

PLOT

92

année 2000, numéro trois

Modèles et réalités

Quel lien y a-t-il entre une fougère? et les fluctuations de la Bourse

Regardez bien cette fougère : elle est construite sur la reproduction d'un même motif à des échelles de plus en plus petites.

Une telle structure auto-similaire se retrouve un peu partout, c'est la géométrie fractale.

Elle décrit la forme des choux-fleurs, des nuages, des poumons, des côtes marines, la distribution des galaxies à travers le cosmos, et même la façon dont fluctuent les cours de la bourse.



50 F

automne 2000

Année mondiale des mathématiques
Mathématiques dans la nature



Directrice de publication

Marie-Laure DARCHE-GIORGI

Responsable de la rédaction

Michel DARCHE

Secrétariat

Madeleine SCHLIENGER

Comité de rédaction

Jacques Borowczyk, Daniel Bouté,

Michel Clinard, Gérard Chauvat,

Roger Crépin, Luce Dossat,

Georges Le Nezet, Serge Parpay,

Michel Soufflet, Raymond Torrent.

Abonnements

PLOT-APMEP, IREM- UNIVERSITÉ,

BP 6759 45 067 Orléans-Cedex 2

Prix d'abonnement pour 2000

180 FF pour 4 numéros

Étranger: supplt avion: 50 FF

Photocomposition et maquette

I.C.E.- Limoges

Impression: Fabrègue - St-Yrieix

Éditeur

APMEP d'Orléans - Tours et

ADECUM (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).

Publié avec le concours

du Ministère des Affaires Étrangères.

année mondiale des mathématiques

Sommaire du n° 92

1 - Deux p'tits bouts d'allumath !!!	02
Les allumés des maths	
2 - Simulation de files d'attente	05
d'après Denis Paradis, Montréal	
3 - De l'éthnomathématique	12
Drissa Soro, Abidjan	
4 - Réalité virtuelle, virtuelle réelle	21
Jean-François Colonna, Paris	
5 - Fractales et rugosités	31
Benoît Mandelbrot, Univ. de Yale	
5 - Dimensions fractales	35
Frédéric Vivien, Rouen	
7 - Commandes - Abonnements	39

Éditorial 92

L'année mondiale des mathématiques poursuit son chemin. Des manifestations ont lieu en France (Chambéry, Montpellier, ...) et dans les autres pays (Chili, Egypte, ...).

Le comité international a mis en place un site-portal qui vous permet ensuite de découvrir les expositions d'affiches réalisées dans d'autres pays.

Nous y trouvons une place privilégiée avec les deux séries d'affiches diffusées sur toute la France et dans le monde entier :

Mathématiques dans la nature existe en français, bien sûr, mais aussi en espagnol et en arabe, bientôt en anglais.

Mathématiques dans la vie quotidienne existe aussi en anglais et bientôt en espagnol.

Chacune de ces deux expositions est accompagnée d'une série de douze manipulations interactives.

Trois sites internet vous permettent d'en savoir plus :

<http://wmy2000.math.jussieu.fr>

www.centre-sciences.asso.fr

www.france.diplomatie/culture

/rubrique cinema/documentaires/maths

Prochain numéro : Maths et médecine !

Réabonnez-

vous

pour

l'année

mondiale

des

mathéma-

tiques !

Sortez de l'épure !!!

Deux nouveaux bouts d'allumaths

Par les allumés des maths !!!

Le groupe des allumaths (les "allumés" des mathématiques) réunit quelques professeurs et inspecteurs de mathématiques de l'Académie de Poitiers pour la plupart.

Ils échangent problèmes et solutions sans autre restriction que leur intérêt. Voici deux nouveaux sujets, l'un géométrique, l'autre numérique.

Plot 92 - Situation 1

Plot 92 - Situation 2

Envoyez vos
commentaires à :
Marc Blanchard
39, rue Barbes
17300 Rochefort-sur-Mer

11111111... 33333333...

$$3^2 + 2 = 11$$

$$33^2 + 22 = 1111$$

$$333^2 + 222 = 111111$$

$$3333^2 + 2222 = 11111111$$

$$33333^2 + 22222 = 1111111111$$

...

Comment généraliser ?

$$65^2 - 56^2 = 33^2$$

$$6565^2 - 5656^2 = 3333^2$$

$$656565^2 - 565656^2 = 333333^2$$

$$65656565^2 - 56565656^2 = 33...33^2$$

...

Comment généraliser ?

En dehors de l'épure

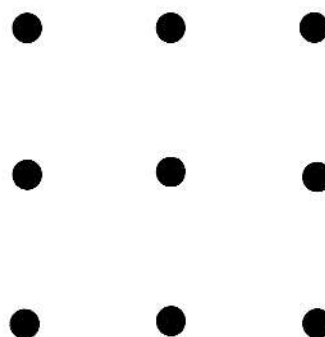
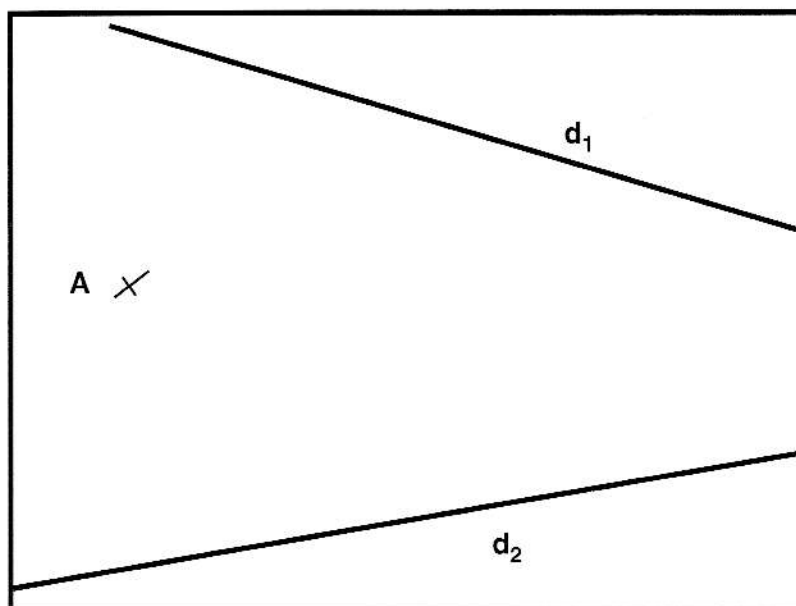
Les droites d et d se coupent en un point O , dehors du cadre.

Comment tracer la droite (OA) sans pouvoir utiliser le point O ?

Autre question :

Comment relier les 9 points ci-dessous par une ligne continue faite de seulement 4 segments ?

2



?

Quel est le pays d'Europe le plus fractal ?

C'est un pays étonnant, aux contours imprécis et poétiques, qui témoignent toujours de la dernière glaciation qui a façonné son relief.

Sur une superficie de 337 000 km², il compte 180 000 lacs de plus de 500 m². C'est la masse glacière qui les a creusés en se retirant vers le nord, il y a 11 000 ans. Le recul du glacier provoqua un lent mouvement tectonique ascendant qui continue encore de nos jours. Le soulèvement de la plaque continentale fait apparaître des îles et des îlots nouveaux le long de ses côtes.

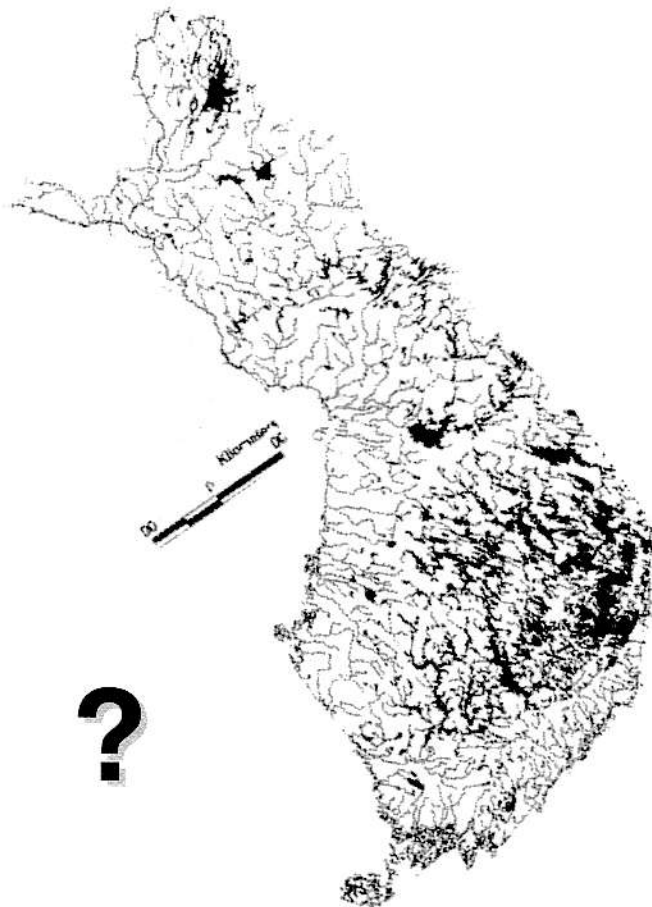
Les eaux territoriales sont déjà ponctuées d'environ 81 000 îles de plus de 100 m². Le nombre des composantes connexes du pays, au sens de la topologie élémentaire, augmente-t-il ? Difficile à dire, la superficie du pays augmente de 7 km² gagnés sur la mer tous les ans.

Mais le pays n'est pas simplement connexe. Il y a des milliers de lacs, des milliers d'îles dans les lacs et, pour confondre le topologue, il existe des îles qui contiennent des lacs et parfois il y a même des îles dans ces lacs-là ! Pour décrire une telle géométrie, on a pensé aux fractales.

Personne n'ignore plus ces objets mathématiques, introduits par Mandelbrot, qui apparaissent souvent comme des frontières. On en trouve quand on ne peut définir une frontière claire et nette entre deux ensembles de forme compliquée, comme celle entre les eaux et les terres de ce pays.

Peut-on modéliser un pays à l'aide de fractales ?

Pour caractériser des objets qui peuvent être infiniment irréguliers, Mandelbrot a



introduit le concept de dimension fractale (cf. pages 31 et 35). Si un objet fractal est contenu dans un espace ordinaire de dimension d , sa dimension fractale D est comprise entre 0 et d ; mais, contrairement aux dimensions habituelles qui sont toujours entières, D peut être une fraction ou même un nombre irrationnel.

Pour expliquer cette notion de dimension fractale, il est commode de considérer une classe importante d'objets fractals, les objets dits auto-similaires.

À Jyväskylä, université de Finlande où enseigne l'auteur de cet article, Osmo Pekonen, un groupe de recherche, dirigé par le professeur Pertti Mattila, se penche sur les mystères encore plus compliqués.

Pendant les crues, on aurait constaté que des petites fluctuations de la dimension fractale de... la Finlande !

Dans le cadre de la Fête de la Science 2000, le Ministère de la recherche a édité un petit fascicule intitulé **"Mathématiques buissonnières en Europe"** duquel a été extrait ce petit article qui introduit au mieux la suite d'autres articles du Plot 92.

Au sujet du nombre d'or

Raymond Millon - Montigny

paru dans le Plot 90

Il est dommage que l'auteur de l'article cite en exemple la grande pyramide de Chéops et la façade du Parthénon pour illustrer l'utilisation antique du nombre d'or.

Ces deux cas ont été démolis, mais les théories des "pyramidologues" et autres numérologues ont la vie dure !!!

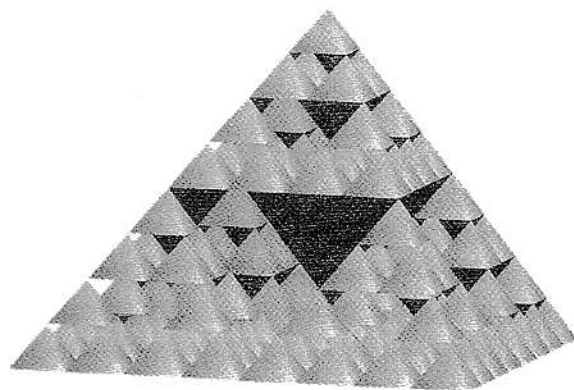
• La grande pyramide

C'est Hérodote, au 5e siècle avant notre ère, qui avait rapporté que chaque surface latérale triangulaire avait la même aire que le carré construit sur la hauteur de la pyramide.

En fait, tout provient de ce que les bâtisseurs de la pyramide utilisaient une fraction simple (14/11) pour la pente des faces ; cela équivaut, pour le rapport entre la hauteur d'une face et sa demi-base, à la fraction 317/121 soit 1,6186... autrement dit, presque Φ !!!

Spragne de Camp, dans son livre "les énigmes de l'archéologie" (Édition Planète) a fait un historique assez complet de ces théories émises par Smyth, Wilson, Menzies et Davidson à partir de 1830. Il note au passage que l'état de délabrement de la grande pyramide ne permet pas des mesures précises de la hauteur et de la base.

Les Égyptiens ont pillé les matériaux au cours des siècles et il manque une dizaine de mètres sur la hauteur totale ! En triturant les mensurations de la pyramide, un "archéologue" a remarqué que le périmètre de la base (1760 coudées royales) valait environ le périmètre du cercle dont le rayon était



égal à la hauteur de la pyramide (260 coudées royales), ce qui équivaut à 22/7 (!!!)

Autrement dit, on peut trouver ce que l'on veut à partir de n'importe quoi !!!

• La façade du Parthénon

Cette fois, je vous renvoie à l'article de Jean-Paul Delahaye ("la numérologie du nombre d'or") paru en Août 1999 dans la revue "Pour la Science". Il y montre les moyens utilisés pour faire "rentre" ce monument dans un rectangle d'or :
- avec Huntley : le rectangle frôle le toit, mais n'inclut que... 3 marches,
- avec Ghylen : il inclut les 4 marches mais s'ajuste moins bien au toit !

Jean-Paul Delahaye, qui a écrit un superbe livre sur le nombre π *, s'insurge au passage contre d'autres numérologues qui prétendent que π et sont liés. Tantôt $\pi = 6\Phi^2/5$, tantôt $\pi = 4/\sqrt{\Phi}$.

Ces remarques étant faites, le reste de l'article m'a paru quand même fort intéressant.

* "Le fascinant nombre π " est édité chez Belin-Pour la Science, Paris.

Simulations de files d'attente

d'après Vincent Paradis, Montréal



Les simulations de files d'attente sont largement utilisées dans le domaine de la recherche opérationnelle.

On cherche par exemple à déterminer dans un super-marché le nombre de caisse nécessaire pour que les clients n'attendent pas, dans un péage d'autoroute, le nombre de guichets pour éviter les bouchons, à une laverie automobile, à une caisse de banque, à un cinéma...

Le Poisson au supermarché

Prenons l'exemple du super-marché. Il faut que les clients n'attendent pas plus de trois minutes pour être servis, avec comme autre variable les heures de pointe. Or des lois probabilistes déterminent des arrivées aléatoires.

La première partie de l'activité servira à illustrer la "plausibilité" d'une de ces lois, celle de Poisson. Dans une seconde partie, l'objectif sera, à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires, de simuler des arrivées à un lave-auto afin de déterminer le temps moyen d'attente dans la queue.

La loi de Poisson

On veut vérifier que des arrivées aléatoires, c'est-à-dire au hasard, se comportent selon une loi de Poisson. Prenons le cas d'un laveur de voitures. Choisissons la "minute" comme unité de temps. Les voitures arrivent de façon

irrégulière. Les intervalles entre les arrivées successives des automobiles au lave-auto, se comportant selon une loi de Poisson, se distribuent exponentiellement.

La distribution est donnée par la fonction suivante :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

où λ est le nombre moyen d'arrivée par unité de temps.

Supposons les données suivantes :

TABLEAU 1

Le nombre d'arrivées qui correspond à la grandeur des intervalles de temps.

Intervalle entre les arrivées (minutes)	Nombre d'arrivées	Pourcentage cumulatif
00-02	15	35
02-04	13	28
04-06	12	40
06-08	20	60
08-10	10	70
10-12	2	72
12-14	3	75
14-16	5	80
16-18	5	85
18-20	0	85
20-22	0	85
22-24	2	87
24-26	3	90
26-28	1	91
28-30	4	95
≥ 30	5	100

Supposons que la durée totale des relevés fut de 1000 minutes. Comme il y a 100 observations ou arrivées, le nombre moyen d'arrivée par minute est de 0,1 soit 100 arrivées en 1 000 minutes. La valeur du paramètre est donc : $\lambda = 0,1$.

