

# Réalités virtuelles et virtualités réelles

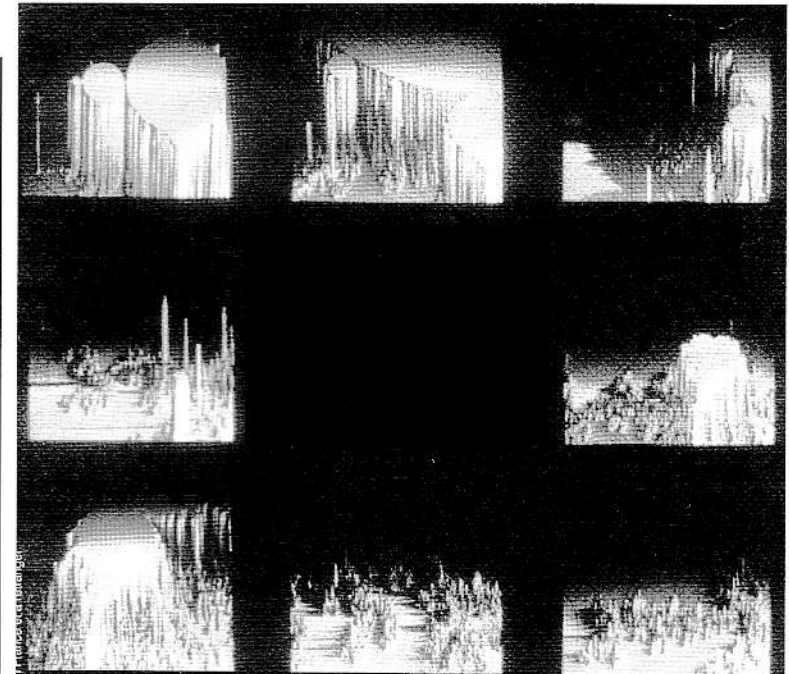
Jean-François COLONNA - Paris  
GSV-Lactamme, Ecole Polytechnique

**Jean-François COLONNA compare sa recherche en visualisation scientifique à un iceberg : la visualisation en est la partie émergée, et toute la partie immergée inclut la méthodologie de la programmation, la fiabilité des logiciels, coopération hétérogène et également la création artistique.**

## Les nombres : ombres de la réalité

Depuis plus de deux mille ans déjà, les mathématiques jouent, dans la quête de la connaissance, un rôle à part. Trop longtemps considérées comme un langage "simple", outil de formulation des lois de la nature, elles sont aujourd'hui de plus en plus comme une pensée permettant, par exemple, de prévoir l'existence d'une entité "physique" bien avant sa découverte expérimentale (les récents succès du Modèle Standard des particules élémentaires et de leurs interactions, ou encore ceux qui sont dus à la Relativité Générale, sont là pour nous le confirmer).

Enfin, suivant la tradition platonicienne, les nombres (sous-entendu les mathématiques), ombres de la réalité, ne sont peut-être que la seule connaissance de l'Univers accessible à l'homme, dont l'attitude dans ce domaine se doit d'être humble et modeste: l'Equation ultime (tout comme, par exemple, la dernière décimale de  $\pi$ ) n'existe pas, et plutôt que d'envisager une science "asymptotique", qui s'approcherait toujours plus

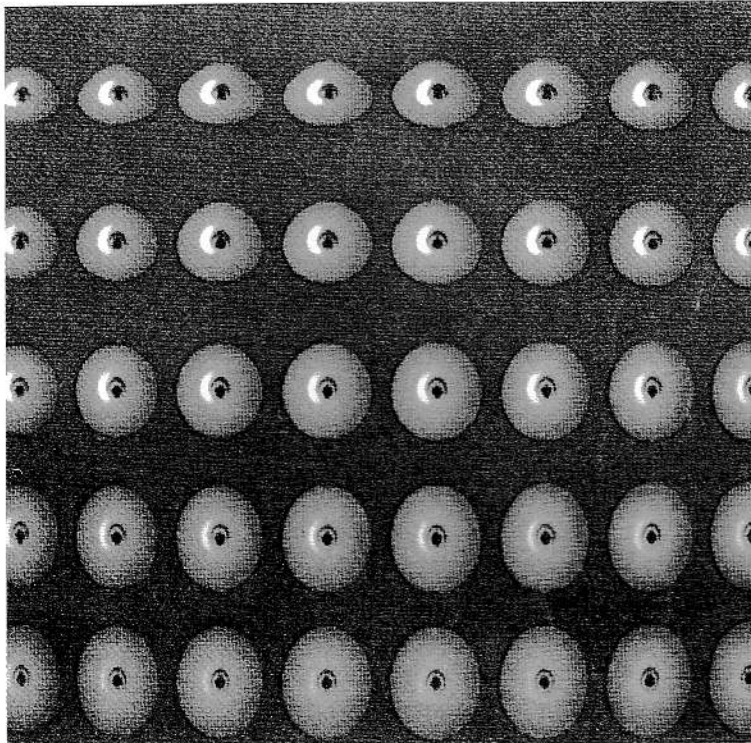


de son but, il est nécessaire de la croire elle aussi "fractale" (figure 1), de nouveaux concepts et structures apparaissant sans cesse, au fur et à mesure de nos progrès...

