

PLOT

n° 90

Quel lien

y a-t-il entre **un escargot**
et le nombre $(1 + \sqrt{5})/2$?

ISSN 03 97 74 71 - Vendu en France et à l'étranger.

printemps 2000

Le nombre $(1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or que l'on retrouve un peu partout dans la nature. La spirale de la coquille du nautilus est une construction géométrique basée sur ce nombre. Même Stradivarius utilisa ce nombre pour construire ses fameux violons !

Année mondiale des mathématiques

50 F

Directrice de publication

Marie-Laure DARCHÉ-GIORGI

Responsable de la rédaction

Michel DARCHÉ

Secrétariat

Madeleine SCHLIENGER

Comité de rédaction

Jacques Borowczyk, Daniel Bouté,
Michel Clinard, Gérard Chauvat,
Roger Crépin, Luce Dossat,
Georges Le Nezet, Serge Parpay,
Michel Soufflet, Raymond Torrent.

Abonnements

PLOT-APMEP, IREM- UNIVERSITÉ,
BP 6759 45067 Orléans-Cedex 2

Prix d'abonnement pour 2000

160 FF pour 4 numéros
Abonnement étranger : 160 FF
+ tarif avion : 50 FF

Photocomposition et maquette

I.C.E.- Limoges

Impression

Fabrègue - St-Yrieix

Editeur

Association régionale
de L'APMEP d'Orléans - Tours
et

L'ADECUM (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).

Publié avec le concours
du Ministère des Affaires Étrangères.

2000 : année mondiale des mathématiques

Sommaire

1 - Deux p'tits bouts d'allumath !!!	02
Les allumés des maths	
2 - Nombres particuliers et remarquables	05
François DRESS, Bordeaux I	
3 - 2000, année mondiale des mathématiques	21
Gérard Tronel, Paris	
4 - de Fibonacci à phi	33
Apmep de Haute-Normandie	
5 - Du nombre d'or aux activités en or	35
Apmep de Poitou-Charentes	
6 - Web-bibliographie	38
7 - Commandes - Abonnements	39

Éditorial

2000 : l'année mondiale des mathématiques a commencé !
Poitiers, La Rochelle, Dakar, Saint-Louis, Ouagadougou, Rouen, Montbelliard, Saint-Etienne, Strasbourg, Montpellier, Orléans-Tours ...

Nous vous avons promis 4 numéros inédits, à mettre dans toutes les mains, des élèves aux parents qui se posent la question récurrente :

à quoi ça sert les maths ?

Ce premier numéro porte à la fois sur les maths dans la nature et les nombres. Vous y trouverez des inédits et de belles histoires sur les nombres : des premiers nombres aux nombres premiers, des nombres entiers aux nombres rationnels et irrationnels qui se mettent à la suite les uns des autres pour faire une belle ribambelle de chiffres. Alors ... 5 - 4 - 3 - 2 - 1 ... ZÉRO !!!

Réabonnez-vous vite pour l'an 2000 !!!

Réabonnez-vous
pour l'année
2000,
année
mondiale des
mathématiques !
Une surprise
sera au
rendez-vous
de chaque
numéro !

Des additions sans retenues !!!

Deux nouveaux bouts d'allumaths

par les allumés des maths !!!

Le groupe des allumaths (les "allumés" des mathématiques) réunit quelques professeurs et inspecteurs de mathématiques de l'Académie de Poitiers pour la plupart.

Ils échangent problèmes et solutions sans autre restriction que leur intérêt. Voici deux nouveaux sujets, l'un géométrique, l'autre numérique, et des éléments de réponses pour les deux précédents sujets parus dans le PLOT n° 88-897.

Plot 90 - Situation 1

Voici un énoncé élémentaire et classique extrait d'un ouvrage. ABCD est un parallélogramme. Soit E le point de la demi-droite [AB) tel que : $AE = AB + AD$, et F le point de la demi-droite [AD) tel que $AF = AB + AD$.

Démontrez que les points C, E et F sont alignés.

Et cela suffit pour se poser des problèmes divers et variés et accessibles à tous !

Plot 90 - Situation 2

Et si je ne savais pas calculer ?