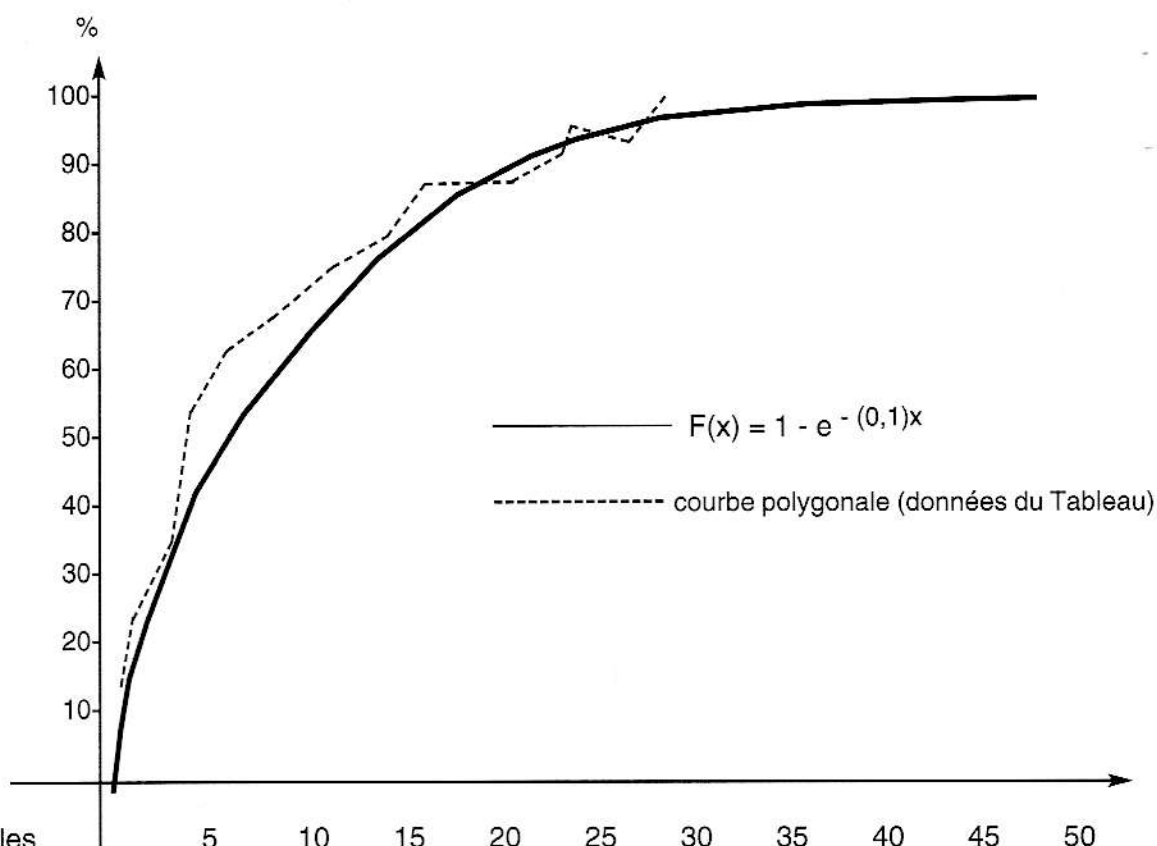


Figure 1 :
les intervalles
entre les arri-
vées en fonction
du pourcentage
d'arrivées.

Il s'agit maintenant de construire les graphes théoriques et pratiques, le graphe théorique étant celui de la fonction continue $F(x) = 1 - e^{-(0,1)x}$, le graphe pratique étant fourni de seize points, ceux du pourcentage cumulé (cf. TABLEAU 1).

À noter que la construction de la courbe polygonale suppose le postulat de l'équirépartition à l'intérieur d'un intervalle donné ; on fait donc correspondre les pourcentages cumulatifs aux points milieu des intervalles, soit 1, 3, 5 ...

La démarche

Chaque groupe d'élèves a une centaine de relevés à faire. Il suffit dans un premier temps de noter l'heure des arrivées, par exemple :

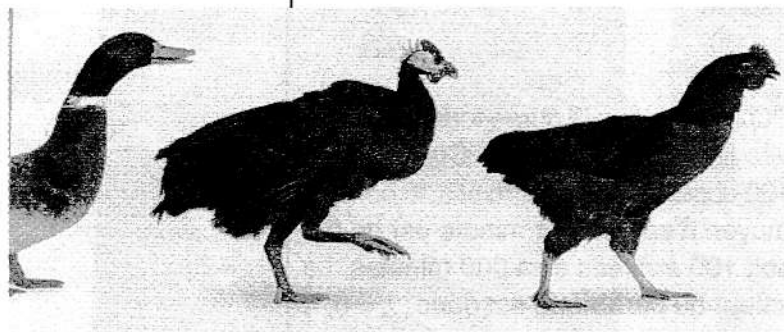
(heure de départ : midi)
12 heures 01 minute 12 secondes,
02 minutes 28 secondes,
53 secondes,
04 minutes 01 seconde, etc.

Par la suite, on établit la durée des intervalles, soit :

1 minute 12 secondes,
1 minute 16 secondes,
0 minute 25 secondes,
1 minute 8 secondes, etc.

Ensuite selon la durée d'un intervalle, il s'agit de construire un tableau semblable au tableau 1.

Le nombre d'intervalles doit varier entre 10 et 20 afin de construire un graphe intéressant. La durée d'un intervalle est donc à fixer en fonction de ce critère et de la réalité observée.



Une table de nombres aléatoires

Les élèves ont à simuler une file d'attente en se basant sur le graphe théorique qu'ils viennent de vérifier, et pour ce faire, à construire une table de nombres aléatoires.

Il existe des tables comportant un million de chiffres, réalisées au moyen d'une roulette électronique.

Il peut être intéressant de faire construire aux élèves leur propre table de nombres aléatoires et de la vérifier.

Voici quelques moyens faciles à utiliser :

- Un icosaèdre à 20 faces que l'on trouve facilement dans les boutiques de jeux. Il s'agit d'un dé à 20 faces ou chaque chiffre de 0 à 9 apparaît 2 fois.

À noter qu'il n'existe pas de polyèdre régulier à 10 faces. Les élèves peuvent le construire avec du carton.

- Une urne contenant 10 boules numérotées de 0 à 9. Il s'agit de remuer l'urne de façon à engendrer aléatoirement le tirage d'une boule porteuse d'un nombre.

- Un dé dont 5 faces sont numérotées 0, 1, 2, 3 et 4. Le sixième est hachuré, son tirage annulant un coup, et un jeton numéroté 0 et 5. On lance le dé et le jeton et on fait la somme.

Une façon simple de vérifier si une table de nombres aléatoires n'a pas été biaisée, est la suivante : la moyenne arithmétique des chiffres de 0 à 9 est 4,5, c'est-à-dire

$$\sum m / 10 = 4,5$$

$m=0 \text{ à } 9$

Alors la moyenne arithmétique de n nombres aléatoires compris entre

0 et 9, soit les chiffres $a_1, a_2, \dots, a_n$, devrait être approximativement : $(\sum a_i) / 10$ peu différent de 4,5 $i=1$ à n

Plus n est grand, plus l'approximation devrait être bonne.

Une fois la table de nombres aléatoires produite, il reste à simuler la file d'attente. Pour cela, un transfert de variable isolée est nécessaire.

Prenons :

$$F(x) = y = 1 - e^{-(0,1)x}$$

$$1 - y = e^{-(0,1)x}$$

$$\ln(1 - y) = \ln e^{-(0,1)x} \text{ pour } 0 < y < 1,$$

$$\ln(1 - y) = -(0,1)x$$

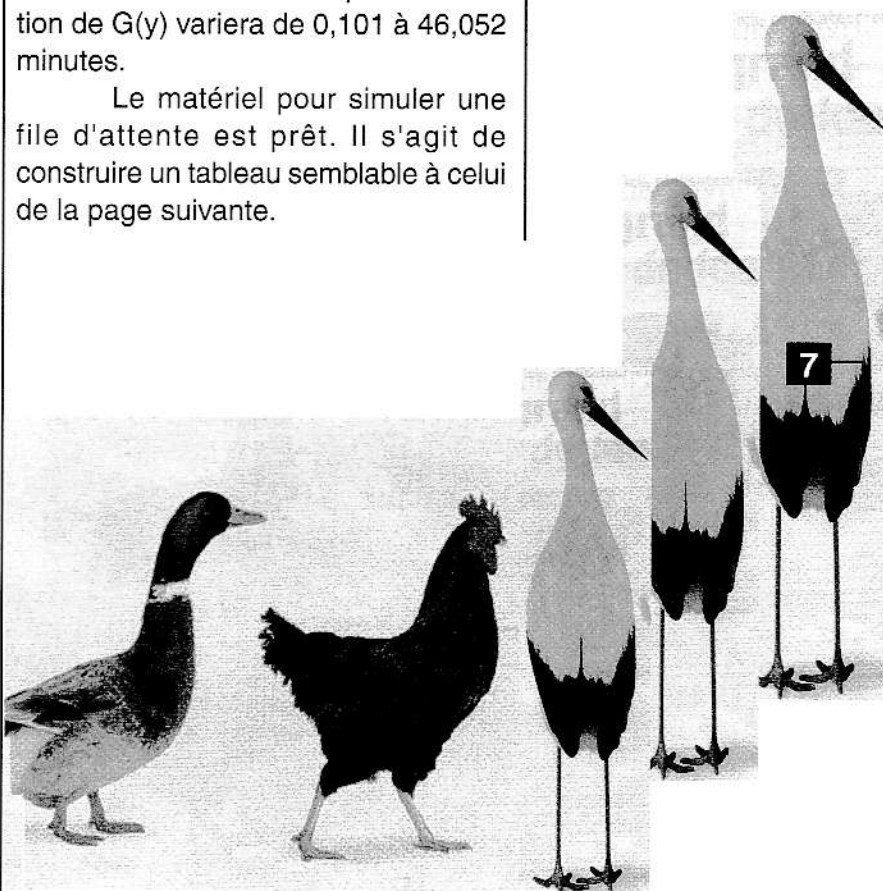
$$x = -10 \ln(1 - y) \equiv G(y) \text{ (modulo D)}$$

$$G(y) = -10 \ln(1 - y)$$

À l'aide d'une calculatrice, il s'agit maintenant d'évaluer $G(y)$ pour des valeurs de y variant de 0,01 à 0,99.

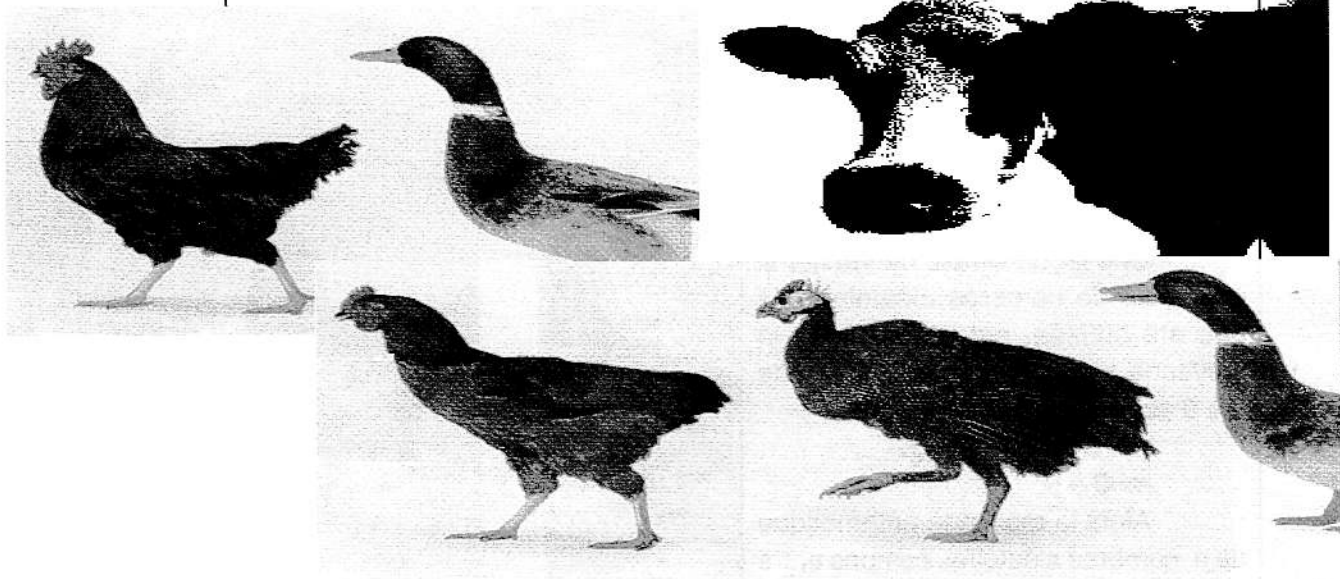
Dans notre exemple l'évaluation de $G(y)$ variera de 0,101 à 46,052 minutes.

Le matériel pour simuler une file d'attente est prêt. Il s'agit de construire un tableau semblable à celui de la page suivante.



Simulation du temps d'attente

n° client	n° aléatoire	intervalles entre arrivées	Temps de service	Temps d'attente
1	0,77	14,697	5	0
2	0,20	2,231	5	2,769
3	0,81	16,607	5	0
4	0,80	16,094	5	0
5	0,34	4,155	5	0,845
6	0,71	12,379	5	0
7	0,18	1,985	5	3,015
8	0,13	1,393	5	6,622
9	0,58	8,675	5	2,947
10	0,59	8,916	5	0
11	0,81	16,607	5	0
12	0,58	8,675	5	0
13	0,36	4,463	5	0,537
14	0,55	7,985	5	0
15	0,06	0,619	5	4,381
16	0,48	6,539	5	2,842
17	0,74	13,471	5	0
18	0,38	4,780	5	0,221
19	0,06	0,619	5	4,601
20	0,17	1,863	5	7,738
21	0,17	1,863	5	10,875
22	0,69	11,712	5	4,163
23	0,97	35,066	5	0
24	0,56	8,210	5	0
25	0,67	11,087	5	0
Simulés	donnés par le générateur de nombres aléatoires	donnés par une table	Temps constant	Total : 51,558 temps moyen : 2,062



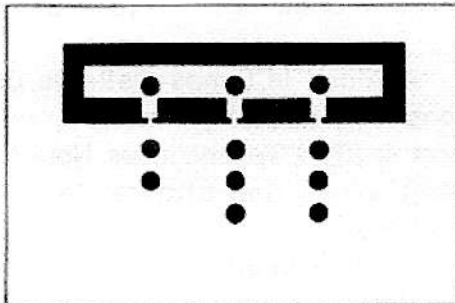
Les caisses "5 objets"

La queue au supermarché !!!

Le gérant de votre supermarché se pose la question suivante :

Quels avantages y aurait-il à remplacer le système traditionnel des files à chaque caisse par une file unique ?

Nous allons examiner comment, à l'aide de simulations, il est possible de comparer les deux systèmes sous certains aspects.



Posons une première question :

En moyenne, le temps d'attente d'un client est-il le même dans les deux systèmes ?

Le temps d'attente dépend fondamentalement de deux facteurs lorsque le nombre de guichets est fixé :

- 1) le nombre de clients en attente lorsque nous y pénétrons ;
- 2) le temps qui est requis pour servir une personne.

Le temps requis pour servir un client n'est évidemment pas toujours le même. On peut cependant connaître la probabilité que ce temps soit dans différents intervalles.

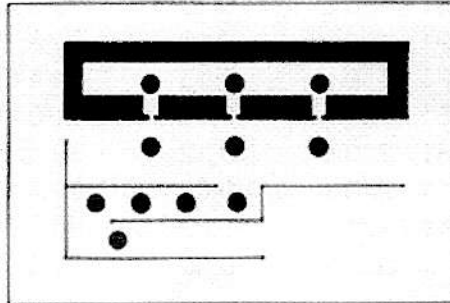
Pour cela, il faut faire un relevé.

Un des vendeurs a été assigné à la tâche suivante :

Prendre note du temps nécessaire pour servir chacun des 100 premiers clients aujourd'hui.

Voici ce qu'il a obtenu :

Temps (secondes)	Nombre de personnes	Fréquences relatives
1 - 30 s	5	0,05
31 - 60 s	8	0,08
61 - 90 s	10	0,10
91 - 120 s	13	0,13
121 - 150 s	15	0,15
151 - 180 s	18	0,18
181 - 210 s	12	0,12



211 ~ 240 s	7	0,07
241 - 270 s	7	0,07
271 - 300 s	5	0,05

Ces résultats nous donnent une assez bonne idée du temps passé au guichet: on peut dire par exemple que la probabilité qu'une personne se présentant au guichet y passe entre 2 minutes et 2 minutes et demie est de 15/100 (cette valeur n'est évidemment qu'une estimation de la probabilité).

Si on voulait plus de précision, on devrait baser l'estimation sur plus de 100 clients et diminuer la longueur des intervalles.

Remarquez que la probabilité qu'une personne se présentant au guichet y passe entre 1 et 30 secondes est la même que celle de lire dans une table de nombres aléatoires une quelconque des paires de chiffres suivants : 00, 01, 02, 03, 04.

De même, la probabilité qu'un client



passé entre 31 et 60 secondes au guichet est la même que celle de trouver une quelconque des paires suivantes : 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12.

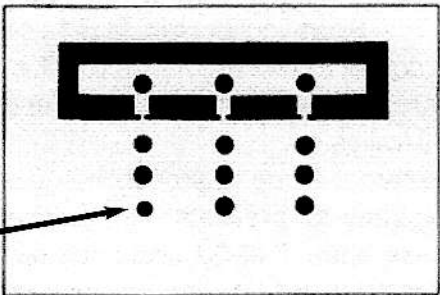
On peut donc établir une correspondance entre les temps de service et certaines paires de nombres aléatoires.

Temps passé au guichet	Probabilité	Paires de nombres associés
1 - 30 s	0,05	00 à 04
31 - 60 s	0,08	05 à 12
61 - 90 s	0,10	13 à 22
91 - 120 s	0,13	23 à 35
121 - 150 s	0,15	36 à 50
151 - 180 s	0,18	51 à 68
181 - 210 s	0,12	69 à 80
211 - 240 s	0,07	81 à 87
241 - 270 s	0,07	88 à 94
271 - 300 s	0,05	91 à 99

Supposons que lorsque monsieur X se présente à la caisse, il y a déjà 8 clients ; nous allons simuler le temps qu'il devra attendre suivant les deux modes d'attente: les files multiples et la file unique.