## L'expérimentation virtuelle

A côté de l'expérimentation que nous qualifierons de **laboratoire**, effectuée soit a priori (c'est l'observation des phénomènes naturels), soit a posteriori (pour vérifier le pouvoir prédictif de la déduction mathématique), se trouve l'expérimentation virtuelle (expression que nous préférons à "simulation numérique, ou encore à "expérimentation numérique", car d'une part elle rappelle la complémentarité de cette approche et des pratiques plus anciennes, et d'autre part, en évoque plus fortement l'énorme potentiel), rendue possible par les formidables progrès de l'informatique, tant au niveau des logiciels qu'à celui des matériels, et que John Von Neuman avait présentée et qu'il a utilisée dès la fin des années quarante.

fig 1: Le concept de Science fractale est illustré par huit agrandissements successifs d'une représentation tridimensionnelle de l'ensemble de Mandelbrot. Quel que soit le facteur d'échelle utilisé de nouveaux détails apparaissent, rendant par là même utopique, l'idée de visualiser sa frontière qui symbolise ici l'Equation ultime dont nous nions l'existence.



**Fig 2 : La Relativité Générale**, proposée par Albert Einstein en 1915, l'une des créations scientifiques les plus achevées, est aujourd'hui le cadre de la description des grandes échelles de l'univers.

Cette théorie prévoit l'existence d'objets extrêmement denses, et dont la masse est telle que rien, y compris la lumière, ne peut s'en échapper (sauf dans un cadre quantique). S'il n'est donc pas question d'observer directement ces objets "exotiques" (encore du domaine de la conjecture), il est possible de décrire des symptômes permettant d'en reconnaître la présence dans l'espace, l'effet dit "de lentille gravitationnelle". est l'un de ceux-là. Par exemple, des rayons lumineux en provenance d'une étoile lointaine, s'ils "frôlent" l'un de ces objets sur leur chemin vers la Terre, se verront déviés fortement (comme ils le seraient à l'intérieur d'une lentille optique). Cette courbure de leur trajectoire provoque la déformation de l'image de leur source. L'expérience virtuelle présentée sur cette image, et due à Jean-Alain Marck (observatoire de Meudon), montre soixante-quatre étapes du mouvement d'un observateur fictif décrivant une trajectoire circulaire l'amenant de l'axe de l'un des pôles d'un trou noir à son plan équatorial. Autour de celui-ci, un disque d'accrétion, à symétrie circulaire, gravite; lorsque l'observateur est sur l'axe des pôles (image en bas à droite), le disque lui apparaît tel qu'il le verrait autour d'un objet moins massif (Saturne, par exemple), bien que déjà, des images secondaires concentriques soient perceptibles. Mais, c'est lors du mouvement orbital, que les phénomènes "optiques" les plus "troublants" apparaissent, en particulier, une fois arrivés sur le plan équatorial (image en haut à gauche)... Ainsi armés, l'astrophysicien peut donc virtuellement expérimenter sur ces "gouffres du cosmos", comme probablement jamais il ne pourra le faire directement.

### le modèle : approches formelle et numérique

Pour bien comprendre de quoi il s'agit, il faut rappeler, de façon pragmatique, ce qu'est un modèle. L'état du système étudié par un physicien, par exemple, est représenté par un ensemble de grandeurs (coordonnées spatio-temporelles, température, pression...) et son évolution quant à elle, est décrite par un ensemble d'équations reliant entre elles les différentes grandeurs caractéristiques. Une théorie scientifique n'ayant de sens, que réfutable, et d'intérêt, que prédictive, les équations du modèle doivent être manipulées résolues afin de jouer pleinement leur rôle créateur.

Deux approches complémentaires et non exclusives l'une de l'autre sont alors possibles: la première, formelle, est celle qui donne la solution "exacte et analytique", et qui est la plupart du temps, impraticable, voire impossible à mettre en œuvre, même dans les cas parmi les plus simples (par exemple le problème dit "des N corps", N étant strictement supérieur à 2); la seconde, dite numérique, procède par approximations (du système étudié, mais aussi des équations) et fournit ses résultats sous la forme de nombres.

Dans un cas comme dans l'autre, l'ordinateur est aujourd'hui un outil indispensable, tant au niveau de la manipulation formelle des expressions et des équations, qu'au niveau numérique, étant donné la complexité, voire la "monstruosité" des opérations à réaliser.

