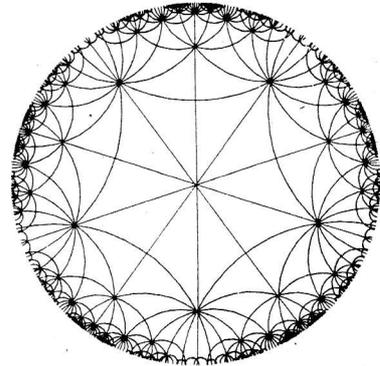
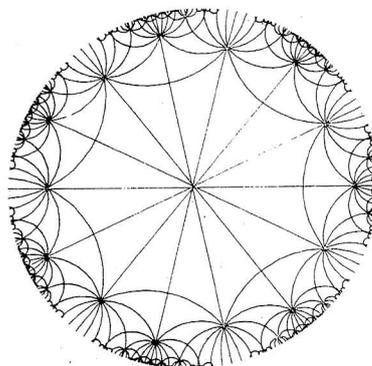
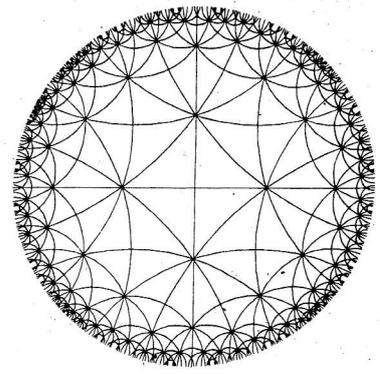
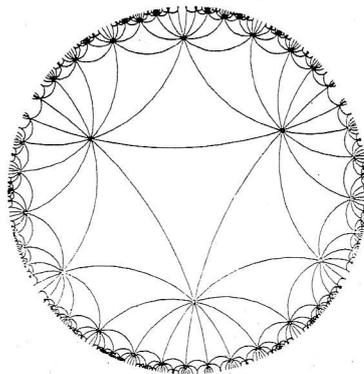
[3] R. DELTHEIL, D. CAIRE - Compléments de géométrie - J.-B. Baillière, Paris, 1950

[4] D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN - Geometry and the imagination - Chelsea, New York, 1952.

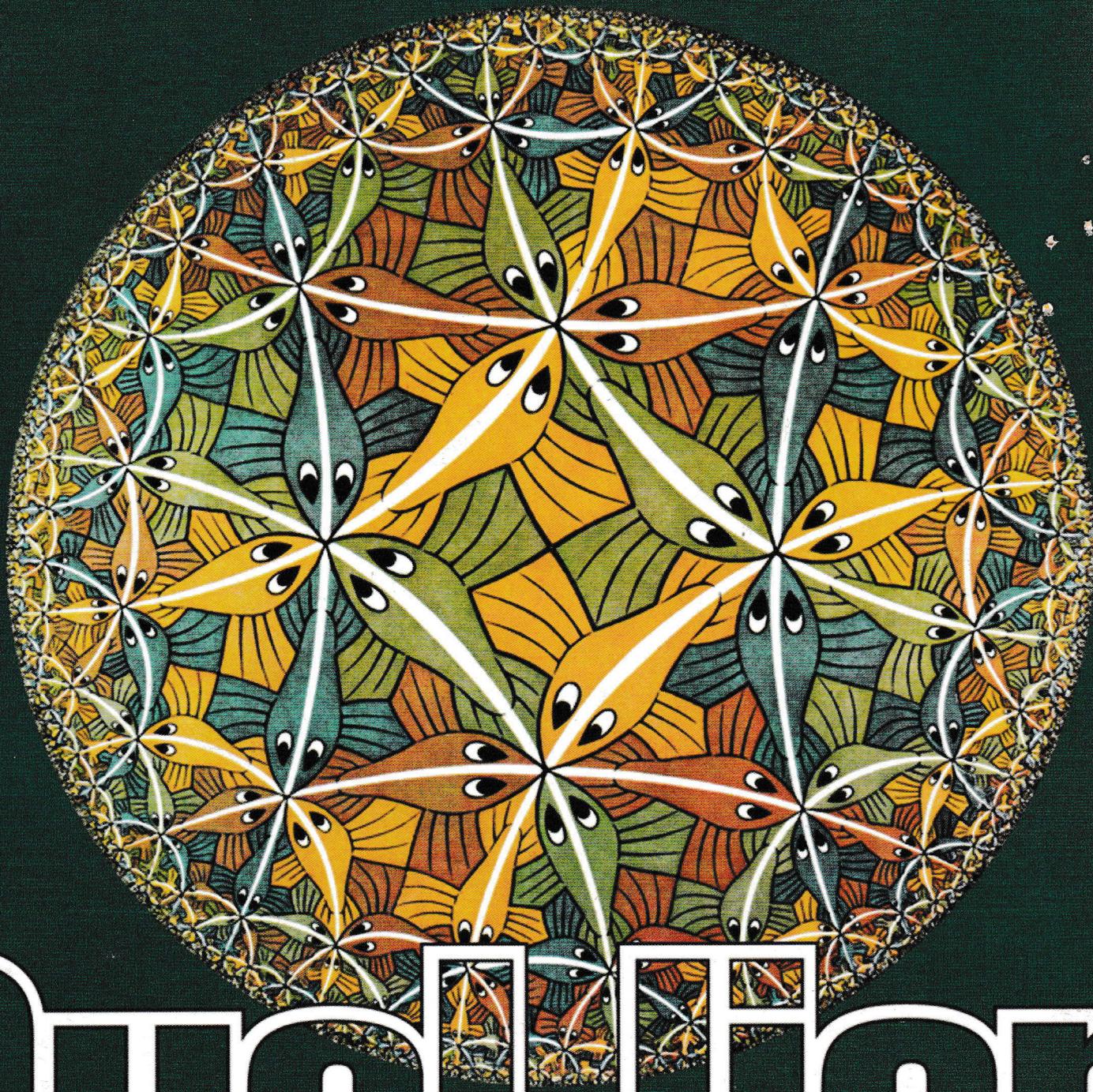
[5] J.-P. PETIT - le géométricon - (BD Belin).

[6] H. CARTAN - Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes - Hermann, Paris, 1961.

[7] Le Monde de M.C. ESCHER - Chêne, Paris, 1972.



Pavages hyperboliques de Christian Léger - Paris



# QU'EST-CE QUE C'EST ?

Y a-t-il entre ce dessin et le Big Bang ?



Escher a réussi à transposer dans cette œuvre une des géométries des espaces courbes qui sous-tend la théorie de la relativité d'Einstein décrivant la naissance et l'évolution de l'Univers.