Il y a 2 clients devant Monsieur

Files multiples



Poulet. Simulons le temps qui sera requis pour servir chacun d'eux. En utilisant la table des nombres aléa-

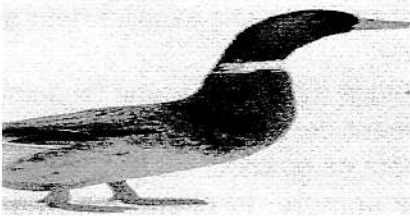
toires, on choisit une ligne (disons la première) et deux colonnes (par exemple les 13e et 14e colonnes). Cela nous fournira une paire de 2 nombres aléatoires. À cette paire correspond un temps de service du premier client. Puis, on simule le temps de service du 2ème client (en regardant par exemple les deux nombres situés sur la 2e ligne, les 13e et 14e colonnes).

Voyons ce que nous obtenons:

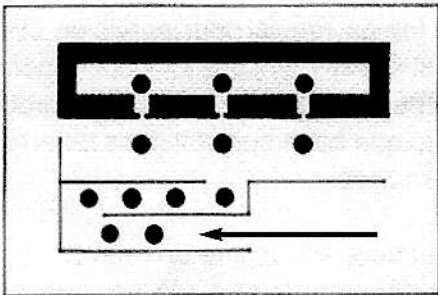
	nombre lu	temps de service
premier client	33	91 - 120 s
deuxième client	74	181 - 210 s

Alors, le temps d'attente de monsieur X, par cette simulation, peut varier de 272 à 330 secondes. Nous lui assignerons une attente de 300 secondes.

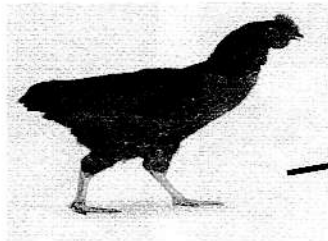
Faites 15 simulations analogues de l'attente de Monsieur Poulet puis calculez la moyenne des temps d'attente.



File unique



Posons que, lorsque Monsieur Canard arrive, les 3 clients aux trois caisses commencent à se faire servir.





À l'aide de votre table des nombres aléatoires, simulez 15 fois l'attente de ce 9ème client et comparez avec l'autre système,

Pour faire cette simulation, on doit tout d'abord simuler le temps que passeront les trois clients qui sont aux guichets, puis acheminer le quatrième client à la première caisse qui se libérera, etc. , jusqu'à ce que le 9ème client arrive à une caisse :

Que concluez-vous sur le temps moyen d'attente dans les deux systèmes ?

Auriez-vous pu prévoir ce résultat sans simulation ?

Vous avez certainement constaté que les deux systèmes sont équivalents en ce qui concerne le temps moyen d'attente.

Pourquoi en est-il ainsi ?

En regardant les temps qu'a dû attendre le 9ème client dans les deux systèmes, voyez-vous sous quel aspect ces derniers diffèrent ?

Dans le système à plusieurs files, il arrive que l'on attende très peu mais aussi que le temps d'attente soit long alors que dans le système à file unique, le temps d'attente ne varie pas tellement. Pour caractériser un tel fait, nous disons que la variabilité du temps d'attente est beaucoup plus forte dans le système à plusieurs files. Une manifestation frustrante de cette situation est d'apercevoir les files voisines avancer plus vite que la nôtre...

Si vous demandiez au gérant de votre banque les raisons justifiant la file unique, il vous en fournirait probablement plusieurs autres. Vous pouvez prolonger cette activité en imaginant d'autres exemples de simulation et en les testant.

Une manipulation interactive de l'exposition "les hasards de la vie" :

Comment choisir la bonne file ?

Que faire ?

Faites tomber les billes de couleur puis votre bille blanche.

Quelle chance avez-vous pour qu'elle soit dans la bonne file d'attente ?

Que retenir ?

Les goulets d'étranglement dans les files d'attente proviennent de l'impossibilité d'exiger un service individuel. Il faut se résigner à partager ce service avec d'autres clients et s'armer bien souvent de patience.

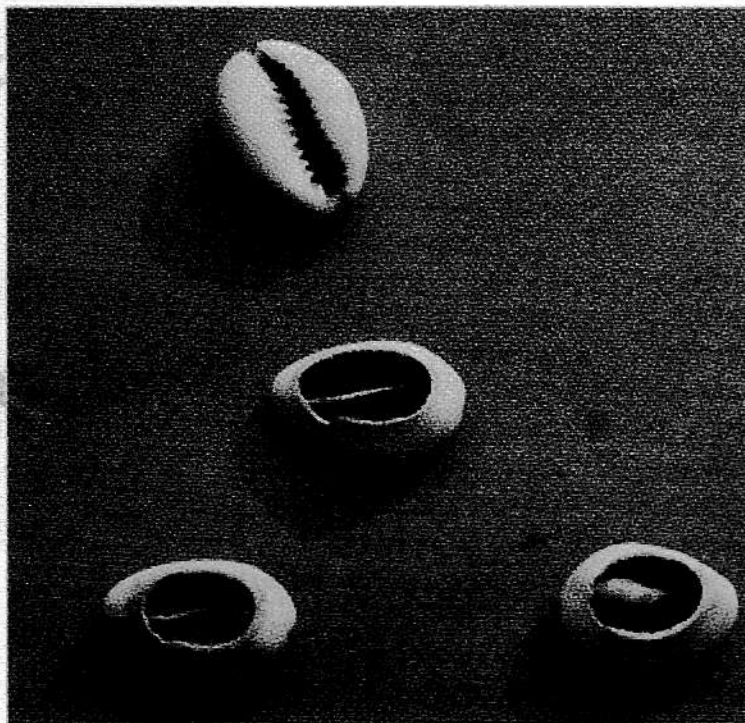
Dans une file d'attente, les arrivées des clients s'opèrent d'une façon aléatoire ; la durée du service est elle-même en partie gouvernée par le hasard. On cherche à établir un compromis entre le temps perdu par les clients du fait de l'attente et la multiplication des files d'attente qui ne fonctionnent pas gratuitement.

En observant la répétition des sorties et le nombre des guichets, on en déduit le nombre moyen de sorties ainsi que le nombre de caissières par unité de temps.

On peut ainsi, dans le cas d'ouvriers, de magasiniers, des péages d'autoroute, minimiser le coût supporté du fait de l'attente des clients dans la file et de l'occupation de certains postes pour un meilleur profit de l'entreprise.

de l'éthnomathématique

Drissa SORO, Abidjan



Mathématiques et "culture indigène"

De la prise de conscience des mathématiciens des pays à "culture indigène" à la naissance de l'éthnomathématique.

C'est dans les années 70 et 80 que les mathématiciens et les professeurs de Mathématiques des pays classifiés par les coloniaux comme des pays à "culture indigène" que naquit une résistance à l'idée de la non présence de mathématique dans ces cultures. La seule mathématique reconnue à ces peuples étant la mathématique scolaire importée (Gay et Cole, 1967; Njock, 1985, et Paulus Gerdes, 1993).

Dans le but de mieux préciser et de mieux opposer cette "mathématique indigène" à la mathématique occidentale ou européenne, différents concepts ont été proposés. Nous rappelons ici les principaux dans un ordre chronologique pour la période de 1967 à 1987 (1):

- Gay et Cole: Affirmation de l'existence d'une "mathématique indigène". 1967

- Zaslavsky: Sociomathématique d'Afrique: les applications de la mathématique dans la vie des peuples africains et inversement l'influence que les institutions africaines ont exercée et exercent encore sur l'évolution de la mathématique. 1973.

- D'Ambrosio: 1ère idée d'une ethnomathématique par l'observation de la culture malienne, refus de voir les ethnologues occidentaux de classer les

SCIENTIFIKA 2000, la seconde édition de la fête de la science au Sénégal s'est déroulée au printemps 2000.

Drissa Soro, chercheur à l'Institut de Recherches Mathématiques (IRMA) d'Abidjan en Côte d'Ivoire est intervenu autour de l'éthnomathématique, sujet de recherches de nombreux pays en développement.

J'articulerai mes propos autour des axes suivants:

- De la prise de conscience des mathématiciens des pays à "culture indigène" à la naissance de l'éthnomathématique;
- De l'acceptation du concept de l'éthnomathématique;
- Des défis de l'éthnomathématique;
- De l'atelier: Mathématiques dans l'Environnement SocioCulturel Africain (MESCA).

Scientifika 2000 - Dakar

pensées des pays colonisés en "pensées primitives" dénuées de toute logique. 1975.

- D'Ambrosio : Mathématique spontanée : pour pouvoir survivre tout être humain et chaque groupe culturel développe spontanément des méthodes mathématiques déterminées. 1975.

- Posner : Mathématique informelle : mathématique qui se transmet et s'apprend hors du système d'éducation formelle. 1982.

- Carraher et al : Mathématique orale : dans toutes les cultures humaines il y a des connaissances mathématiques qui sont transmises oralement d'une génération à la suivante. 1982

- Paulus Gerdes : Mathématique opprimée : dans les sociétés de classe (par exemple dans les pays du "Tiers Monde" à l'époque de l'occupation coloniale) existent des éléments mathématiques dans la vie quotidienne des masses populaires qui ne sont pas reconnus comme mathématique par l'idéologie dominante. 1982.

- Gerdes : Mathématique cachée ou congelée : bien que la plupart des connaissances mathématiques des peuples autrefois colonisés se soient probablement perdues, on peut reconstruire ou "décongelée" la pensée mathématique qui se trouve "cachée" ou "congelée" dans des techniques anciennes telles que la vannerie par exemple. 1982.

- Carraher : Mathématique non-standardisée : outre les formes standardisées dominantes de la mathématique "académique" et "scolaire", se déve-



loppèrent, dans le monde entier et dans chaque culture, des formes mathématiques qui se distinguent des modèles établis. 1982.

- Gerdes : Les concepts de mathématique non-standardisée de Carraher et celui de mathématique cachée ou congelée sont repris. 1985.

- Mellin-Olsen Mathématique populaire du peuple : la mathématique (bien que souvent non reconnue comme telle) développée dans la vie de labeur de chacun des peuples, peut servir de point de départ dans l'enseignement de la mathématique. 1986.

- Kane : reprend le concept de mathématique orale. 1987.

Remarquons que l'année 1982 fut l'année la plus productive en matière de nouveaux concepts. Ceux-ci vont d'ailleurs permettre d'amorcer un mouvement d'affirmation des "mathématiques indigènes" dans le Tiers-Monde. Ce mouvement trouvera plus tard un écho favorable dans d'autres pays et l'unanimité se fera de plus en plus autour du concept plus général d'ethnomathématique.

La création en 1985 du Groupe International d'Étude d'Ethnomathématique (I S G E m) consacra à tout jamais la naissance de l'ETHNOMATHÉMATIQUE. La paternité est alors attribuée

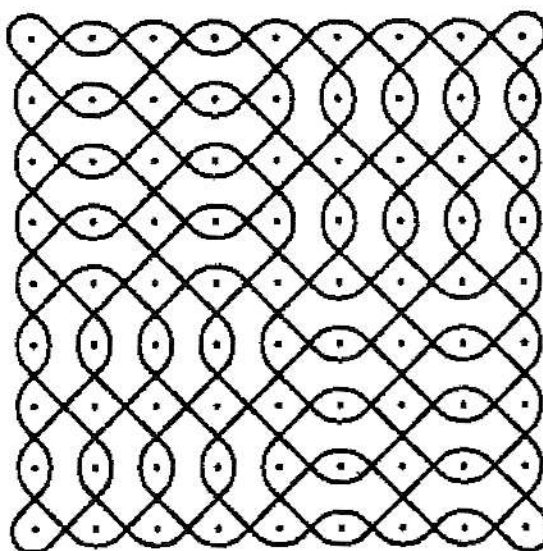
au Professeur Ubiratan, D'Ambrosio du Brésil (Cf. Ferreria, 1988, 3; Borda 1988,24), qui comme on l'a vu, en parle dès 1975.

de l'acceptation du concept

Dès lors, l'on a tenté de re-préciser le concept par rapport à la mathématique et à l'ethnologie. Il ressort que l'ethnomathématique est une trilogie :

- de la mathématique connue sous la forme de "mathématique-dans-le-contexte-culturel" ou "mathématique-dans-la-société" (Voir ISGEm Newsletter, 1985, Vol. I, no1,2)
- de l'ethnologie puisqu'analysant "les connaissances mathématiques pratiquées dans la vie quotidienne d'un groupe social" (in Ferreria, 1986,2).

Citons ici la définition ethnolinguistique de l'ethnographe Favrod : "L'Ethnomathématique essaie d'étudier la mathématique dans ses relations avec l'ensemble de la vie culturelle et sociale."



- de la didactique de la mathématique.

Cette trilogie indique que tout n'est pas encore clair pour parler d'ethnomathématique comme une entité à part entière. A. Bishop (1989,13) suggère la prudence alors que Paulus Gerdes propose

de parler "provisoirement d'un accent ethnomathématique dans la recherche et la didactique en mathématique" ou tout au plus d'un "mouvement ethnomathématique".

Cet accent ou ce mouvement devrait prendre en compte, selon P. Gerdes, les caractéristiques suivantes :

- les influences de facteurs socioculturels sur l'enseignement, l'apprentissage et le développement de la mathématique ;
- la mathématique est un produit culturel ;
- la reconnaissance qu'une grande partie des contenus de la mathématique scolaire est d'origine africaine et asiatique et que ces populations dominées d'Afrique et d'Asie ont été "désappropriées" de ces connaissances durant la colonisation ;
- la mise en évidence des traditions mathématiques qui survécurent au colonialisme et les activités mathématiques de la vie quotidienne susceptibles d'être intégré dans les enseignements.

Ce n'est qu'en Avril 1996 que l'on admettra une définition de L'Ethnomathématique pour le dictionnaire d'une éducation multiculturelle (Gloria Gilmer, ISGEm Newsletter, no 7) (2):

" L'Ethnomathématique est l'étude des pratiques mathématiques de groupes culturels spécifiques gérant leurs problèmes familiers et leurs activités, par exemple, la manière dont des basketteurs professionnels estiment les angles et les distances diffère radicalement de celle qu'utilisent les routiers. Les deux sont des groupes culturels identifiables qui utilisent des mathématiques dans leur travail quotidien. Ils ont leur propre langage et des moyens propres d'obtenir ces estimations".

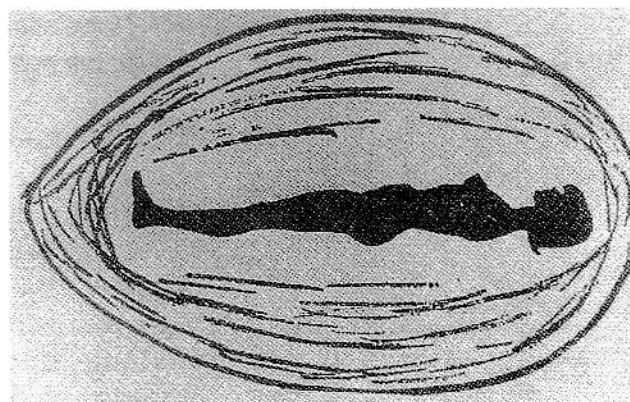
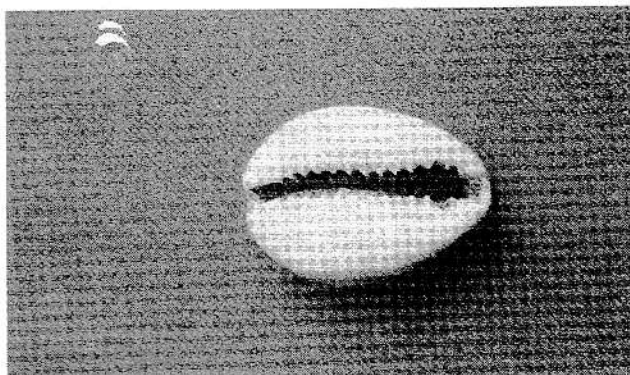
Une décomposition étymologique a même été proposée, à savoir:

**Ethnomathématique =
Ethno + mathéma + tique**

- ETHNO : groupes culturellement identifiables (sociétés nationales ou tribales, groupes de travail, catégories de classes d'âge, catégories socioprofessionnelles) avec leurs idéologies, leurs langages, leurs pratiques quotidiennes et leurs manières spécifiques de raisonner et d'inférer.

- MATHEMA : expliquer, comprendre, et gérer la réalité en particulier par le chiffrage, le calcul, la mesure, la classification, la mise en ordre d'inférences et la modélisation de phénomènes existants de l'environnement.

- TIQUE : art ou technique.

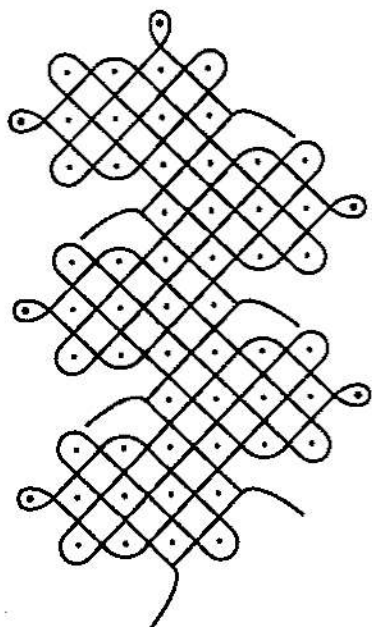


Depuis lors, des groupes d'étude et de recherches se sont constitués et continuent de l'être. Citons entre autres :

- International Study Group of Ethnomathematics (ISGEm) (déjà cité)
- African Mathematical Union Commission On The History of Mathematics in Africa. (AMUCHMA)
- Atelier Mathématiques dans l'Environnement socioculturel Africain (MESCA), l'Institut de Recherches Mathématiques (IRMA), en Côte d'Ivoire, avec Salimata Doumbia et son équipe (1984);
- Groupe de Recherches en Ethnomathématique du Mozambique du Prof. Paulus GERDES,
- Groupe d'Étude sur l'Histoire des Mathématiques de l'École Normale Supérieure de Casablanca, Maroc (Octobre 1986).