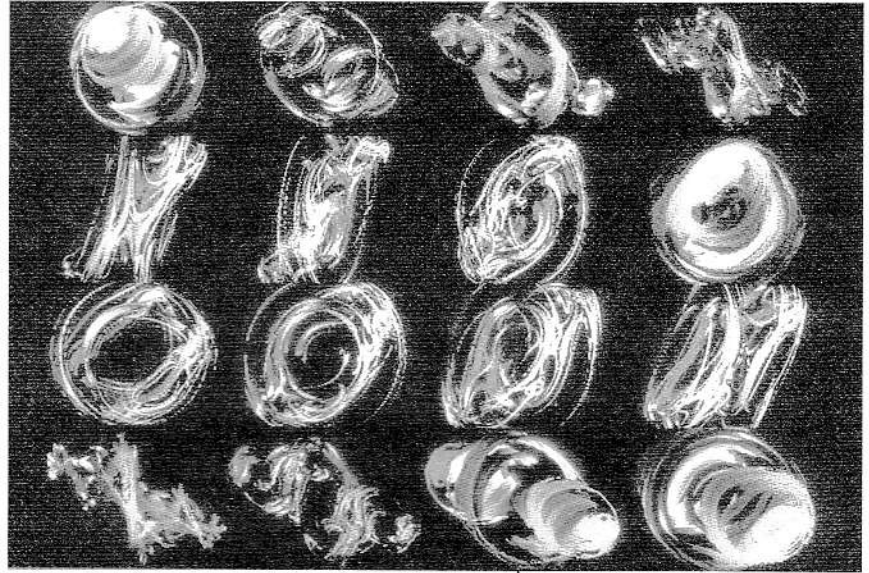
## De l'usage de l'image numérique

Une expérience virtuelle produit donc comme résultat des nombres. Notons au passage, que cela est de plus en plus vrai des expériences de laboratoire : en une fraction de seconde, un accélérateur de particules génère des millions de mesures.

Le problème que nous allons évoquer ci-dessous, et les solutions que nous allons présenter, se transposent immédiatement dans ce contexte. En général, la quantité de ceux-ci est telle, que leur analyse sous une forme alpha-numérique est impen-  
sable et même absurde.

Par exemple, lors d'une exécution en machine d'un code de simulation de la turbulence bidimensionnelle, dans un domaine carré échantillon né par un million de points, le nombre de décimales obtenues est de l'ordre du milliard, ce qui imprimé, représenterait approximativement un volume équivalent à un millier d'annuaires téléphoniques !

Le passage par la production d'images synthétiques animées est alors incontournable. Nous pouvons, dans ces conditions, définir d'une façon pragmatique l'Expérimentation Virtuelle comme étant la réalisation de mesures sur un modèle mathématique résidant dans la mémoire d'un système informatique, et l'analyse de celles-ci par le biais de la production d'images synthétiques animées et en couleurs. Cette approche place le chercheur dans une boucle de rétroaction, où le sens de la vision joue un rôle privilégié, celui-là même qui est fort probablement à l'ori-



### Transformation d'un ensemble de Julia

Un ensemble de Julia dans le corps des quaternions est paramétré par un point  $A$ . Cet objet fractal est obtenu par le processus itératif suivant :

En chaque point  $Q$  de l'espace, la suite :  $q_{n+1} = q_n^2 + A$ , avec  $q_0 = Q$ , est définie. Lors de cette itération, deux cas se rencontrent :

1- Le point  $q_{n+1}$  reste à distance finie de l'origine.

On dit que le point courant  $Q$  appartient à l'ensemble de Julia .

2) Le point  $q_{n+1}$  s'éloigne à l'infini.

On dit que le point courant  $Q$  n'appartient pas à l'ensemble de Julia .

Par rapport aux résultats obtenus de façon similaire dans le plan complexe, la difficulté vient ici de la représentation visuelle ; en effet, l'objet calculé réside dans un espace à 4 dimensions, qu'il n'est donc pas question de visualiser directement. Ici sont présentées 16 coupes tridimensionnelles par l'hyperplan XYZ, obtenues au cours d'une rotation de  $2\pi$  autour de l'axe OY.

gine de la curiosité scientifique.

En plus de permettre cette mise en forme de résultats fournis "en vrac", la production d'images de synthèse fait apparaître d'autres avantages fondamentaux.

En particulier elle facilite la mise au point de la validation des modèles ; elle simplifie la communication scientifique et pédagogique, en particulier en ce qui concerne la compréhension de concepts abstraits. Mais c'est aussi un fabuleux outil de découverte : en effet, de ces images surgisse sous l'œil du chercheur ou de l'ingénieur des formes, bien souvent imprévues et imprévisibles (donc non programmables à priori, qui seront pour lui des indices de régularités sous-jacentes ou bien de pistes à suivre.



Heinrich Hertz faisait remarquer il y a un siècle déjà :

*" on ne peut échapper au sentiment que ces formules mathématiques ont une existence qui leur est propre, qu'elles sont plus savantes que ceux qui les ont découvertes, et que nous pouvons en extraire plus de science qu'il n'en a été mis à l'origine ".*

Enfin, il s'agit là d'un instrument révolutionnaire (comme le furent, en leur temps, le télescope et le microscope, mais placé à un niveau supérieur, tel qu'en fait, il soit qualifiable de "méta-instrument") qui permet l'observation, mais aussi, et surtout, la manipulation d'objets qui autrement seraient hors de notre portée et hors de notre regard.

C'est ainsi que l'astronome peut aujourd'hui "jongler" avec les trous noirs (fig 2), qu'à l'autre bout de l'échelle, le physicien est capable d'observer la structure en quarks du proton (fig 3) : l'homme de science étudie alors ses propres réalités virtuelles. Mais ces mêmes outils permettent à l'artiste de visiter de nouveaux univers (fig 4) : des virtualités réelles, encore tapies dans la mémoire de nos machines, n'attendent qu'à être explorées.