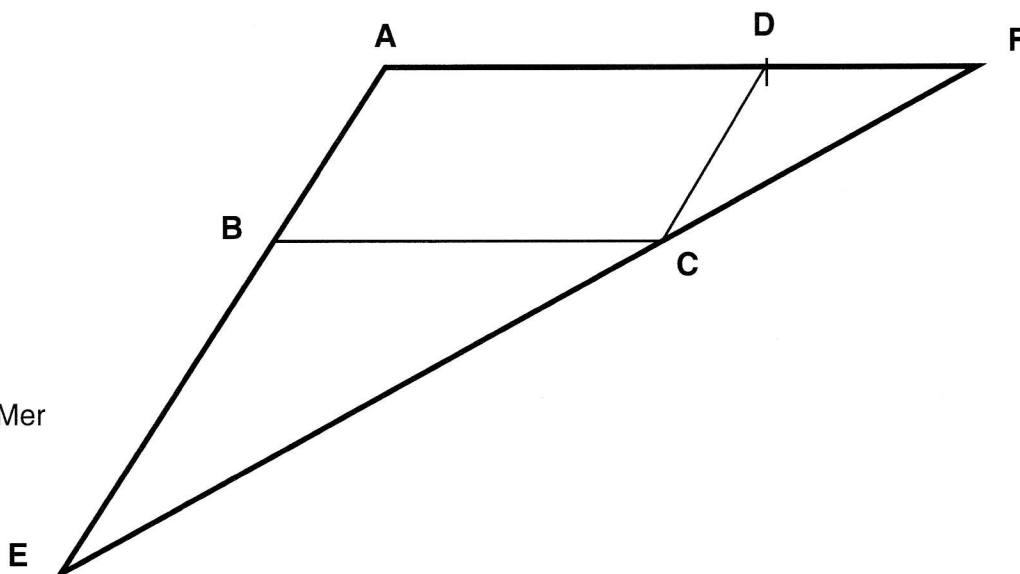
$$17 + 5 = 12$$

$$18 + 8 = 16$$

$$55 + 66 = 11$$

Et si on décidait, en classe de CE1, d'oublier systématiquement les retenues lorsqu'on ajoute deux nombres entiers naturels ?!!

Et cela suffit pour se poser des problèmes divers et variés et accessibles à tous !!!



2

Commentaires
à envoyer à
Marc Blanchard
39, rue Barbès
17300 Rochefort-sur-Mer

Trois cercles et un triangle ???

À propos de la situation 1 parue dans le PLOT n° 88-89

Plot 88-89 - Situation 1

A, B, C sont trois points non alignés d'un plan.

Ω_A , Ω_B , Ω_C les cercles de diamètres [BC], [CA] et [AB].

Que peut-on en dire ?

- Deux cercles se recoupent sur les côtés du triangle, au pied d'une hauteur (I, J ou K).

- Appelons D l'orthocentre de ABC; A, B, C, D est un quadrangle orthocentrique et :

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 + AD^2 + BD^2 + CD^2 = AI^2 + AJ^2 + AK^2 + BI^2 + BJ^2 + BK^2 + CI^2 + CJ^2 + CK^2 + DI^2 + DJ^2 + DK^2.$$