Les thèses déjà réalisées et les congrès des Mathématiciens dont le premier (International Congress on Ethnomathematics, Granada, Spain, Sept. 1998) et le second prévu en l'an 2002 à Rio de Janeiro, Brésil sont de " bons indicateurs " pour accepter que L'Ethnomathématique soit bel et bien une nouvelle science à part entière.

C'est pourquoi, nous nous permettons de reprendre ici la définition extraite de AMUCHMA-Newsletter-21, et traduite par nos soins.



“ L'Ethnomathématique est le domaine de la science qui étudie les mathématiques et l'éducation en mathématique dans le contexte historique et culturel.

L'Ethnomathématique analyse les influences socioculturelles sur le développement et l'enseignement des

mathématiques, et réciproquement; les influences exercées par les mathématiques et leur enseignement sur le développement des cultures et des sociétés.

Ainsi, L'Ethnomathématique étudie à la fois les idées mathématiques contenues dans les cultures et leurs applications aux mathématiques et à l'enseignement des mathématiques.”

Il reste donc aux ethnomathématiciens du Sud de relever les nouveaux défis engendrés par L'Ethnomathématique.

L'ethnomathématique : des défis pour le Sud

Ces défis sont de trois ordres :

- La recherche en ethnomathématique;
- L'ethnomathématique dans l'enseignement supérieur ;
- L'ethnomathématique et la formation des enseignants.

La recherche en ethnomathématique

L'existence de groupes de recherches de part le monde, les thèses produites ou en préparation et les centres de recherches spécifiques qui commencent à se créer, par exemple, "The Mozambican Ethnomathematics - Research Centre - Culture- Mathematics - Education MERCCME (AMUCHA Newsletter-21), permettent d'affirmer que ce défi est déjà relevé.

Ethnomathématique dans le supérieur

Laurence Shirley, (ISGEm Newsletter 5, Sept 94), situe bien le problème dans son article "Programme d'Ethnomathématique au niveau supérieur: un doute ?".

Elle note qu'au niveau primaire et secondaire, l'adaptation est facile.

Citons dans ce cadre, le projet d'Harmonisation des Programmes de Mathématiques (HPM) dans les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien et dont la Collection Inter africaine de Mathématiques (CIAM) en est une parfaite illustration d'une adaptation réussie.

Ajoutons à cela l'exemple de la Collection IRMA (qui a précédé la CIAM) où l'on a pu intégrer les résultats des recherches en ethnomathématique dans les manuels du secondaire.

Au niveau du supérieur, il devient trivial de vouloir parler d'ethnomathématique. Et nous sommes d'accord avec Lawrence Schirley lorsqu'elle pose les questions suivantes : "Que peut-on relever d'ethnomathématique dans les équations aux dérivées partielles ou la théorie des groupes? Les mathématiques ne sont-elles pas universelles? Cependant, est-ce réellement la forme de la matière (équations aux dérivées partielles, etc.) ou la résistance des enseignants du supérieur des pays africains à explorer ce nouveau domaine? Ou bien le manque d'enseignants qui rend hésitants bon nombre de responsables de département de mathématiques à créer des filières en ethnomathématique?

Des analyses permettent de soutenir que cette tendance va changer et le défi de l'enseignement supérieur sera bientôt relevé. En effet, Lawrence cite le livre de Georges Joseph, "The Crest of the Peacock : Non European Roots of Mathematics".

On y rencontre des "mathématiques de haut niveau faites par les civilisations chinoise et indienne de l'époque classique (théorème du binôme, résolution de systèmes d'équations par les matrices) quelques centaines d'années avant que ces idées n'apparaissent en Europe."

Dans son livre sur L'Ethnomathématique, Maria Ascher, cite des exemples de mathématiques supérieures telles que les structures parentes, les dessins de Tchokwe et

d'autres. Enfin, à partir de l'étude des jeux de cauris, des problèmes de chaînes de Markov, d'inversion d'une matrice de Markov 13×13 , et de martingales ont été résolus.

La formation des enseignants

Il est certain qu'en tant que nouvelle science, L'Ethnomathématique a des conséquences sur la formation des enseignants.

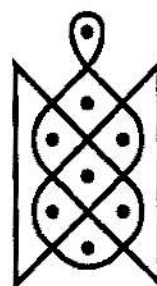
C'est réellement un défi car non seulement il faut arriver à lever toutes les appréhensions inhérentes à cette science mais il faut également définir des thèmes (la matière) pour des formateurs.

Cette formation est donc liée à l'avancée de la recherche ethnomathématique.



En tant qu'utilisateur, tel est ce que je retiens de L'Ethnomathématique de cette première partie.

Je voudrais maintenant vous faire partager l'expérience de l'IRMA, et partant celle de la Côte d'Ivoire, dans ce domaine, à travers l'atelier MESCA.



Petite bibliographie

- 1 - P. Gerdes, L'Ethnomathématique comme nouveau domaine de recherche en Afrique, 1993.
- 2 - S. Doumbia, Sur le Concept de L'Ethnomathématique, Séminaire de 1^{er} MA, 1999
- 2 - S. Doumbia, L'Atelier MESCA (Mathématiques dans l'environnement socio-culturel africain, Séminaire de l'IRMA, 1999
- 4 - Actes du Séminaire Interdisciplinaire Mathématiques-Philosophie et Enseignement, Yamoussoukro Janvier 1993
- 5 - Plot n° 69, 1994-4, numéro spécial jeux africains
- 6 - Les jeux de Cauris, Collection MESCA, de S. Doumbia et JC. PIL
- 7 - Plot n° 54, 1991-1 et Plot 59, 1992-2 : l'éthnomathématique, Paulus Gerdes

L'atelier MESCA

De l'atelier : "mathématiques dans l'environnement socio-culturel africain (MESCA).

Les recherches en Ethnomathématique (puisque'il faut employer le terme) en Côte d'Ivoire ont véritablement démarré en 1980 avec la création de l'atelier "Mathématiques dans l'Environnement SocioCulturel Africain (MESCA)" par le Professeur Saliou TOURE, alors Directeur de l'Institut de Recherches Mathématiques (IRMA).

Les objectifs de cet atelier sont les suivants :

- promouvoir la pédagogie des mathématiques en intégrant l'environnement socioculturel de l'élève dans le contenu et les méthodes d'enseignement des mathématiques, grâce à une meilleure connaissance des supports existant dans l'espace vécu ;
- favoriser l'orientation des jeunes scolarisés vers les mathématiques et vers les disciplines scientifiques qui font une large utilisation des mathématiques et dont le déficit, au regard des disciplines littéraires et juridiques est important ;
- fournir aux animateurs et aux vulgarisateurs du développement les éléments d'information sur les possibilités d'utilisation des supports mathématiques existant dans le milieu rural en tant que moyens de perception et de diffusion de leurs messages.

Signalons que la création du présent atelier fait suite au colloque inter IREM qui s'est tenu en Côte d'Ivoire en 1978, et dont le thème était : "Mathématiques et Milieu en Afrique". Il s'agissait de réfléchir sur une meilleure adaptation des enseignements de mathématique au contexte et à l'environnement

africain, et d'envisager l'introduction des langues maternelles de l'élève dans l'enseignement.

Les actions de recherches de l'atelier sont de trois ordres :

- les activités ludiques des enfants et des adultes ;
- les activités de comptage : les systèmes de numération (numération figurée (poids à peser l'or), numération parlée ou orale, numération écrite, système monétaire) ;
- les activités de géométrie et de mesure (activités de mesure (forme des champs à cultiver, forme des cases et maisons), activités artistiques (poterie, tissage, teinture, peinture, sculpture), activités de musique (arithmétique vibratoire).

À ce jour, seule l'action des activités ludiques est prise en compte (1).

Les mathématiques des jeux africains

Les premiers résultats ont d'ailleurs été consignés dans un document intitulé "Mathématiques dans l'Environnement socioculturel africain. (IRMA, Juin 1984, t.1) où l'on a procédé à une classification mathématique de jeux traditionnels africains dans cinq catégories :

- les jeux verbaux (jeux de mémoire ou de comptine) ;
- les jeux pour deviner ;
- les jeux de position ;
- les jeux d'exhibition ;
- les jeux de hasard ;

Quelles sont les mathématiques rencontrées dans ces jeux ?

La réponse à cette question est édi-
fiante. En effet, au niveau des jeux ver-
baux dont le caractère s'apparente à

l'enseignement traditionnel en Afrique qui est de type oral, les mathématiques ont trait aux deux types de types de jeux : jeux de mémoire et jeux de comptine.

La citation empruntée à P. ERNY, " ... exige une organisation complexe du champ perceptif et développe chez les joueurs l'esprit combinatoire, la rapidité du calcul mental, en plus de la mémoire visuelle et tactile ", situe bien les jeux de mémoire.

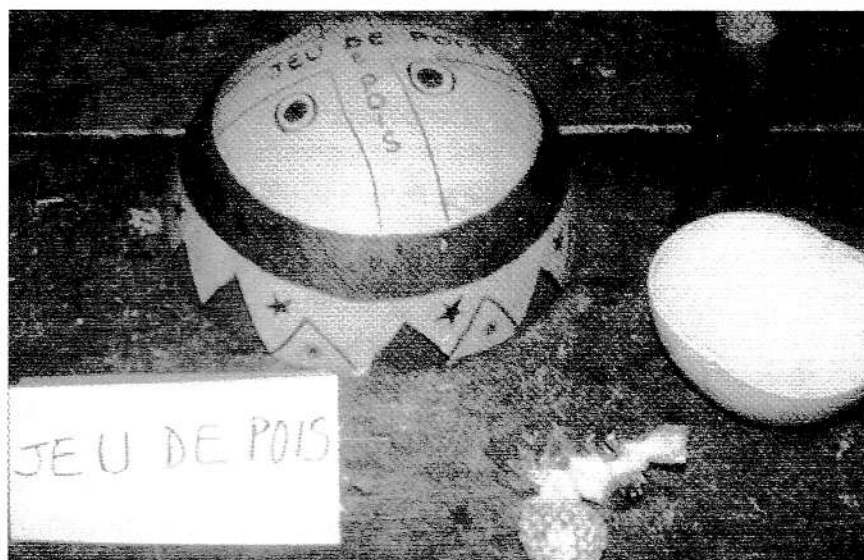
Ici les mathématiques sont relatives aux problèmes de dénombrement. Par exemple, le calcul de la somme des n premiers nombres avec le Yé Gonan.

Pour **les jeux de comptine** basés sur des chansons ou comptine, les mathématiques s'identifient aux noms et sont qualifiées de **comptage**.

Au niveau **des jeux pour deviner** ou de calcul simple, ceux-ci renferment des étapes précises connues par le meneur, et qui font de lui un sorcier, un magicien. Les éléments mathématiques sont donc les **algorithmes**. Par exemple, la division euclidienne dans le Jeu du Sorcier.

Au niveau **des jeux de position**, ceux-ci utilisent des quadrillages. Ils sont assez complexes et font appel à des stratégies qui développent un esprit d'ingéniosité et de finesse ; les joueurs exploitant les capacités d'anticipation, d'évaluation, et de décision. Les mathématiques sont relatives à **la théorie des jeux** ou à **la recherche opérationnelle** en général.

Au niveau **des jeux de hasard** qui sont basés sur des épreuves de Vrai ou Faux, les mathématiques font référence



à **la théorie des probabilités**. Par exemple, le calcul des probabilités avec les Jeux de cauris.

Au niveau de l'enseignement primaire et préscolaire, les résultats sont exploités en collaboration avec les psychologues et les linguistes dans le domaine "Activités ludiques et Développement cognitifs".

Les thèmes abordés en 1991, 1993 et 1994 ont été respectivement "Le Yé Gonan et l'acquisition du nombre", "Les effets cognitifs chez les enfants ivoiriens", et " les effets cognitifs du jeu Tiouk-Tiouk chez les enfants de milieu socio-économique différent".

Ces résultats sont exploités dans le secondaire, et notamment :

- la résolution de problèmes de dénombrement ;
- l'analyse combinatoire et de calcul de probabilités (jeux de cauris) ;
- les opérations arithmétiques : multiplication et division (awalé et les jeux du sorcier), addition et soustraction (carés magiques), les 4 opérations (poids à peser l'or) ;
- la somme des n premiers nombres non nuls (le Yé Gonan) ;
- la géométrie.

L'exploitation des résultats dans

Résultats dans le culturel et le social

le supérieur a été évoquée plus haut dans "ethnomathématique et l'enseignement supérieur".

Utilisation des résultats dans le culturel et le social

Les publications ci-dessous en vue de la popularisation des résultats des recherches de l'atelier sont à retenir :

- la Collection MESCA (Mathématiques dans l'Environnement SocioCultuel Africain), la première publication date de 1992 et a pour thème "Les Jeux de Cauris";
- L'Encyclopedia of the History of Science, Technology and Medicine in Non-Western Cultures, de Kluwer Academic Publishers où le thème "Mathematics in West Africa: Traditional Mathematics Games" a été traité en 1997;
- Le bulletin HPM (Harmonisation des Programmes de Mathématiques où la rubrique "Maths et Cultures" est réservé à l'atelier MESCA.
- L'informatisation de certains jeux;

Enfin l'exposition **Jeux, Mathématiques et Sociétés** a été réalisée par l'IRMA et le CCSTI de la région Centre en France, Centre•Sciences.

C'est une exposition itinérante et interculturelle à but pédagogique portant sur le thème des jeux traditionnels africains et de leur utilisation dans la société. Elle a été inaugurée en novembre 1994 au centre culturel français à Abidjan et circule depuis dans de nombreux pays d'Afrique et en France.

Perspectives de l'ethnomathématique

Le bilan succinct présenté plus haut montre qu'il est largement positif. De plus de telles recherches trouvent un écho favorable dans le monde entier ; le rôle de pionnier dans la recherche dans l'environnement socioculturel est souvent concédé à l'IRMA en Afrique de l'ouest. En vue de conserver et de mieux jouer ce rôle l'IRMA se propose, tout en espérant pouvoir compter sur la communauté scientifique et les institutions financières pour l'aider à atteindre ce but d'adopter la stratégie suivante :

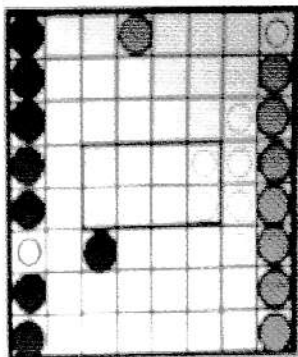
- poursuivre et formaliser la production de ludiciels à partir des jeux traditionnels,
- produire un CD-ROM pour consigner les résultats des jeux déjà étudiés,
- promouvoir l'enseignement supérieur en ethnomathématique,
- redéfinir les activités de l'atelier "Mathématiques dans l'environnement socioculturel africain" en vue de la création d'un centre de recherche ethnomathématique, etc.

Je terminerai en affirmant, d'une part, ma conviction sur les possibilités offertes par L'Ethnomathématique aux mathématiciens du sud et surtout aux utilisateurs de mathématiques de contribuer à l'évolution de la mathématique à partir de leurs traditions ou de leurs cultures, et d'autre part indiquer cette tentative que nous souhaiterions réaliser à terme et que nous pourrions dès maintenant qualifier "de concept ethno-informatique et qui étudierait la composante socioculturelle africaine en informatique". Nos expériences ont déjà permis de réaliser des ludiciels prototype des jeux de cauris, de l'Awalé, du Tiouk-Tiouk.

L'ensemble des décideurs des Africains devrait prendre conscience de l'opportunité qui est offerte aux ethnomathématiciens et aux ethnoinformaticiens et en favoriser la réalisation de leurs travaux.

"Contrairement à une idée reçue, les mathématiques ne constituent pas une science hermétique et neutre réservée à quelques spécialistes ou à ceux qui reçoivent un enseignement mathématique, mais une science présente dans la vie quotidienne de chacun d'entre nous, et dont presque toutes les activités humaines sont tributaires."

Dr Saliou TOURÉ
Abidjan, 1994



Réalités virtuelles et virtualités réelles

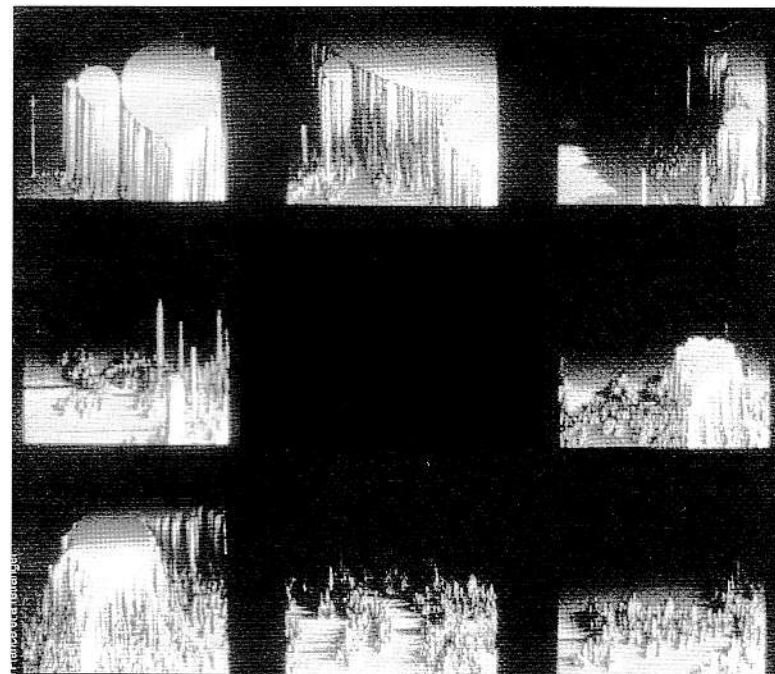
Jean-François COLONNA - Paris
GSV-Lactamme, Ecole Polytechnique

Jean-François COLONNA compare sa recherche en visualisation scientifique à un iceberg : la visualisation en est la partie émergée, et toute la partie immergée inclut la méthodologie de la programmation, la fiabilité des logiciels, coopération hétérogène et également la création artistique.