### Quelle informatique pour l'expérimentation virtuelle ?

Ainsi se trouve donc posé le problème de la définition et de la mise en œuvre du système informatique permettant, en particulier, la concrétisation de ce concept, tout en assurant la pérennité des développements alors réalisés. Au préalable, il convient de

faire un inventaire des idées sous-jacentes, et qui correspondent aux grandes tendances de l'informatique d'aujourd'hui, et auxquelles il est essentiel de souscrire :

- l'existence de normes logicielles et matérielles,
- la notion de système réparti reposant sur celle de réseau (ou mieux de réseaux),
- l'interactivité,
- la maturation du calcul parallèle,
- la production d'images animées et en couleurs,
- la simulation possible de certains processus cognitifs.

En une quarantaine d'années, les progrès accomplis dans ce domaine furent les plus foudroyants que notre technique ait jamais connus : hier, un millier d'opérations par seconde demandaient plusieurs dizaines de tonnes de matériels surveillés par une armée de "grands prêtres" détenteurs du savoir et des rites à accomplir, alors qu'aujourd'hui quelques grammes donnent au néophyte une puissance de calcul dix mille fois supérieure ! Mais certainement le fait le plus marquant de ces dernières années réside dans la notion "récursive" de réseau. Elle peut être définie comme étant la possibilité de connecter entre elles des machines, généralement distantes l'une de l'autre, afin de les faire coopérer dans l'accomplissement d'une certaine tâche ; nous la qualifions de "récursive", puisque, d'une part, de plus en plus d'ordinateurs, sont eux-mêmes conçus sous forme de réseaux d'entités plus élémentaires, et que d'autre part, les réseaux, à une certaine échelle sont eux-mêmes fédérés en systèmes plus vastes. Ainsi, aujourd'hui, il n'y a pratiquement plus, de par le monde, de

machines à vocation "professionnelle" isolées : leurs utilisateurs peuvent atteindre, pour effectuer des opérations diverses, et sous réserve d'obtenir les autorisations nécessaires (notons que le problème de la sécurité est l'un des plus délicats qui soit actuellement), des ordinateurs situés aux antipodes.

Un nouveau niveau de réalité virtuelle apparaît alors : celui du cadre de travail du chercheur (ou de l'ingénieur) : son bureau, son laboratoire ou bien encore sa bibliothèque, deviennent à leur tour virtuels.

Par l'intermédiaire d'un poste de travail (qui peut être qualifié de multimédia, parce que présentant des informations provenant des sources les plus variées : systèmes d'expérimentation virtuelle, banques de données, chaînes de télévision, canaux de télécommunications, ...), et pour mener à bien son travail et sa recherche, il va pouvoir utiliser les ressources qui lui sont nécessaires, où qu'elles résident.

Mais, de plus, il va être à même de communiquer avec ses homologues, dans un gigantesque continuum asynchrone à l'intérieur duquel les idées se brasseront, et d'où, plus de lumière