Les nombres : ombres de la réalité

Depuis plus de deux mille ans déjà, les mathématiques jouent, dans la quête de la connaissance, un rôle à part. Trop longtemps considérées comme un langage "simple", outil de formulation des lois de la nature, elles sont aujourd'hui de plus en plus comme une pensée permettant, par exemple, de prévoir l'existence d'une entité "physique" bien avant sa découverte expérimentale (les récents succès du Modèle Standard des particules élémentaires et de leurs interactions, ou encore ceux qui sont dus à la Relativité Générale, sont là pour nous le confirmer).

Enfin, suivant la tradition platonicienne, les nombres (sous-entendu les mathématiques), ombres de la réalité, ne sont peut-être que la seule connaissance de l'Univers accessible à l'homme, dont l'attitude dans ce domaine se doit d'être humble et modeste: l'Equation ultime (tout comme, par exemple, la dernière décimale de π) n'existe pas, et plutôt que d'envisager une science "asymptotique", qui s'approcherait toujours plus



de son but, il est nécessaire de la croire elle aussi "fractale" (figure 1), de nouveaux concepts et structures apparaissant sans cesse, au fur et à mesure de nos progrès...

L'expérimentation virtuelle

A côté de l'expérimentation que nous qualifierons de **laboratoire**, effectuée soit a priori (c'est l'observation des phénomènes naturels), soit a posteriori (pour vérifier le pouvoir prédictif de la déduction mathématique), se trouve l'expérimentation virtuelle (expression que nous préférons à "simulation numérique, ou encore à "expérimentation numérique", car d'une part elle rappelle la complémentarité de cette approche et des pratiques plus anciennes, et d'autre part, en évoque plus fortement l'énorme potentiel), rendue possible par les formidables progrès de l'informatique, tant au niveau des logiciels qu'à celui des matériels, et que John Von Neuman avait présentée et qu'il a utilisée dès la fin des années quarante.

fig 1: Le concept de Science fractale est illustré par huit agrandissements successifs d'une représentation tridimensionnelle de l'ensemble de Mandelbrot. Quel que soit le facteur d'échelle utilisé de nouveaux détails apparaissent, rendant par là même utopique, l'idée de visualiser sa frontière qui symbolise ici l'Equation ultime dont nous nions l'existence.

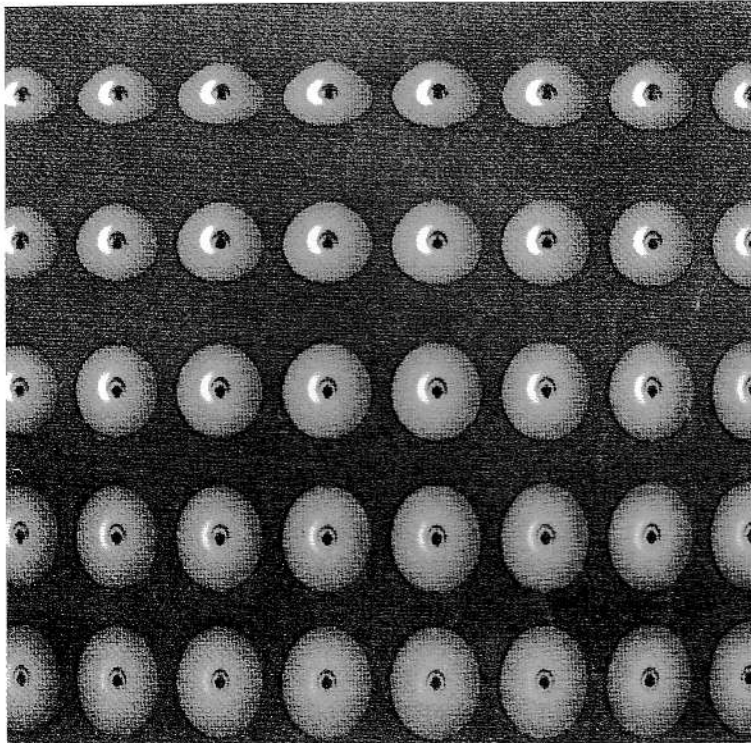


Fig 2 : La Relativité Générale, proposée par Albert Einstein en 1915, l'une des créations scientifiques les plus achevées, est aujourd'hui le cadre de la description des grandes échelles de l'univers.

Cette théorie prévoit l'existence d'objets extrêmement denses, et dont la masse est telle que rien, y compris la lumière, ne peut s'en échapper (sauf dans un cadre quantique). S'il n'est donc pas question d'observer directement ces objets "exotiques" (encore du domaine de la conjecture), il est possible de décrire des symptômes permettant d'en reconnaître la présence dans l'espace, l'effet dit "de lentille gravitationnelle". est l'un de ceux-là. Par exemple, des rayons lumineux en provenance d'une étoile lointaine, s'ils "frôlent" l'un de ces objets sur leur chemin vers la Terre, se verront déviés fortement (comme ils le seraient à l'intérieur d'une lentille optique). Cette courbure de leur trajectoire provoque la déformation de l'image de leur source. L'expérience virtuelle présentée sur cette image, et due à Jean-Alain Marck (observatoire de Meudon), montre soixante-quatre étapes du mouvement d'un observateur fictif décrivant une trajectoire circulaire l'amenant de l'axe de l'un des pôles d'un trou noir à son plan équatorial. Autour de celui-ci, un disque d'accrétion, à symétrie circulaire, gravite; lorsque l'observateur est sur l'axe des pôles (image en bas à droite), le disque lui apparaît tel qu'il le verrait autour d'un objet moins massif (Saturne, par exemple), bien que déjà, des images secondaires concentriques soient perceptibles. Mais, c'est lors du mouvement orbital, que les phénomènes "optiques" les plus "troublants" apparaissent, en particulier, une fois arrivés sur le plan équatorial (image en haut à gauche)... Ainsi armés, l'astrophysicien peut donc virtuellement expérimenter sur ces "gouffres du cosmos", comme probablement jamais il ne pourra le faire directement.

le modèle : approches formelle et numérique

Pour bien comprendre de quoi il s'agit, il faut rappeler, de façon pragmatique, ce qu'est un modèle. L'état du système étudié par un physicien, par exemple, est représenté par un ensemble de grandeurs (coordonnées spatio-temporelles, température, pression...) et son évolution quant à elle, est décrite par un ensemble d'équations reliant entre elles les différentes grandeurs caractéristiques. Une théorie scientifique n'ayant de sens, que réfutable, et d'intérêt, que prédictive, les équations du modèle doivent être manipulées résolues afin de jouer pleinement leur rôle créateur.

Deux approches complémentaires et non exclusives l'une de l'autre sont alors possibles: la première, formelle, est celle qui donne la solution "exacte et analytique", et qui est la plupart du temps, impraticable, voire impossible à mettre en œuvre, même dans les cas parmi les plus simples (par exemple le problème dit "des N corps", N étant strictement supérieur à 2); la seconde, dite numérique, procède par approximations (du système étudié, mais aussi des équations) et fournit ses résultats sous la forme de nombres.

Dans un cas comme dans l'autre, l'ordinateur est aujourd'hui un outil indispensable, tant au niveau de la manipulation formelle des expressions et des équations, qu'au niveau numérique, étant donné la complexité, voire la "monstruosité" des opérations à réaliser.

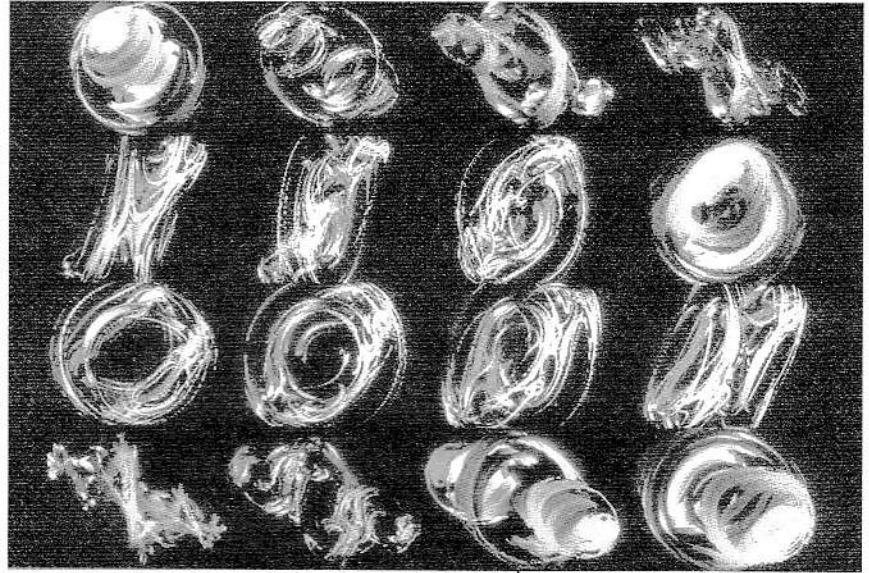
De l'usage de l'image numérique

Une expérience virtuelle produit donc comme résultat des nombres. Notons au passage, que cela est de plus en plus vrai des expériences de laboratoire : en une fraction de seconde, un accélérateur de particules génère des millions de mesures.

Le problème que nous allons évoquer ci-dessous, et les solutions que nous allons présenter, se transposent immédiatement dans ce contexte. En général, la quantité de ceux-ci est telle, que leur analyse sous une forme alpha-numérique est impensable et même absurde.

Par exemple, lors d'une exécution en machine d'un code de simulation de la turbulence bidimensionnelle, dans un domaine carré échantillon né par un million de points, le nombre de décimales obtenues est de l'ordre du milliard, ce qui imprimé, représenterait approximativement un volume équivalent à un millier d'annuaires téléphoniques !

Le passage par la production d'images synthétiques animées est alors incontournable. Nous pouvons, dans ces conditions, définir d'une façon pragmatique l'Expérimentation Virtuelle comme étant la réalisation de mesures sur un modèle mathématique résidant dans la mémoire d'un système informatique, et l'analyse de celles-ci par le biais de la production d'images synthétiques animées et en couleurs. Cette approche place le chercheur dans une boucle de rétroaction, où le sens de la vision joue un rôle privilégié, celui-là même qui est fort probablement à l'ori-



Transformation d'un ensemble de Julia

Un ensemble de Julia dans le corps des quaternions est paramétré par un point A . Cet objet fractal est obtenu par le processus itératif suivant :

En chaque point Q de l'espace, la suite : $q_{n+1} = q_n^2 + A$, avec $q_0 = Q$, est définie. Lors de cette itération, deux cas se rencontrent :

1- Le point q_{n+1} reste à distance finie de l'origine.

On dit que le point courant Q appartient à l'ensemble de Julia .

2) Le point q_{n+1} s'éloigne à l'infini.

On dit que le point courant Q n'appartient pas à l'ensemble de Julia .

Par rapport aux résultats obtenus de façon similaire dans le plan complexe, la difficulté vient ici de la représentation visuelle ; en effet, l'objet calculé réside dans un espace à 4 dimensions, qu'il n'est donc pas question de visualiser directement. Ici sont présentées 16 coupes tridimensionnelles par l'hyperplan XYZ, obtenues au cours d'une rotation de 2π autour de l'axe OY.

gine de la curiosité scientifique.

En plus de permettre cette mise en forme de résultats fournis "en vrac", la production d'images de synthèse fait apparaître d'autres avantages fondamentaux.

En particulier elle facilite la mise au point de la validation des modèles ; elle simplifie la communication scientifique et pédagogique, en particulier en ce qui concerne la compréhension de concepts abstraits. Mais c'est aussi un fabuleux outil de découverte : en effet, de ces images surgisse sous l'œil du chercheur ou de l'ingénieur des formes, bien souvent imprévues et imprévisibles (donc non programmables à priori, qui seront pour lui des indices de régularités sous-jacentes ou bien de pistes à suivre.

Heinrich Hertz faisait remarquer il y a un siècle déjà :

" on ne peut échapper au sentiment que ces formules mathématiques ont une existence qui leur est propre, qu'elles sont plus savantes que ceux qui les ont découvertes, et que nous pouvons en extraire plus de science qu'il n'en a été mis à l'origine ".

Enfin, il s'agit là d'un instrument révolutionnaire (comme le furent, en leur temps, le télescope et le microscope, mais placé à un niveau supérieur, tel qu'en fait, il soit qualifiable de "méta-instrument") qui permet l'observation, mais aussi, et surtout, la manipulation d'objets qui autrement seraient hors de notre portée et hors de notre regard.

C'est ainsi que l'astronome peut aujourd'hui "jongler" avec les trous noirs (fig 2), qu'à l'autre bout de l'échelle, le physicien est capable d'observer la structure en quarks du proton (fig 3) : l'homme de science étudie alors ses propres réalités virtuelles. Mais ces mêmes outils permettent à l'artiste de visiter de nouveaux univers (fig 4) : des virtualités réelles, encore tapies dans la mémoire de nos machines, n'attendent qu'à être explorées.

Quelle informatique pour l'expérimentation virtuelle ?

Ainsi se trouve donc posé le problème de la définition et de la mise en œuvre du système informatique permettant, en particulier, la concrétisation de ce concept, tout en assurant la pérennité des développements alors réalisés. Au préalable, il convient de

faire un inventaire des idées sous-jacentes, et qui correspondent aux grandes tendances de l'informatique d'aujourd'hui, et auxquelles il est essentiel de souscrire :

- l'existence de normes logicielles et matérielles,
- la notion de système réparti reposant sur celle de réseau (ou mieux de réseaux),
- l'interactivité,
- la maturation du calcul parallèle,
- la production d'images animées et en couleurs,
- la simulation possible de certains processus cognitifs.

En une quarantaine d'années, les progrès accomplis dans ce domaine furent les plus foudroyants que notre technique ait jamais connus : hier, un millier d'opérations par seconde demandaient plusieurs dizaines de tonnes de matériels surveillés par une armée de "grands prêtres" détenteurs du savoir et des rites à accomplir, alors qu'aujourd'hui quelques grammes donnent au néophyte une puissance de calcul dix mille fois supérieure ! Mais certainement le fait le plus marquant de ces dernières années réside dans la notion " récursive " de réseau. Elle peut être définie comme étant la possibilité de connecter entre elles des machines, généralement distantes l'une de l'autre, afin de les faire coopérer dans l'accomplissement d'une certaine tâche ; nous la qualifions de " récursive ", puisque, d'une part, de plus en plus d'ordinateurs, sont eux-mêmes conçus sous forme de réseaux d'entités plus élémentaires, et que d'autre part, les réseaux, à une certaine échelle sont eux-mêmes fédérés en systèmes plus vastes. Ainsi, aujourd'hui, il n'y a pratiquement plus, de par le monde, de

machines à vocation "professionnelle" isolées : leurs utilisateurs peuvent atteindre, pour effectuer des opérations diverses, et sous réserve d'obtenir les autorisations nécessaires (notons que le problème de la sécurité est l'un des plus délicats qui soit actuellement), des ordinateurs situés aux antipodes.

Un nouveau niveau de réalité virtuelle apparaît alors : celui du cadre de travail du chercheur (ou de l'ingénieur) : son bureau, son laboratoire ou bien encore sa bibliothèque, deviennent à leur tour virtuels.

Par l'intermédiaire d'un poste de travail (qui peut être qualifié de multimédia, parce que présentant des informations provenant des sources les plus variées : systèmes d'expérimentation virtuelle, banques de données, chaînes de télévision, canaux de télécommunications, ...), et pour mener à bien son travail et sa recherche, il va pouvoir utiliser les ressources qui lui sont nécessaires, où qu'elles résident.

Mais, de plus, il va être à même de communiquer avec ses homologues, dans un gigantesque continuum asynchrone à l'intérieur duquel les idées se brasseront, et d'où, plus de lumière

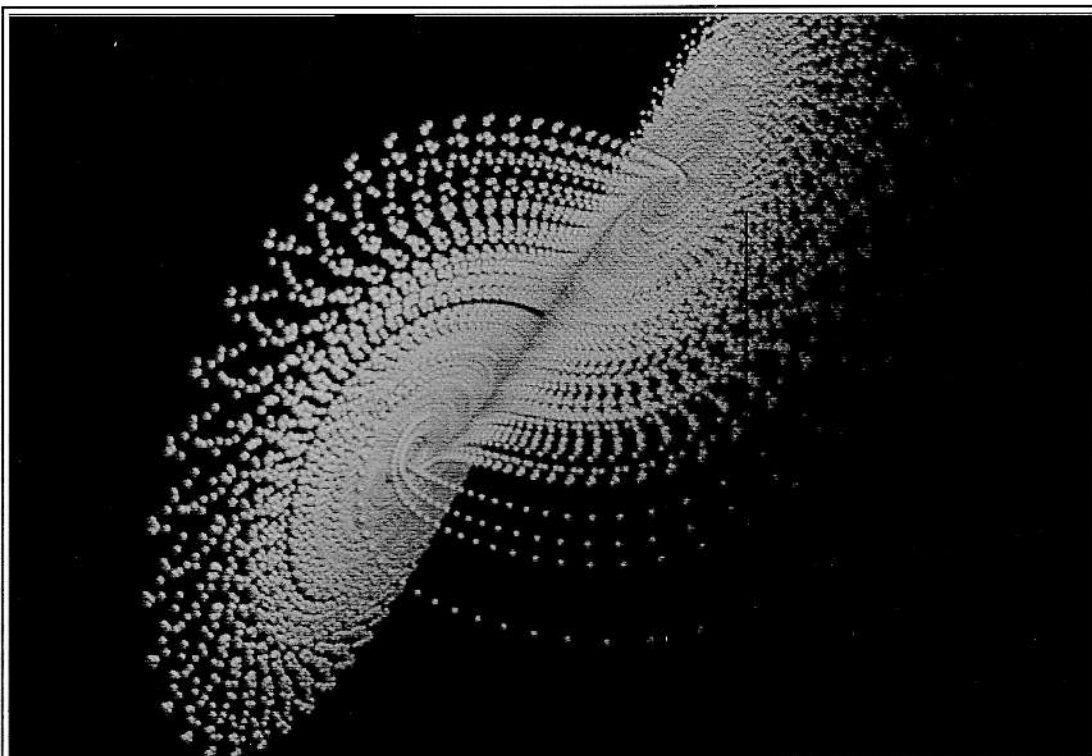


Figure 3 : Longtemps considérés comme élémentaires, **les protons et les neutrons** en particulier, sont aujourd'hui décrits en tant qu'objets composés. Le modèle, dit "standard", des particules et de leurs interactions repose sur les bosons (les "vecteurs des forces") et les fermions la "matière" ; dans cette dernière catégorie se trouvent les leptons et les quarks. Cette image nous montre un proton tel qu'il est défini dans ce modèle : il est constitué de trois quarks "réels" (situés au sommet d'un triangle équilatéral fictif assez apparent sur cette image) et d'une "mer" de particules "virtuelles" (quarks, anti-quarks et gluons) nées des fluctuations quantiques du vide, et qui se concentrent statistiquement au voisinage de quarks réels suivant leurs couleurs (la couleur étant une notion similaire à celle de charge électrique, mais n'ayant bien entendu rien à voir avec ce que nous appelons communément "couleur"). Les sphères représentent les quarks et les anti-quarks, alors que les cylindres symbolisent les gluons, bosons responsables de l'interaction forte (l'une des quatre forces fondamentales). Ainsi par l'intermédiaire de ces nouveaux outils, toutes les échelles actuellement connues dans l'univers sont accessibles à nos yeux, mais aussi à nos mains... (ici l'attracteur de Lorenz (JFC))

jaillira. Ainsi, l'homme peut enfin accéder, par les techniques qu'il a su développer, à l'ubiquité, ubiquité donc mais à l'intérieur de plusieurs niveaux de réalités virtuelles : celles de ses espaces de vie et de travail, mais aussi celles contenant l'objet de ses études et de ses recherches.

Enfin, ces mêmes outils, non confinés dans l'espace de la recherche scientifique, envahiront (et envahissent déjà...) d'autres domaines, et en particulier celui de la création artistique ; au-delà des problèmes alors soulevés (non unicité de l'œuvre, absence de support "noble", multipropriété artistique, l'ordinateur : outil non neutre, l'ordinateur

: outil ou créateur ?...), il convient de voir et d'imaginer les utilisations qui pourraient en être faites.

En particulier, des artistes, répartis de par le monde, auront la possibilité de coopérer à des œuvres collectives et dynamiques, et pourquoi pas, avec la collaboration des techniques spatiales, à la création de sculptures monumentales qui éclaireraient nos nuits ? Et si aujourd'hui, une fraction importante de la masse monétaire mondiale circule continuellement et immatériellement, peut-être en sera-t-

il de même, demain, pour une partie de notre patrimoine culturel, naviguant ainsi à la vitesse de la lumière de continent en continent, d'étoile en étoile...

Que sera demain ?

A court terme, l'objectif est d'aboutir à un système délocalisé, où spontanément les tâches à effectuer, se réaliseront sur le système le plus apte ou le plus disponible. Ainsi, pour donner un exemple simple, la visualisation et l'interaction auraient lieu sur une station de travail, alors que la résolution des équations se ferait sur un super-ordinateur, et ce de façon totalement transparente à l'utilisateur.

L'existence de réseaux de plus en plus rapides (des réseaux expérimentaux offrent déjà en laboratoire des débits de plusieurs dizaines de milliards de bits par seconde) permettra littéralement de voir vivre le modèle, et d'interagir avec lui, autorisant par là-même la réalisation d'expérience interactives sur lui. En ce qui concerne l'aspect strictement visualisation, des progrès énormes sont à attendre bien entendu de la manipulation de plus en plus rapide de modèles tridimensionnels, mais aussi de l'usage qui sera fait de la télévision haute-définition et des dispositifs stéréoscopiques.

La notion de réalité virtuelle, développée dans d'autres domaines (la simulation de conduite par exemple), et introduite dans ce contexte, permettra au chercheur comme à l'ingénieur de s'intégrer davantage à son modèle, en facilitant ainsi sa compréhension; il convient de ne pas oublier qu'ici, contrairement aux applications artistiques ou de type CAO, de la synthèse d'images, les "objets" étudiés sont bien souvent

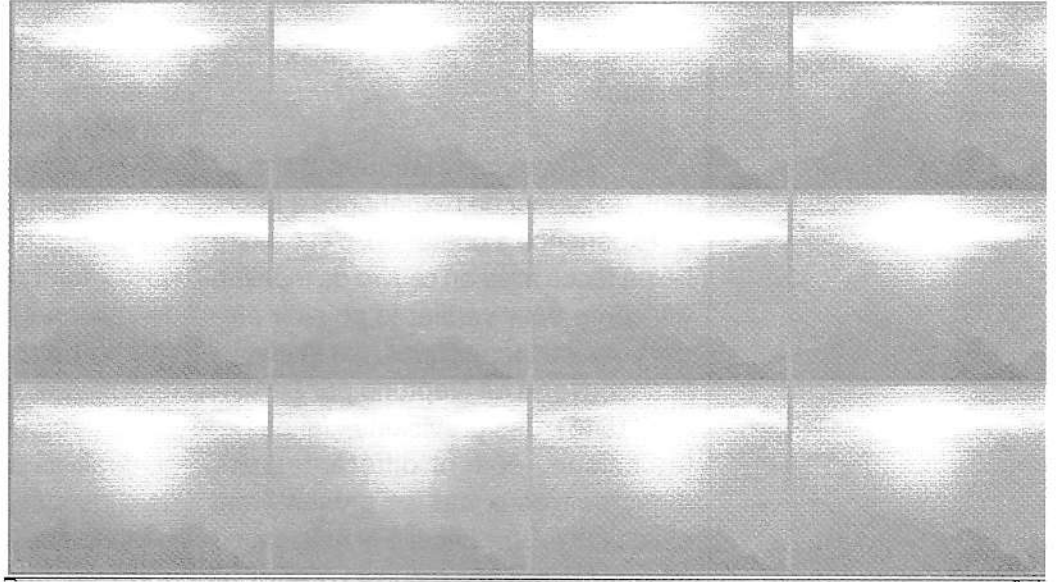


figure 4 : La géométrie fractale, récent outil mathématique conçu par Benoit Mandelbrot, permet de modéliser et de décrire de nombreux phénomènes jusqu'ici sans aucun point commun. C'est ainsi que les fluctuations des cours de la bourse, le front d'avancée d'un incendie de forêt, ou encore la limite entre deux milieux diffusant l'un dans l'autre, peuvent aujourd'hui être décrits à l'aide du même langage. Elle permet la modélisation de nombreux phénomènes naturels, et constitue donc un outil puissant pour la synthèse d'image. Nous voyons ici un paysage complètement "imaginaire" et calculé à partir d'équations, qu'il s'agisse du relief, ou bien des nuages et de la brume. Des développements récents, dus à l'auteur, permettent de plus de décrire la dynamique de ces phénomènes, et ainsi de générer des films les présentant. L'artiste peut alors détourner ces outils, faire des mathématiques une matière malléable, nouveau marbre ou nouvelle glaise, et créer des univers proches de notre quotidien ou bien "diamétralement" opposés (si tant est que nous puissions connaître le méta-univers qui les contient tous...) et nous les offrir en tant que réalités virtuelles à explorer...

éloignés du sens courant, voire n'ont aucune image "naturelle" (une impression tout simplement...), ou à la limite, sont "interdits de représentation" (en mécanique quantique en particulier) ; il est alors nécessaire de donner à l'expérimentateur le maximum de facilités pour l'aider à comprendre les résultats obtenus. Dans ce domaine, les techniques de l'intelligence artificielle nous seront fort probablement d'un grand secours : bien entendu au niveau de l'interface homme-machine, mais aussi dans l'aide à l'analyse et à la présentation des résultats (par exemple, le problème du choix des couleurs, dans ce contexte, est, contrairement à l'intuition, extrêmement délicat : quelques règles de bon sens peuvent aider...).

et après-demain ?

S'il est difficile d'imaginer l'impact à moyen et long termes de l'informatique, et de ses derniers développements (disques optiques, systèmes multimédia, synthèse d'images, production de sons,...), dans des domaines familiers, comme celui de l'enseignement, il est encore beaucoup plus délicat de le faire dans celui de la recherche scientifique (et a fortiori dans le monde de l'art). En effet, la Science définit notre vision rationnelle de l'univers, et la place que l'homme y occupe. Celles-ci subissent au cours des siècles de nombreux bouleversements : le génie de



Platon, Copernic, Newton, Einstein, pour ne citer qu'eux en fut responsable. Aujourd'hui, leurs successeurs utilisent des outils dont ne disposaient pas leurs glorieux ancêtres, et qui vont leur permettre de porter plus loin leur regard et plus haut leurs gestes, et ouvrir ainsi tout grand, les portes d'une nouvelle révolution copernicienne.

Expérimentation réelle, expérimentation virtuelle

L'activité du chercheur ?

Il y a trois points fondamentaux qui s'imbriquent les uns dans les autres : l'observation, l'expérimentation, la modélisation.

Le scientifique essaie de construire une vision objective, de transmettre la connaissance et de prévoir l'occurrence de nouveaux phénomènes. L'activité de modélisation repose sur les outils mathématiques et est ici illustrée par trois exemples dont un sera développé : le calcul intégral avec Leibnitz et Newton, la théorie des groupes avec Galois et la géométrie fractale avec Mandelbrot (importante en Physique et

Fig 5 : Les différentes étapes d'un lever de Soleil sur fond de montagnes. JFC.

dans le domaine de la création graphique).

Les mathématiques permettent, de passer de l'expérience a priori, à l'expérience a posteriori, c'est-à-dire l'expérience mise en œuvre de manière délibérée pour vérifier le pouvoir prédictif des mathématiques, par exemple, la découverte de Neptune par Le Verrier (1846). Les prévisions, faites par les calculs, étaient différentes des mesures : deux cas se présentèrent alors pour lui, renoncer à la mécanique de Newton et à ses résultats positifs ou bien l'accepter, mais supposer que quelque chose est ignoré: il existe un corps inconnu, ce qui aboutit à la découverte de Neptune. Cette méthode ne fut pas applicable à Mercure, on arriva sur la théorie de la relativité d'Einstein.

L'expérimentation "réelle" possède donc des limites, d'où l'introduction de l'expérimentation virtuelle. Par l'expérimentation virtuelle, on étudie le modèle d'un objet "réel" ou non, et non pas l'objet ; il faut que le modèle produise des prédictions. Pour cela, il est placé dans une machine, sous forme d'un programme qui produit des mesures sous forme de nombres et il y a un traitement de ces nombres. De plus si l'expérimentateur le souhaite, il pourra agir sur le modèle.

Les dangers

De nombreux dangers résultent de cette approche :

- Le danger relatif à la machine d'exploitation : ces machines n'ont ni les mêmes compilateurs, ni les mêmes processeurs.

- Le danger relatif à la qualité des logiciels : étant donnée leur complexité, il y a forcément des erreurs, les résultats doivent être discutés, cela fait appel à la méthodologie de la programmation. Un ordinateur fonctionne avec un nombre fini d'entiers et un nombre fini de rationnels sur lesquels la multiplication et la division ne sont pas internes (problèmes des chaos déterministes, systèmes stables et non stables). En général, les erreurs d'arrondis n'ont pas de conséquences, mais à ce niveau de la recherche, elles en ont, et ces conséquences peuvent être dramatiques.

- Il y a également perte de l'associativité et de la distributivité des opérations, etc..

Quelques exemples

Un premier exemple simple :

$$3.14 \times (2.71 \times 2.71)$$

$$= 23.04$$

et

$$(3.14 \times 2.71) \times 2.71$$

$$= 23.03 !!!$$

Voici un autre exemple:

la dynamique de Vethulst (chercheur biologiste du XIXe siècle qui étudia l'évolution de populations animales). Il s'agit d'une méthode itérative donnée par la formule :

$$X_{n+1} = (R+I)X_n - RX_n^2$$

On peut envisager différentes écritures possibles mais équivalentes théoriquement pour la programmation :

$$(1) X_{n+1} = (R+I)X_n - R(X_n X_n)$$

$$(2) X_{n+1} = (R+I)X_n - (RX_n)X_n$$

$$(3) X_{n+1} = ((R+1) - RX_n)X_n$$

$$(4) X_{n+1} = RX_n + (1-RX_n)X_n$$

$$(5) X_{n+1} = X_n + R(X_n - X_n X_n)$$

On remarque, après programmation

des cinq formules, qu'au bout d'une itération, les résultats sont identiques et qu'au bout de soixante-dix, il n'y a plus aucun rapport entre eux !!! Le problème serait le même en augmentant la précision de la machine, il n'apparaîtrait que quelques itérations plus loin, car on est en présence d'un cas non linéaire.

On perçoit ici le problème des opérations élémentaires, suivant le compilateur, leur traduction peut être changée, ou en changeant tout simplement le système, la même programmation, sur la même machine, peut donner des résultats très différents, d'un jour à l'autre.

Lors d'activité de "coopération hétérogène", on fait travailler ensemble des ordinateurs incompatibles entre eux, venant de fournisseurs différents; par exemple sur la factorisation des grands nombres entiers par six cents machines différentes.

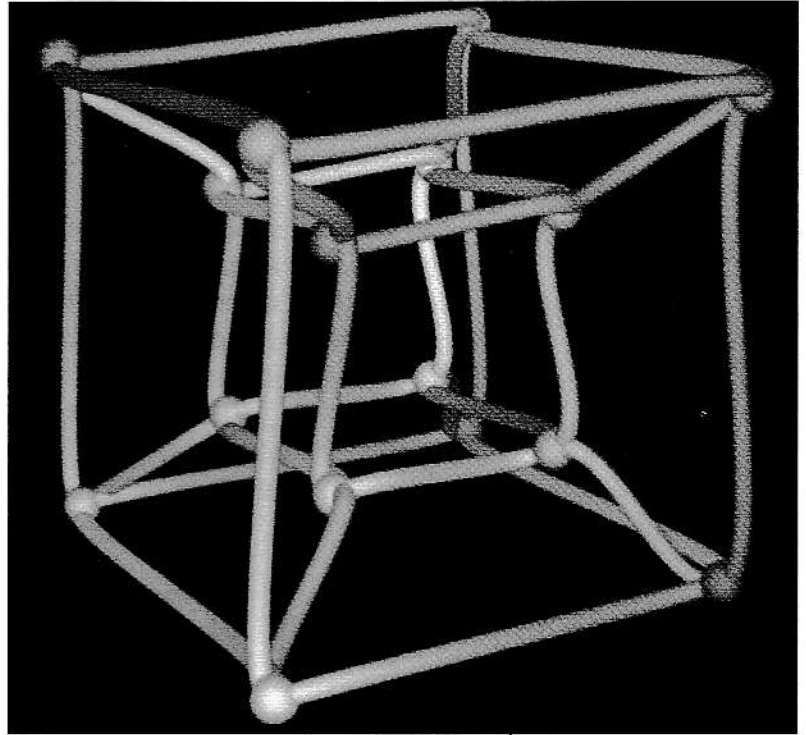
- Le danger de confondre le modèle avec l'objet, alors que le modèle est forcément incomplet par rapport à la réalité.

- Le danger relatif aux filtres : lorsque les résultats sont présentés en image, il peut y avoir des anomalies, des défauts.

- Le danger relatif à l'action : les résultats obtenus peuvent être incompatibles avec le modèle choisi.

En effet, si on prend pour modèle la mécanique Newtonienne, on ne peut introduire dans les calculs des vitesses trop élevées, incompatibles avec celle-ci.

Tous les dangers cités se cumulent les uns les autres, d'où la difficulté !



Hypercube
psychédélique. JFC.

Qu'est-ce que l'expérimentation virtuelle ?

C'est la mise en œuvre d'un modèle de systèmes et d'un modèle de visualisation, tout en y intégrant l'expérimentateur.

Le volume des résultats bruts impose généralement la production d'images de synthèse, on a souvent un milliard de résultats (ce qui représente un millier d'annuaires téléphoniques !) et cette situation se retrouve de plus en plus fréquemment dans les expériences réelles, c'est le cas, par exemple, pour les accélérateurs de particules ou les télescopes.