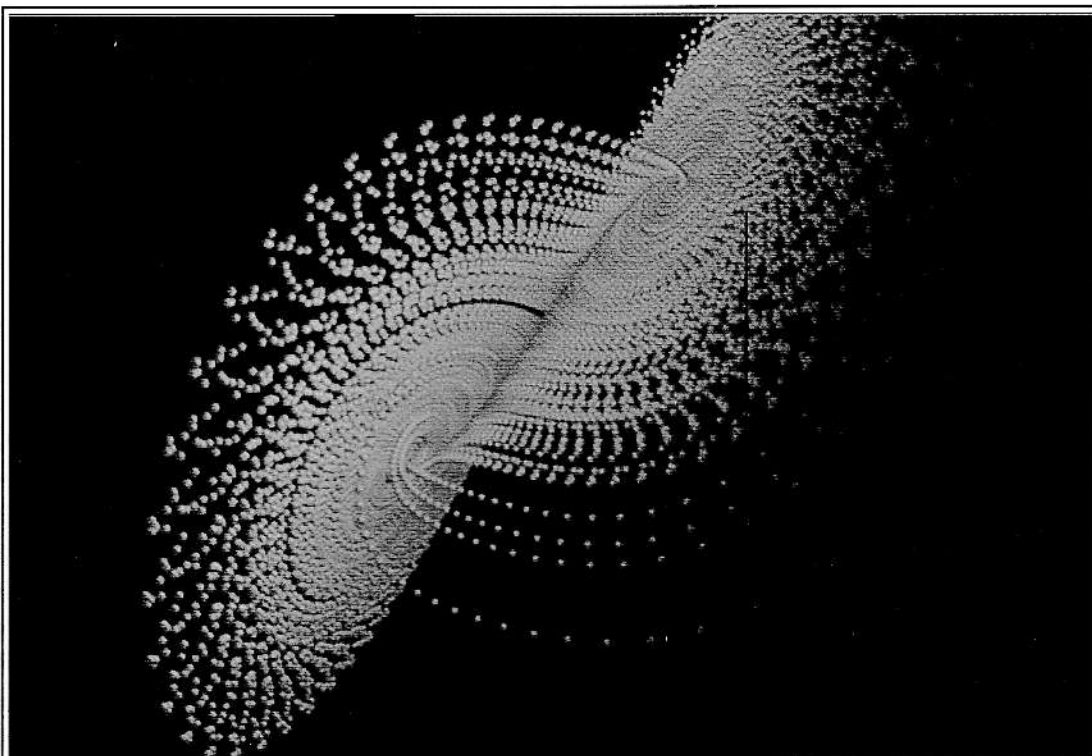


Figure 3 : Longtemps considérés comme élémentaires, **les protons et les neutrons** en particulier, sont aujourd'hui décrits en tant qu'objets composés. Le modèle, dit "standard", des particules et de leurs interactions repose sur les bosons (les "vecteurs des forces") et les fermions la "matière" ; dans cette dernière catégorie se trouvent les leptons et les quarks. Cette image nous montre un proton tel qu'il est défini dans ce modèle : il est constitué de trois quarks "réels" (situés au sommet d'un triangle équilatéral fictif assez apparent sur cette image) et d'une "mer" de particules "virtuelles" (quarks, anti-quarks et gluons) nées des fluctuations quantiques du vide, et qui se concentrent statistiquement au voisinage de quarks réels suivant leurs couleurs (la couleur étant une notion similaire à celle de charge électrique, mais n'ayant bien entendu rien à voir avec ce que nous appelons communément "couleur"). Les sphères représentent les quarks et les anti-quarks, alors que les cylindres symbolisent les gluons, bosons responsables de l'interaction forte (l'une des quatre forces fondamentales). Ainsi par l'intermédiaire de ces nouveaux outils, toutes les échelles actuellement connues dans l'univers sont accessibles à nos yeux, mais aussi à nos mains... (ici l'attracteur de Lorenz (JFC))

jaillira. Ainsi, l'homme peut enfin accéder, par les techniques qu'il a su développer, à l'ubiquité, ubiquité donc mais à l'intérieur de plusieurs niveaux de réalités virtuelles : celles de ses espaces de vie et de travail, mais aussi celles contenant l'objet de ses études et de ses recherches.

Enfin, ces mêmes outils, non confinés dans l'espace de la recherche scientifique, envahiront (et envahissent déjà...) d'autres domaines, et en particulier celui de la création artistique ; au-delà des problèmes alors soulevés (non unicité de l'œuvre, absence de support "noble", multipropriété artistique, l'ordinateur : outil non neutre, l'ordinateur

: outil ou créateur ?...), il convient de voir et d'imaginer les utilisations qui pourraient en être faites.

En particulier, des artistes, répartis de par le monde, auront la possibilité de coopérer à des œuvres collectives et dynamiques, et pourquoi pas, avec la collaboration des techniques spatiales, à la création de sculptures monumentales qui éclaireraient nos nuits ? Et si aujourd'hui, une fraction importante de la masse monétaire mondiale circule continuellement et immatériellement, peut-être en sera-t-

il de même, demain, pour une partie de notre patrimoine culturel, naviguant ainsi à la vitesse de la lumière de continent en continent, d'étoile en étoile...

### Que sera demain ?

A court terme, l'objectif est d'aboutir à un système délocalisé, où spontanément les tâches à effectuer, se réaliseront sur le système le plus apte ou le plus disponible. Ainsi, pour donner un exemple simple, la visualisation et l'interaction auraient lieu sur une station de travail, alors que la résolution des équations se ferait sur un super-ordinateur, et ce de façon totalement transparente à l'utilisateur.

L'existence de réseaux de plus en plus rapides (des réseaux expérimentaux offrent déjà en laboratoire des débits de plusieurs dizaines de milliards de bits par seconde) permettra littéralement de voir vivre le modèle, et d'interagir avec lui, autorisant par là-même la réalisation d'expérience interactives sur lui. En ce qui concerne l'aspect strictement visualisation, des progrès énormes sont à attendre bien entendu de la manipulation de plus en plus rapide de modèles tridimensionnels, mais aussi de l'usage qui sera fait de la télévision haute-définition et des dispositifs stéréoscopiques.

La notion de réalité virtuelle, développée dans d'autres domaines (la simulation de conduite par exemple), et introduite dans ce contexte, permettra au chercheur comme à l'ingénieur de s'intégrer davantage à son modèle, en facilitant ainsi sa compréhension; il convient de ne pas oublier qu'ici, contrairement aux applications artistiques ou de type CAO, de la synthèse d'images, les "objets" étudiés sont bien souvent

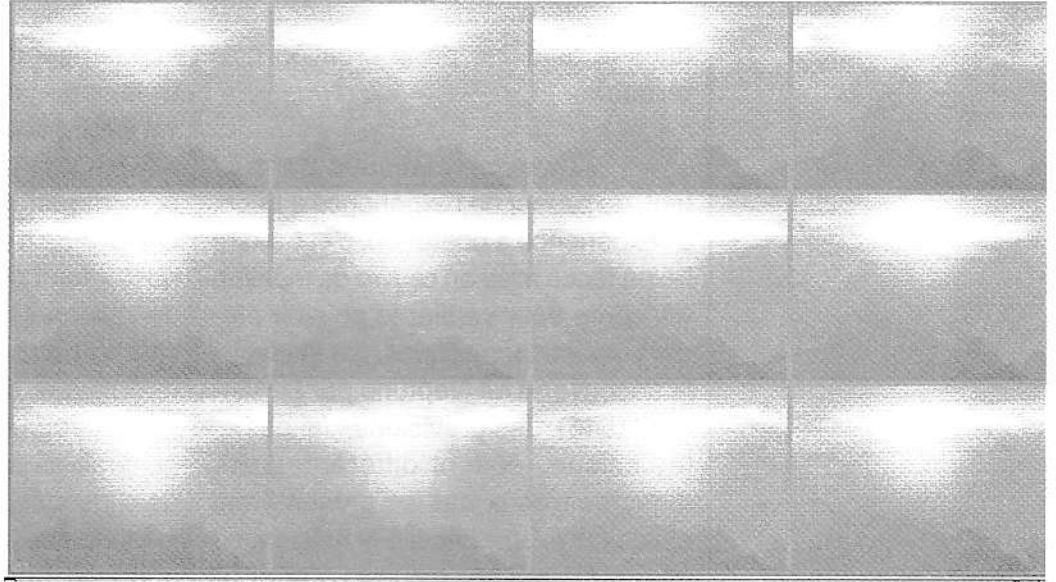


**figure 4 : La géométrie fractale**, récent outil mathématique conçu par Benoit Mandelbrot, permet de modéliser et de décrire de nombreux phénomènes jusqu'ici sans aucun point commun. C'est ainsi que les fluctuations des cours de la bourse, le front d'avancée d'un incendie de forêt, ou encore la limite entre deux milieux diffusant l'un dans l'autre, peuvent aujourd'hui être décrits à l'aide du même langage. Elle permet la modélisation de nombreux phénomènes naturels, et constitue donc un outil puissant pour la synthèse d'image. Nous voyons ici un paysage complètement "imaginaire" et calculé à partir d'équations, qu'il s'agisse du relief, ou bien des nuages et de la brume. Des développements récents, dus à l'auteur, permettent de plus de décrire la dynamique de ces phénomènes, et ainsi de générer des films les présentant. L'artiste peut alors détourner ces outils, faire des mathématiques une matière malléable, nouveau marbre ou nouvelle glaise, et créer des univers proches de notre quotidien ou bien "diamétralement" opposés (si tant est que nous puissions connaître le méta-univers qui les contient tous...) et nous les offrir en tant que réalités virtuelles à explorer...

éloignés du sens courant, voire n'ont aucune image "naturelle" (une impression tout simplement...), ou à la limite, sont "interdits de représentation" (en mécanique quantique en particulier) ; il est alors nécessaire de donner à l'expérimentateur le maximum de facilités pour l'aider à comprendre les résultats obtenus. Dans ce domaine, les techniques de l'intelligence artificielle nous seront fort probablement d'un grand secours : bien entendu au niveau de l'interface homme-machine, mais aussi dans l'aide à l'analyse et à la présentation des résultats (par exemple, le problème du choix des couleurs, dans ce contexte, est, contrairement à l'intuition, extrêmement délicat : quelques règles de bon sens peuvent aider...).

### et après-demain ?

S'il est difficile d'imaginer l'impact à moyen et long termes de l'informatique, et de ses derniers développements (disques optiques, systèmes multimédia, synthèse d'images, production de sons,...), dans des domaines familiers, comme celui de l'enseignement, il est encore beaucoup plus délicat de le faire dans celui de la recherche scientifique (et a fortiori dans le monde de l'art). En effet, la Science définit notre vision rationnelle de l'univers, et la place que l'homme y occupe. Celles-ci subissent au cours des siècles de nombreux bouleversements : le génie de



Platon, Copernic, Newton, Einstein, pour ne citer qu'eux en fut responsable. Aujourd'hui, leurs successeurs utilisent des outils dont ne disposaient pas leurs glorieux ancêtres, et qui vont leur permettre de porter plus loin leur regard et plus haut leurs gestes, et ouvrir ainsi tout grand, les portes d'une nouvelle révolution copernicienne.

### Expérimentation réelle, expérimentation virtuelle

#### L'activité du chercheur ?

Il y a trois points fondamentaux qui s'imbriquent les uns dans les autres : l'observation, l'expérimentation, la modélisation.

Le scientifique essaie de construire une vision objective, de transmettre la connaissance et de prévoir l'occurrence de nouveaux phénomènes. L'activité de modélisation repose sur les outils mathématiques et est ici illustrée par trois exemples dont un sera développé : le calcul intégral avec Leibnitz et Newton, la théorie des groupes avec Galois et la géométrie fractale avec Mandelbrot (importante en Physique et

Fig 5 : Les différentes étapes d'un lever de Soleil sur fond de montagnes. JFC.



dans le domaine de la création graphique).

Les mathématiques permettent, de passer de l'expérience a priori, à l'expérience a posteriori, c'est-à-dire l'expérience mise en œuvre de manière délibérée pour vérifier le pouvoir prédictif des mathématiques, par exemple, la découverte de Neptune par Le Verrier (1846). Les prévisions, faites par les calculs, étaient différentes des mesures : deux cas se présentèrent alors pour lui, renoncer à la mécanique de Newton et à ses résultats positifs ou bien l'accepter, mais supposer que quelque chose est ignoré: il existe un corps inconnu, ce qui aboutit à la découverte de Neptune. Cette méthode ne fut pas applicable à Mercure, on arriva sur la théorie de la relativité d'Einstein.

L'expérimentation "réelle" possède donc des limites, d'où l'introduction de l'expérimentation virtuelle. Par l'expérimentation virtuelle, on étudie le modèle d'un objet "réel" ou non, et non pas l'objet ; il faut que le modèle produise des prédictions. Pour cela, il est placé dans une machine, sous forme d'un programme qui produit des mesures sous forme de nombres et il y a un traitement de ces nombres. De plus si l'expérimentateur le souhaite, il pourra agir sur le modèle.