L'image est ainsi un formidable objet de découverte et un instrument révolutionnaire.

Si vous voulez en savoir plus sur les travaux de Jean-François Colonna, consultez son site plein d'images :

www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/descripteurs/ExpV_VirE.Fra.html

Faites l'expérience !!!

Faites l'expérience suivante, facile à réaliser avec n'importe quelle calculatrice ou ordinateur : donnez-nous une valeur X_n , puis calculez "itérativement" les valeurs X_1, X_2 à l'aide de la formule $X_{n+1} = (R+I)X_n - RX_n^2$ où n prend donc successivement les valeurs 0. 1. 2 et où la constante R vaut 3.

Mathématiquement parlant la formule précédente est équivalente à chacune des cinq formules en entrée des deux tableaux ci-dessous qui donnent les valeurs de X_n calculées sur deux ordinateurs différents (mais dits compatibles). Malheureusement, à cause des erreurs d'arrondi, cela n'est plus vrai informatiquement parlant comme on peut le constater.

IBM ES9000					
formule 1	formule 2	formule 3	formule 4	formule 5	n
0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0
0,384631	0,384631	0,384631	0,384631	0,384631	10
0,418895	0,418895	0,418895	0,418895	0,418895	20
0,046399	0,046399	0,046399	0,046399	0,046399	30
0,320185	0,320183	0,320188	0,320182	0,320189	40
0,063406	0,064521	0,061895	0,064941	0,061244	50
1,040381	0,846041	0,529794	1,319900	1,214070	60
0,004104	1,199452	0,873553	0,573637	0,000009	70
0,108044	0,121414	1,260726	0,395871	0,280590	80
0,096374	0,089244	0,582157	0,344503	1,023735	90

IBM RS6000					
formule 1	formule 2	formule 3	formule 4	formule 5	n
0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0,500000	0
0,384631	0,384631	0,384631	0,384631	0,384631	10
0,418895	0,418895	0,418895	0,418895	0,418895	20
0,046399	0,046399	0,046399	0,046399	0,046399	30
0,320177	0,320184	0,320188	0,320190	0,320189	40
0,067567	0,063747	0,061859	0,060822	0,061486	50
0,001145	0,271115	0,616781	0,298613	1,307350	60
1,296775	1,328462	0,486629	0,938605	1,054669	70
0,553038	0,817163	1,277151	1,325437	0,617058	80
1,094852	0,154184	1,174162	0,148151	0,237355	90

30

Le problème vient de toute évidence du fait que nous cherchons à manipuler ce que le mathématicien appelle les nombres réels, avec une machine que ne connaît qu'un nombre fini de nombres décimaux (sur lesquels il commet de plus des erreurs d'arrondi...).

Ainsi clairement, l'ordre dans lequel les opérations sont effectuées peut dans certains cas influe considérablement sur les résultats produits.

Cela peut aller, comme c'est le cas ci-dessus, jusqu'à nous donner des résultats qui sont tout simplement faux. Ce sera illustré visuellement à l'aide de l'attracteur de Lorenz où nous montrons trois ordinateurs résoudre simultanément le même problème à l'aide d'un seul programme.

Or malheureusement, l'exemple ci-dessus pourrait malgré

tout laisser croire que le programmeur reste maître d'imposer un certain ordre aux opérations arithmétiques : il n'en est rien.

D'une part les traducteurs de langages (ou compilateurs) et les plus récents microprocesseurs eux-mêmes manipulent cet ordre en permanence ! Il est ainsi possible d'imaginer un programme parfaitement déterministe et qui, malgré cela, ne donnerait pas deux fois de suite les mêmes résultats alors que l'ordinateur utilisé n'aurait changé en aucune façon.

Fractales et rugosités

Benoît Mandelbrot, Université de Yale

Benoît Mandelbrot, mathématicien, a fait naître et connaître les fractales et les a rendues très populaires.

Nous retranscrivons ici l'extrait de sa conférence «L'anneau fractal de l'art à l'art à travers la géométrie, la finance et les sciences» prononcée le 28 juin dans le cadre de l'Université de tous les savoirs. La totalité de sa conférence sera publiée dans la Collection UTLS chez Odile Jacob en 2000 ou 2001.

On pense aux sorciers et aux fées quand une idée en apparence insignifiante se met soudain à produire à flot des conséquences variées et importantes. Pour introduire et faire comprendre les fractales, demandons-nous donc si un objet géométrique peut prendre la même forme qu'on l'examine de près ou de loin. Cette propriété fut récemment baptisée autosimilarité.

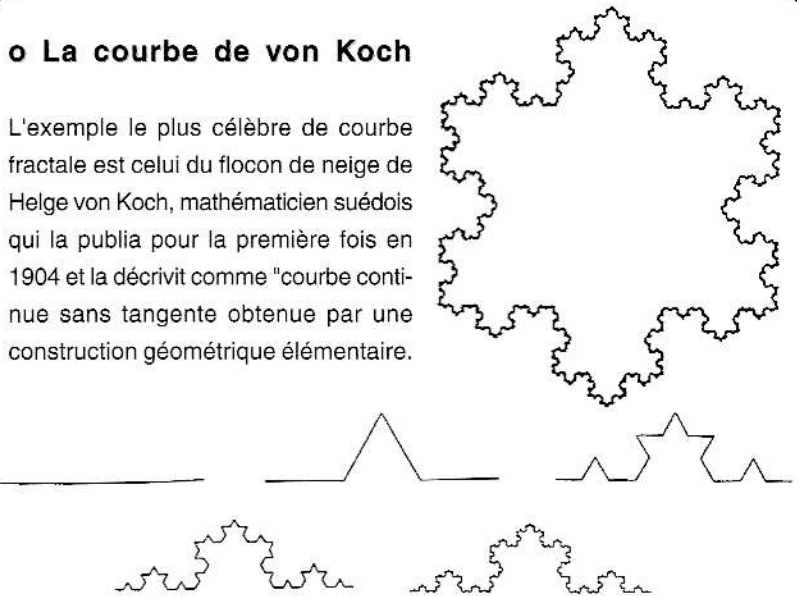
Elle semble d'une parfaite insipidité, mais c'est la graine d'une floraison de développements constituant toute une géométrie. Insipidité est également le terme approprié pour dénoter la droite et le plan idéaux, qui sont des exemples d'autosimilarité connus de tout le monde. En revanche, la sphère n'est pas autosimilaire ; quand on la regarde de près, en étant dessus, elle paraît plate ; de loin, comme tout objet borné, elle paraît ponctuelle.

Il y a 100 ans

Il y a cent ans, de 1875 à 1925, des mathématiciens perspicaces prirent conscience d'une poignée de curiosités ou monstres, objets qu'ils présentèrent comme nouveaux, sans contrepartie dans la nature et contredisant l'intuition géométrique. Certains

o La courbe de von Koch

L'exemple le plus célèbre de courbe fractale est celui du flocon de neige de Helge von Koch, mathématicien suédois qui la publia pour la première fois en 1904 et la décrivit comme "courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire.



À partir d'un segment de longueur un, remplaçons le tiers central par deux segments de même longueur que lui. Au bout de cette première étape, nous obtenons une nouvelle figure. Nous pouvons itérer ce procédé indéfiniment en subdivisant chaque fois les segments en trois parties dont la partie centrale est remplacé par deux segments de même longueur qu'elle. Cette courbe est autosimilaire et donc fractale car elle reste identique à elle-même quand on la dilate avec un grossissement égal à une puissance de trois.

La figure ci-dessus montre les cinq premières étapes de la construction de la courbe de von Koch et ce qu'il en advient lorsque l'on répète le processus sur les 3 côtés d'un triangle équilatéral.

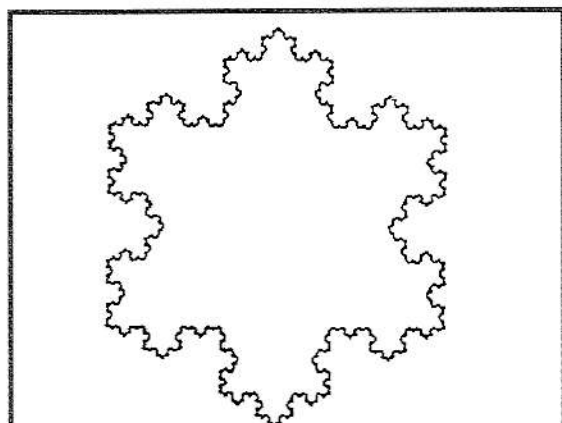
de ces objets étaient autosimilaires, car cette qualité les rendait plus faciles à décrire.

Beaucoup plus tard, j'allais les séparer des autres curiosités en question, vouer ma vie scientifique à leur étude, et les baptiser des «fractales».

le lisse et le rugueux

Cette chronique brossera à grands traits chacune des 3 grandes étapes récentes de l'étude des fractales.

En premier lieu, surprise absolue et plus grand bonheur intellectuel de ma vie, je reconnus à ces monstres un autre rôle tout à fait nouveau.



Le flocon de von Koch

Il a la propriété d'être de longueur infinie mais l'aire qu'il délimite vaut seulement $8/5$ de la surface du triangle de départ. En effet, à chaque étape de la construction, chaque côté de la figure est remplacé par une figure de longueur $4/3$ fois plus grande. Le processus répété indéfiniment prouve que la longueur du flocon devient infinie. En comptant la surface des triangles créés à chaque étape, on peut démontrer également, par un simple raisonnement, par récurrence, que la surface de la courbe engendrée après n constructions est égale à $[8/5 - 3/5 \cdot (4/9)^n]$ pour un triangle équilatéral initial d'aire unité.

Ainsi par passage à la limite, le flocon de von Koch délimite une surface finie limitée par une courbe de longueur infinie.

On les qualifiait imprudemment d'« exceptionnels ». Je montrai, tout au contraire, que la fractalité n'est pas loin d'être la règle dans la nature. Selon le cas, elle ne concerne que des détails ou touche à l'essentiel.

Cette thèse osée et interdisciplinaire provoquant l'incrédulité, il faut la préciser et la rendre « naturelle ». Le point essentiel est que la droite et le plan sont parfaite-

ment lisses, mais en règle presque générale les choses sont loin de cet idéal : non pas lisses mais rugueuses dans le détail ou dans l'essentiel.

Songons maintenant à l'ensemble des messages que nous recevons de nos sens. Ceux de la vue et l'ouïe, considérés comme raffinés, se trouvent également avoir été le plus tôt et les mieux explorés ; c'est peut-être une façon de constater qu'ils étaient (très relativement parlant !) les plus faciles à explorer.

A l'autre extrême, le sens du lisse ou du rugueux restait en dehors des sciences. Il appartenait au monde de la mécanique pratique des frottements dont les ingénieurs cherchent à se débarrasser.

Il semblait impossible d'en extraire un quelconque concept. Les ques-

tions que posait la rugosité n'étaient pas sottes, mais inabordables. Faute de mieux, elles ne recevaient que des réponses évasives et inadéquates. Par exemple, songez aux questions incontournables que voici :

- Comment mesurer la rugosité ou volatilité des chroniques boursières, ne serait-ce que pour pouvoir évaluer les risques financiers de façon réaliste ?
- Comment mesurer la côte de la Bretagne ?
- Comment caractériser la forme d'une côte, d'une rivière, d'une ligne de partage des eaux ou de la frontière d'un bassin d'attraction dans le contexte de l'hydraulique, mais aussi des systèmes dynamiques ?
- Comment définir la vitesse du vent en plein orage ?
- Comment mesurer et comparer les rugosités d'objets communs tels qu'une pierre cassée, un talus, une montagne ou un bout de fer rouillé ?
- Quelle est la forme d'un nuage, d'une flamme ou d'une soudure ?
- Quelle est la densité des galaxies dans l'Univers ?
- Comment varie l'activité sur le réseau Internet ?

A toutes ces questions (ou fragments de questions), c'est la géométrie fractale (continué par la multifractale) qui allait apporter les premières réponses satisfaisantes.

Dans chaque cas, les réponses se fondent sur la qualité - elle-même surprenante - que la rugosité se trouve souvent être fractale. Dans beaucoup de phénomènes naturels ou créations de l'homme telles que la Bourse ou Internet, cela permet à la géométrie fractale de devenir la rampe de lancement de la première théorie du rugueux « simple ».

Arts et fractales

Pour résumer, et apaiser toute inquiétude que les fractales auraient pu susciter, cette nouvelle géométrie, je la fis naître de l'union entre une certaine mathématique ésotérique et le plus grossier de nos sens.

Elle dura, fructifia, s'imposa et ne manquera jamais de problèmes à traiter. De plus, son domaine s'étendit, d'abord à l'aval, puis à l'amont de mes travaux scientifiques.

A l'aval, elle conduisit à un deuxième étonnement absolu, cette fois esthétique. Les nouvelles images fractales, fruits sans nombre de ce qui avait d'abord paru une mésalliance, et dont l'accouchement se fit dans un centre informatique, furent de plus en plus largement perçues comme belles ou tout au moins hautement décoratives.

L'ensemble de Mandelbrot vient inévitablement à l'esprit. Une formule ancienne, paraissant d'une parfaite insipidité, se révéla la source d'images fantastiques qu'on voit désormais partout, à tel point qu'elles se fondent dans l'univers visuel de l'humanité. Elles ne vont pas subir le sort commun des modes.

Selon la belle expression de mon ami le regretté Marcel Paul Schutzenberger, elles marquent un nouveau style.

L'aval de la géométrie fractale s'ajoutant désormais à son étrange interdisciplinarité, l'incrédulité renaît sous une forme plus forte encore. La géométrie fractale jouant à la fois tant de rôles divers, comment se fait-il qu'elle n'ait que vingt-cinq ans d'âge ?

Que les premières « protofractales » n'en aient que cent ?



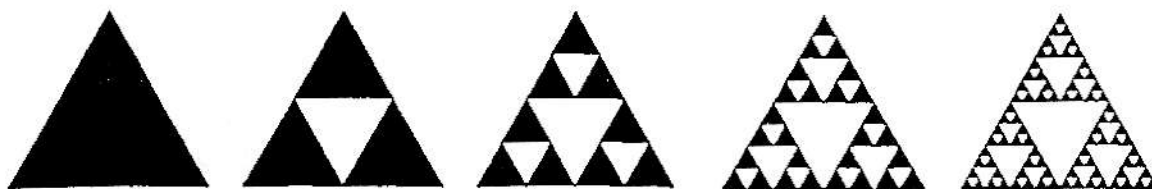
Avoir déclenché tout cela (la chance d'être l'homme qu'il fallait, quand il fallait et où il fallait) est un privilège merveilleux qui doit être accepté avec humilité. Dès mon livre de 1975, et surtout le livre anglais de 1982, la géométrie fractale s'est littéralement et tout à fait spontanément envolée.

Mais je n'ai jamais eu la présomption d'avoir « inventé » tout ceci ex nihilo. Tout au contraire, je cherchais des précurseurs (Gustave Eiffel?) dont je me plaisais à citer des phrases sans suite, mais parmi eux aucun ne pouvait être perçu comme ultime « inventeur ».

Quelle corde sensible de l'humanité avait-elle donc attendu que je la fasse résonner ?

Résolvant ce grand mystère, une troisième surprise apparut et se plaça à l'amont de mes travaux. Mes ouvrages me valurent beaucoup de lecteurs de tous bords et un courrier abondant plein de variété et d'enseignements. Voici ce qui en ressort.

Dans l'histoire des fractales, la période 1875-1925 reste un moment



o Le triangle de Sierpinski

Cet ensemble fractal utilise comme figure de départ un triangle équilatéral. En utilisant les milieux de ses côtés, on définit ainsi un nouveau triangle central que l'on enlève au triangle initial permettant d'obtenir la figure après la première étape. Il suffit d'appliquer ce procédé aux trois triangles restants pour obtenir la figure suivante. En itérant ce procédé une infinité de fois, on obtient ainsi le triangle (ou fanion) de Sierpinski que l'on retrouve dans la manipulation "Coloriages fractals" de l'exposition **"Maths 2000"** qui utilise des propriétés du triangle de Pascal.

fort, spécialisé et trompeur. Mais il semble bien que l'on ne puisse identifier quelque commencement que ce soit.

Précisons que les fractales sont des formes telles que, indépendamment des sens que l'on donne aux mots, le détail reproduit la partie et la partie reproduit le tout. Pour s'en assurer, divers procédés commencent par tracer les grandes lignes d'une figure, puis utilisent un générateur pour ajouter des détails de plus en plus petits. Il est donc essentiel d'avoir une progression sans fin, idée familière aux théologiens.

Dans le bouddhisme zen, on trouve le thème (repris par Leibniz) de la goutte de rosée dans laquelle est incluse en miniature tout une réplique du monde, y compris des gouttes de rosée et ainsi de suite à l'infini. Cette théologie de la goutte d'eau trouve un écho dans de nombreux mandalas tibétains, avec leur bouddhas de toutes tailles, et on l'aperçoit aussi dans la grande vague du peintre Hokusai.

Pour changer de continent et de métier, le thème du générateur répété se trouve dans l'univers de Kant (fait de galaxies groupées en amas, superamas et ainsi de suite sans fin), dans les célèbres dessins de fontaines de Léonard de Vinci, avec leurs tourbillons superposés, dans L'Ange de Gustave Doré, fait d'anges plus petits, sans parler du visage de la mort de Salvador Dali.

Pour changer encore de continent, on nous a récemment appris que l'art de nombreuses nations africaines regorge de fractales d'une subtilité pleine de signification car objets de tradition.

Les nombres de l'homme

Sans être un aussi grand observateur, je me suis aperçu il y a longtemps de cette vérité : j'ai dit souvent que les branches de l'arbre étaient elles-mêmes de petits arbres complets ; des fragments de rochers sont semblables à des masses de rochers, des particules de terre à des amas énormes de terre. Je suis persuadé qu'on trouverait en quantité de ces analogies. Une plume est composée d'un million de plumes.

Arrêtons-nous sur Swedenborg, dont les mots allaient être cités par Emerson. Il ne brillait pas par ses connaissances en biologie, mais son intuition que le monde est ainsi fait paraît d'observations authentiques.

C'est ainsi que Delacroix aurait moins fait tiquer s'il avait choisi le chou-fleur. Il ne s'agit donc pas ici de validité scientifique ; cependant son opinion fautive mérite d'être citée, car elle attire l'attention sur un fait patent : l'idée d'emboîtement autosimilaire vient spontanément aux humains, et l'intuition de fractalité a toujours fait partie du patri-

Dimensions fractales

Frédéric Vivien, Rouen

moine de l'humanité, en Asie et en Afrique aussi bien qu'en Europe.

Un bipède sans plumes n'est devenu homme qu'après avoir conquis le feu et les éléments et avoir décoré son corps, sa demeure et son temple. Au cours des millénaires, ses motifs décoratifs s'affinèrent. Certains - bâties, broches et colliers - aidèrent à la naissance de la géométrie qui allait être codifiée par Euclide et beaucoup plus tard devenir l'outil essentiel de maintes sciences.

D'autres éléments décoratifs furent laissés de côté puis se déguisèrent pour participer à une révolution anti-euclidienne en mathématiques, et enfin donnèrent une forme à des objets que la vieille géométrie et les sciences étaient forcées de laisser de côté comme amorphes, c'est-à-dire sans aucune forme qui aurait permis l'analyse de la nature et sa synthèse.

Ayant ainsi traversé et apporté ma contribution à plusieurs territoires du savoir désintéressé ou pratique, avec des pointes vers les arts, l'aval et l'amont de l'œuvre d'une vie viennent de se refermer devant nos yeux en un anneau fractal. Parti il y a très très longtemps de l'art, un long périple confus est désormais revenu à son origine.

Benoît Mandelbrot

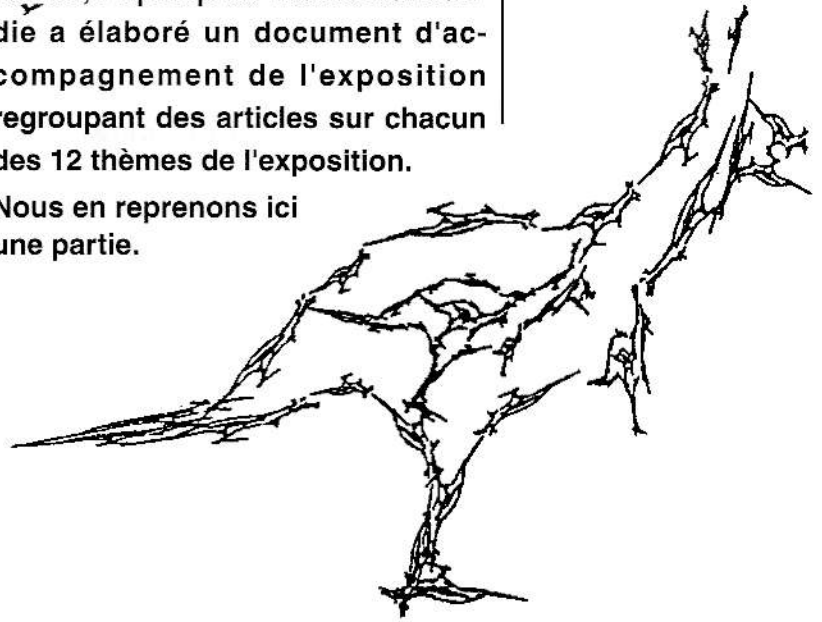
Mis à jour le lundi 28 août 2000

Il a écrit :

- Les Objets fractals (1975, 4e éd. 1995)
- Fractales, hasard et finance (1997),
- The Fractal Geometry of Nature (1984),
- Fractals and Scaling in Finance (1997),
- Multifractals and 1/f Noise (1999).

Dans le cadre de l'accueil de l'exposition "Maths 2000" conçue par Centre•Sciences, coproduite avec la Cité des Sciences et diffusée en Haute-Normandie par Science-Action, l'Apmep de Haute-Normandie a élaboré un document d'accompagnement de l'exposition regroupant des articles sur chacun des 12 thèmes de l'exposition.

Nous en reprenons ici une partie.



La longueur de la côte de Bretagne

On peut distinguer la similitude des mathématiciens, rigoureuse, et la similitude statistique. Par exemple, lorsque l'on observe la côte de Bretagne à très haute altitude, elle apparaît très dentelée avec une succession ininterrompue de promontoires et de baies. Lorsque l'altitude diminue, la perspective évolue, mais l'aspect dentelé de la côte se maintient, avec des promontoires et des baies plus petits. Chaque changement d'échelle souligne la permanence de cette structure. C'est une similitude statistique.

Après le flocon de neige, on peut se demander, comme l'a fait Benoît Mandelbrot dans ses travaux, quelle est la longueur de la côte de Bretagne,

La réponse dépend du niveau de détail qu'on décidera de prendre en compte. La longueur mesurée en promenant un compas le long de la côte ne cesse d'augmenter lorsqu'on diminue l'ouverture du compas et la longueur devient infinie !

La dimension fractale

On peut se poser la question de la dimension des objets géométriques.

Par exemple, la courbe de von Koch, qui possède une longueur infinie contenue à l'intérieur d'une surface finie, est davantage qu'une courbe sans être un plan. Sa dimension est supérieure à un mais inférieure à deux; on obtient ainsi une dimension non entière donnant le degré d'irrégularité et correspondant à l'efficacité avec laquelle une courbe occupe l'espace.

Le travail fondamental pour définir la dimension d'un objet est celui de Hausdorff (1919) approfondi par Besicovitch (1935) permettant ainsi de définir la dimension de Hausdorff-Besicovitch utilisée ici.

Il est facile de calculer la mesure d'un objet auquel on a fait subir une contraction (ou une dilatation) de rapport k lorsque l'on travaille en dimension 1, 2 ou 3: la mesure initiale est respectivement multipliée par k , k^2 ou k^3 .

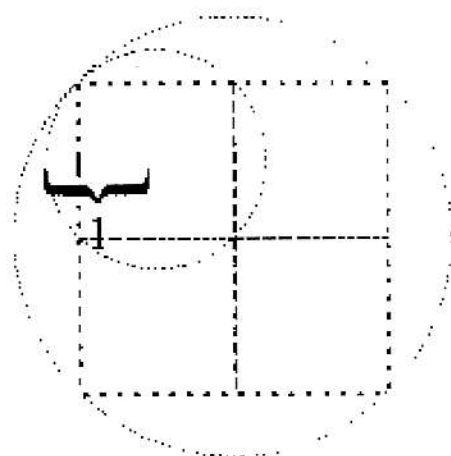
De même pour les fractales, la mesure initiale est multipliée par $n = k^d$ où d est la dimension fractale.

Cette dernière diffère d'une dimension ordinaire : elle est un nombre réel quelconque.

Une autre méthode pour déterminer la dimension fractale d'un objet est de compter le nombre moyen de motifs répétés contenus dans une sphère de rayon k centrée en un point donné de l'objet. Ce nombre de motifs est donné par $n = k^d$ et la dimension fractale est ainsi égale à :

$$d = \ln n / \ln k$$

Dans le cas d'un objet ordinaire de dimension 2, ici un carré, si on double le rayon de la sphère, on multiplie le nombre de carrés par 4 : $4 = 2^2$



Dans le cas de l'exemple le plus simple de structure fractale, **la poussière de Cantor**, lorsque l'on triple le rayon de la sphère, on double le nombre de morceaux obtenus.



Ou encore, lorsqu'on lui fait subir une homothétie de rapport 3, sa mesure est multipliée par 2 et $d = \ln 2 / \ln 3 \sim 0,63$.

La courbe de von Koch possède une dimension fractale égale à

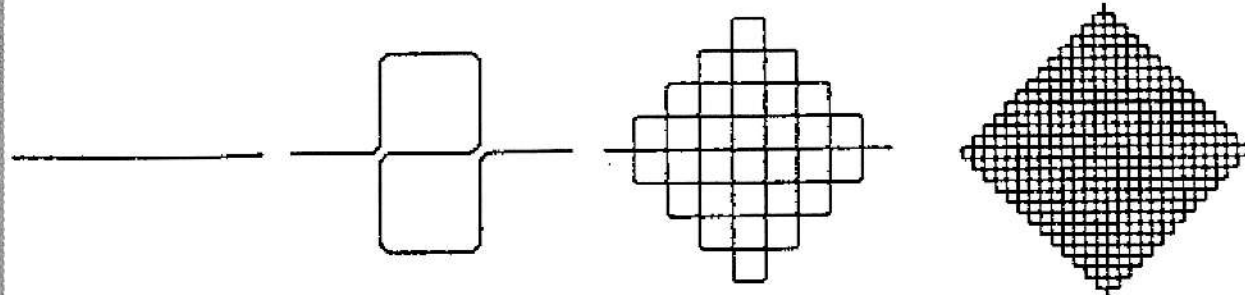
$$d = \ln 4 / \ln 3 \sim 1,26,$$

pour une échelle augmentée de 3, le nombre de segments quadruple.

La courbe de Peano, imaginée par Guiseppe Peano en 1890, est une courbe fractale dont il est donné les premières étapes de sa construction par la figure suivante:

Les manipulations de l'exposition **Maths 2000** : "De nouvelles dimensions" et "Des boulettes fractales", utilisent des méthodes expérimentales pour déterminer la dimension fractale d'une courbe. Vous pouvez consulter [6] et [8] pour plus de détails ainsi que d'autres méthodes.

L.F. Richardson étudia en 1961 les variations de la longueur approchée



On démontre que la courbe obtenue en itérant une infinité de fois le processus passe par tous les points du carré (et même plusieurs fois pour certains).

On retrouve ce résultat en calculant sa dimension fractale : lorsqu'on lui fait subir une homothétie de rapport 3, sa mesure est multipliée par 9, soit :

$$d = \ln 9 / \ln 3 = \ln 3^2 / \ln 3 = 2.$$

$P(e)$ de diverses côtes en fonction du pas de longueur e (ou écartement du compas de longueur e et constata que la longueur variait en suivant approximativement une loi de puissance en e soit

$$P(e) = n(e) \times e \sim c / e^D$$

où $n(e)$ représente le nombre de pas de longueur e nécessaire pour par-

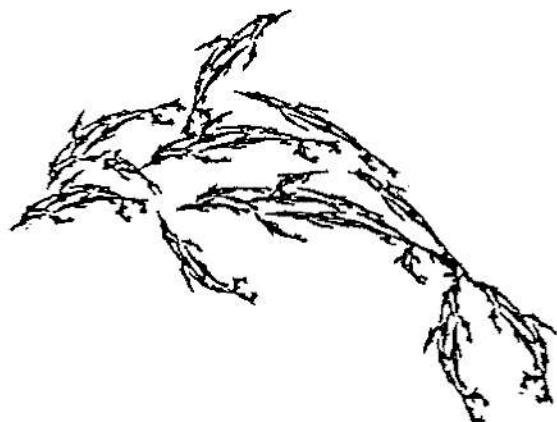


Figure 1

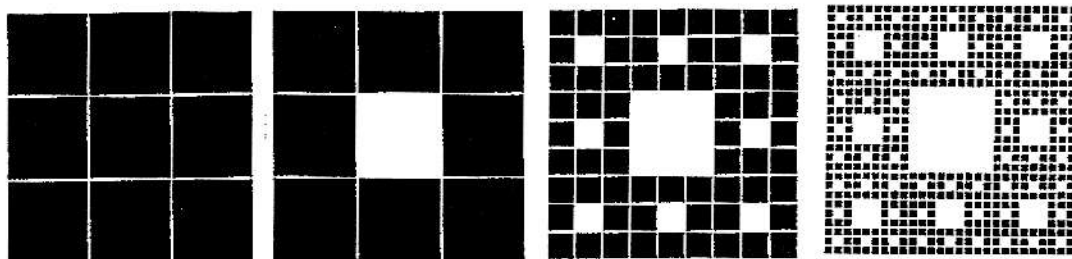


Figure 1 : le tapis de Sierpinski, obtenu en enlevant à chaque étape le carré central, après avoir découpé le carré initial en 9 carrés identiques.



et sur Internet, tapez

www.2000enfrance.com/sites/utls/

ou

www.lemonde.fr/article pour avoir les articles de l'Université de tous les savoirs.

Pour avoir des logiciels "fractales", tapez le mot dans un moteur de recherche et faites-nous connaître vos trouvailles.

La rédaction.

courir la courbe, c est une constante réelle et $d = 1 + D$ est la dimension fractale de la courbe.

Ainsi en prenant le logarithme (quelle que soit la base choisie) des deux membres de l'expression, nous obtenons successivement (aux approximations près) :

$$P(e) = c / e^D = c \times 1 / e^D$$

qui est équivalent à :

$$\log P(e) = D \times \log(1/e) + \log c$$

Or $P(e) = n(e) \times e$ d'où

$$\log n(e) + \log e = D \times \log(1/e) + \log c$$

$$\log n(e) - \log(1/e) = D \times \log(1/e) + \log c$$

Soit, finalement

$$\begin{aligned} \log n(e) &= (D + 1) \times \log(1/e) + \log c \\ &= d \times \log(1/e) + \log c \end{aligned}$$

La dimension fractale d de la courbe est donc la pente de la droite sur le papier logarithmique lorsque l'on représente $n(e)$ en fonction de $1/e$.

La manipulation de l'exposition "De nouvelles dimensions" permet ainsi de retrouver expérimentalement la dimension fractale de la courbe de von Koch (environ 1,26) en prenant comme approximation du pas de longueur e le diamètre des billes.

Bibliographie

- [1] The Science of Fractal Images, édité par H.-O. Peitgen et D. Saupe, Springer-Verlag, 1988.
- [2] Ch. Ruhla, La Physique du Hasard de Blaise Pascal à Niels Bohr, Liaisons Scientifiques.
- [3] Michael F. Barusley, Fractals everywhere, 2^e édition, Academic Press, 1993.
- [4] Plot n° 77, décembre 1996.
- [5] MATH.en.JEANS, 5^e congrès, éditée par l'Association, 1995.
- [6] H.-O. Peitgen, H. Jurgens et D. Saupe, Fractals for the classroom, Part One, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [7] Initiation aux Systèmes Dynamiques, Hors Série Tangente no3, éditions Archimède, 1998.
- [8] J.-F. Gouyet, Physique et structures fractales, Masson, Paris, 1992.
- [9] Ian Stewart, Les fractals, Les chroniques de Rose Polymath (Bande dessinée), Belin.

Figure 2 : l'éponge de Sierpinski-Menger obtenue en évidant à chaque étape une croix à l'intérieur du cube comme l'indique la figure.

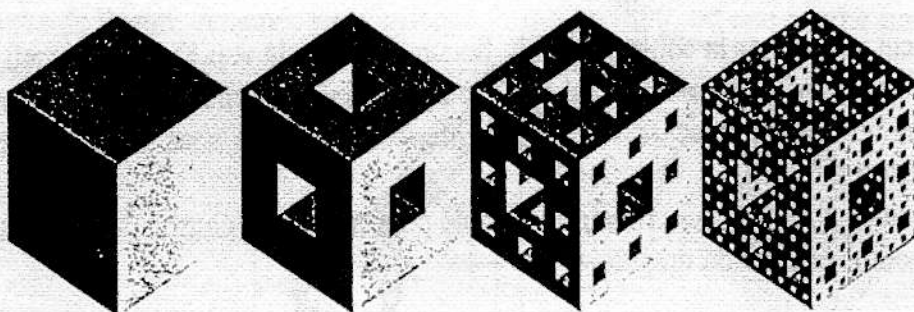


Figure 2

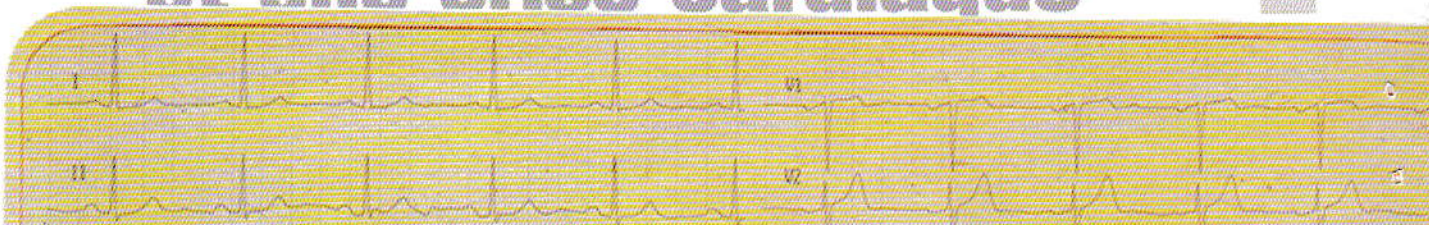


Quel lien

Y a-t-il entre

un flocon de neige ?

et une crise cardiaque



La formation des flocons de neige, les fluctuations de certaines populations animales, la fréquence des éruptions volcaniques, la propagation des épidémies, les variations du climat, les irrégularités des battements cardiaques... tous ces phénomènes sont décrits par la théorie du chaos, une théorie qui cherche l'ordre dans le désordre - et le désordre dans l'ordre.