### Les dangers

De nombreux dangers résultent de cette approche :

- Le danger relatif à la machine d'exploitation : ces machines n'ont ni les mêmes compilateurs, ni les mêmes processeurs.

- Le danger relatif à la qualité des logiciels : étant donnée leur complexité, il y a forcément des erreurs, les résultats doivent être discutés, cela fait appel à la méthodologie de la programmation. Un ordinateur fonctionne avec un nombre fini d'entiers et un nombre fini de rationnels sur lesquels la multiplication et la division ne sont pas internes (problèmes des chaos déterministes, systèmes stables et non stables). En général, les erreurs d'arrondis n'ont pas de conséquences, mais à ce niveau de la recherche, elles en ont, et ces conséquences peuvent être dramatiques.

- Il y a également perte de l'associativité et de la distributivité des opérations, etc..

### Quelques exemples

Un premier exemple simple :

$$3.14 \times (2.71 \times 2.71)$$

$$= 23.04$$

et

$$(3.14 \times 2.71) \times 2.71$$

$$= 23.03 !!!$$

Voici un autre exemple:

la dynamique de Vethulst (chercheur biologiste du XIXe siècle qui étudia l'évolution de populations animales). Il s'agit d'une méthode itérative donnée par la formule :

$$X_{n+1} = (R+I)X_n - RX_n^2$$

On peut envisager différentes écritures possibles mais équivalentes théoriquement pour la programmation :

$$(1) X_{n+1} = (R+I)X_n - R(X_n X_n)$$

$$(2) X_{n+1} = (R+I)X_n - (RX_n)X_n$$

$$(3) X_{n+1} = ((R+1) - RX_n)X_n$$

$$(4) X_{n+1} = RX_n + (1-RX_n)X_n$$

$$(5) X_{n+1} = X_n + R(X_n - X_n X_n)$$

On remarque, après programmation



des cinq formules, qu'au bout d'une itération, les résultats sont identiques et qu'au bout de soixante-dix, il n'y a plus aucun rapport entre eux !!! Le problème serait le même en augmentant la précision de la machine, il n'apparaîtrait que quelques itérations plus loin, car on est en présence d'un cas non linéaire.

On perçoit ici le problème des opérations élémentaires, suivant le compilateur, leur traduction peut être changée, ou en changeant tout simplement le système, la même programmation, sur la même machine, peut donner des résultats très différents, d'un jour à l'autre.

Lors d'activité de "coopération hétérogène", on fait travailler ensemble des ordinateurs incompatibles entre eux, venant de fournisseurs différents; par exemple sur la factorisation des grands nombres entiers par six cents machines différentes.

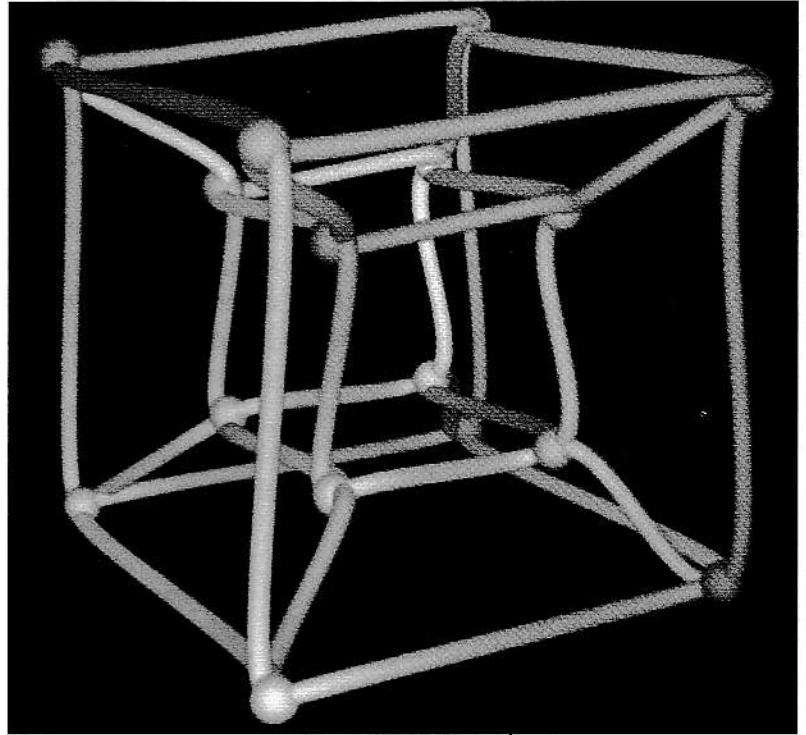
- Le danger de confondre le modèle avec l'objet, alors que le modèle est forcément incomplet par rapport à la réalité.

- Le danger relatif aux filtres : lorsque les résultats sont présentés en image, il peut y avoir des anomalies, des défauts.

- Le danger relatif à l'action : les résultats obtenus peuvent être incompatibles avec le modèle choisi.

En effet, si on prend pour modèle la mécanique Newtonienne, on ne peut introduire dans les calculs des vitesses trop élevées, incompatibles avec celle-ci.

Tous les dangers cités se cumulent les uns les autres, d'où la difficulté !



Hypercube  
psychédélique. JFC.

### Qu'est-ce que l'expérimentation virtuelle ?

C'est la mise en œuvre d'un modèle de systèmes et d'un modèle de visualisation, tout en y intégrant l'expérimentateur.

Le volume des résultats bruts impose généralement la production d'images de synthèse, on a souvent un milliard de résultats (ce qui représente un millier d'annuaires téléphoniques !) et cette situation se retrouve de plus en plus fréquemment dans les expériences réelles, c'est le cas, par exemple, pour les accélérateurs de particules ou les télescopes.

L'image est ainsi un formidable objet de découverte et un instrument révolutionnaire.

**Si vous voulez en savoir plus sur les travaux de Jean-François Colonna, consultez son site plein d'images :**

**[www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/descripteurs/ExpV\\_VirE.Fra.html](http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/descripteurs/ExpV_VirE.Fra.html)**

## Faites l'expérience !!!

Faites l'expérience suivante, facile à réaliser avec n'importe quelle calculatrice ou ordinateur : donnez-nous une valeur  $X_n$ , puis calculez "itérativement" les valeurs  $X_1, X_2$  à l'aide de la formule  $X_{n+1} = (R+1)X_n - RX_n^2$  où  $n$  prend donc successivement les valeurs 0. 1. 2 et où la constante  $R$  vaut 3.

Mathématiquement parlant la formule précédente est équivalente à chacune des cinq formules en entrée des deux tableaux ci-dessous qui donnent les valeurs de  $X_n$  calculées sur deux ordinateurs différents (mais dits compatibles). Malheureusement, à cause des erreurs d'arrondi, cela n'est plus vrai informatiquement parlant comme on peut le constater.

| IBM ES9000 |           |           |           |           |    |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----|
| formule 1  | formule 2 | formule 3 | formule 4 | formule 5 | n  |
| 0,500000   | 0,500000  | 0,500000  | 0,500000  | 0,500000  | 0  |
| 0,384631   | 0,384631  | 0,384631  | 0,384631  | 0,384631  | 10 |
| 0,418895   | 0,418895  | 0,418895  | 0,418895  | 0,418895  | 20 |
| 0,046399   | 0,046399  | 0,046399  | 0,046399  | 0,046399  | 30 |
| 0,320185   | 0,320183  | 0,320188  | 0,320182  | 0,320189  | 40 |
| 0,063406   | 0,064521  | 0,061895  | 0,064941  | 0,061244  | 50 |
| 1,040381   | 0,846041  | 0,529794  | 1,319900  | 1,214070  | 60 |
| 0,004104   | 1,199452  | 0,873553  | 0,573637  | 0,000009  | 70 |
| 0,108044   | 0,121414  | 1,260726  | 0,395871  | 0,280590  | 80 |
| 0,096374   | 0,089244  | 0,582157  | 0,344503  | 1,023735  | 90 |

| IBM RS6000 |           |           |           |           |    |
|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----|
| formule 1  | formule 2 | formule 3 | formule 4 | formule 5 | n  |
| 0,500000   | 0,500000  | 0,500000  | 0,500000  | 0,500000  | 0  |
| 0,384631   | 0,384631  | 0,384631  | 0,384631  | 0,384631  | 10 |
| 0,418895   | 0,418895  | 0,418895  | 0,418895  | 0,418895  | 20 |
| 0,046399   | 0,046399  | 0,046399  | 0,046399  | 0,046399  | 30 |
| 0,320177   | 0,320184  | 0,320188  | 0,320190  | 0,320189  | 40 |
| 0,067567   | 0,063747  | 0,061859  | 0,060822  | 0,061486  | 50 |
| 0,001145   | 0,271115  | 0,616781  | 0,298613  | 1,307350  | 60 |
| 1,296775   | 1,328462  | 0,486629  | 0,938605  | 1,054669  | 70 |
| 0,553038   | 0,817163  | 1,277151  | 1,325437  | 0,617058  | 80 |
| 1,094852   | 0,154184  | 1,174162  | 0,148151  | 0,237355  | 90 |

30

Le problème vient de toute évidence du fait que nous cherchons à manipuler ce que le mathématicien appelle les nombres réels, avec une machine que ne connaît qu'un nombre fini de nombres décimaux (sur lesquels il commet de plus des erreurs d'arrondi...).

Ainsi clairement, l'ordre dans lequel les opérations sont effectuées peut dans certains cas influe considérablement sur les résultats produits.

Cela peut aller, comme c'est le cas ci-dessus, jusqu'à nous donner des résultats qui sont tout simplement faux. Ce sera illustré visuellement à l'aide de l'attracteur de Lorenz où nous montrons trois ordinateurs résoudre simultanément le même problème à l'aide d'un seul programme.

Or malheureusement, l'exemple ci-dessus pourrait malgré

tout laisser croire que le programmeur reste maître d'imposer un certain ordre aux opérations arithmétiques : il n'en est rien.

D'une part les traducteurs de langages (ou compilateurs) et les plus récents microprocesseurs eux-mêmes manipulent cet ordre en permanence ! Il est ainsi possible d'imaginer un programme parfaitement déterministe et qui, malgré cela, ne donnerait pas deux fois de suite les mêmes résultats alors que l'ordinateur utilisé n'aurait changé en aucune façon.