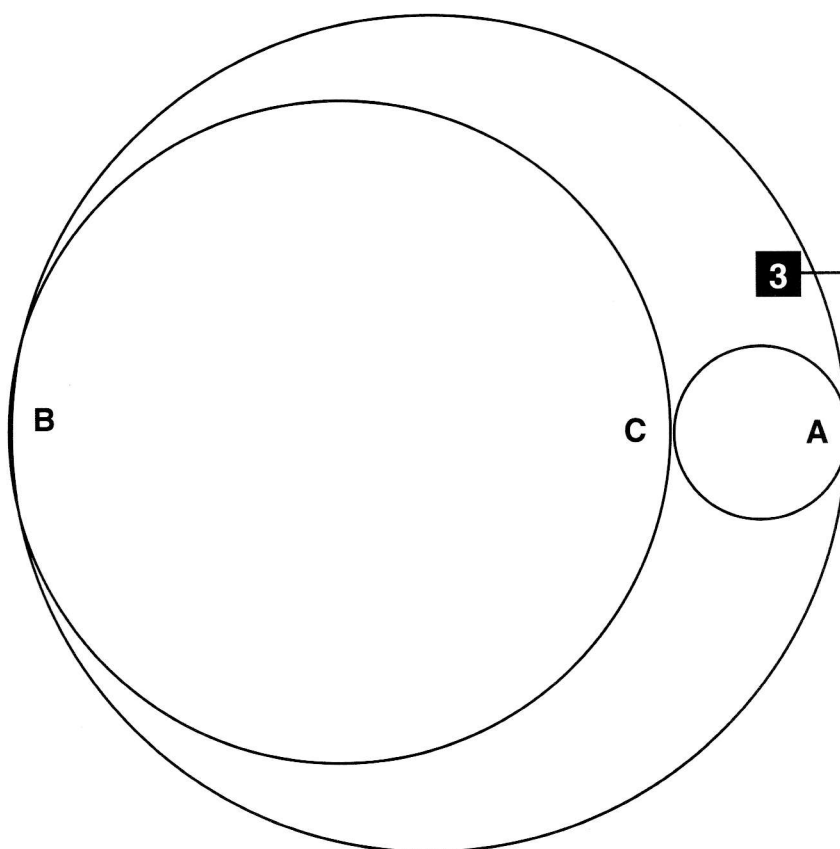
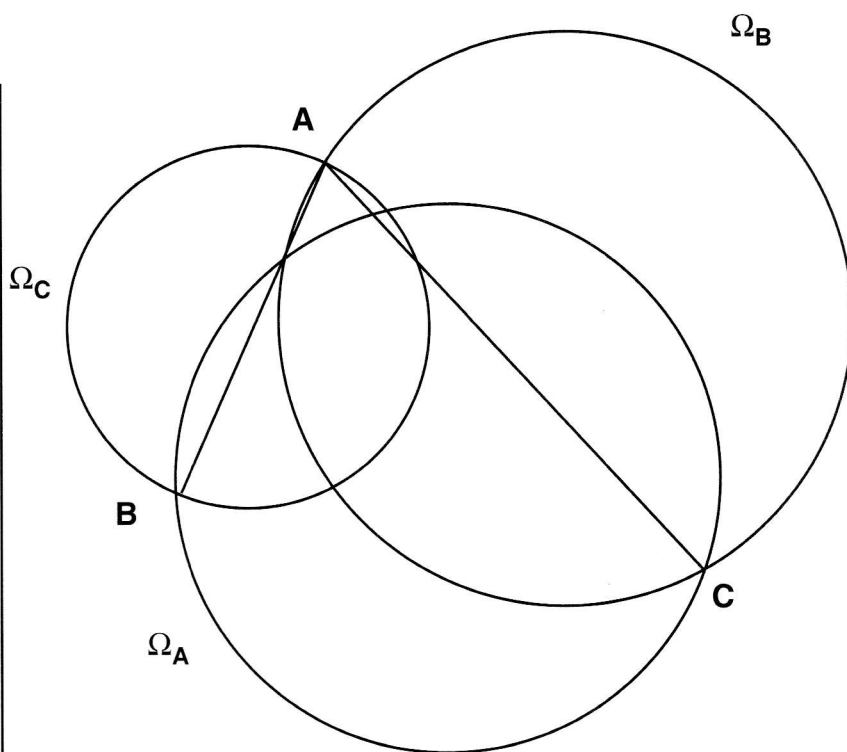
- Les centres des cercles et les pieds des hauteurs sont cocycliques (cercle d'Euler).

- Lorsque ABC est un triangle rectangle, on est dans la configuration des lunules d'Hippocrate. Dans le cas classique, on envisage les trois demi-cercles du même côté de l'hypoténuse, celui du sommet de l'angle droit.

Etudiez le cas où les trois demi-cercles sont de l'autre côté de l'hypoténuse.

- Dans le cas particulier où les points sont alignés, on est dans le cas de la configuration de l'arbelos d'Archimède.

Des propriétés liées au triangle podaire IJK sont rappelées par Raymond MILLON de Montigny les Bretonneux dans une étude où il démontre que la médiatrice de [JK] passe par les milieux de [BC] et [AD] et par le centre du cercle d'Euler.



1 janvier 2000 ?!?

À propos de la situation 2 parue dans le **PLOT** n° 88-89

Plot 88-89 - Situation 2

Nous avons proposé dans le n°86 de trouver une explication au texte suivant de Walusinski: "l'histoire des calendriers julien et grégorien étant connue de ... tous, et sachant que le 1er janvier 1900 était un ... lundi, on en déduit par le calcul ci-dessous que le 31 décembre 2000 sera un dimanche et le 1er janvier 2001 un lundi aussi !".

Pouvez-vous décrypter le calcul ci-dessous et vérifier que nos glorieux ancêtres ont pris la Bastille un mardi.

31	-->	3
décembre	-->	4
2000	-->	2
100		
25	-->	4

soit, pour le tout : 6 (modulo 7)

Voici la réponse de Jean LEFORT :

Une partie facile, l'année : chaque année ordinaire, on gagne un jour donc de 1900 à 1999 on gagne : $99 \equiv 1$ jour modulo 7, et pour l'année 2000 on gagne $100 \equiv 2$ j.

Les années bissextiles on gagne 2 jours or pour 2000 il y a $100/4 = 25$ années bissextiles .

(et non pas 26 par ajout de l'extrémité 1900 car 1900 n'est pas bissextile alors que 2000 l'est). Or $25 \equiv 4$ modulo 7.

Une partie délicate, le mois :

si le 1-janvier est	0 alors
le 1-février est	3 (31 -> 3)
le 1-mars est	3
le 1-avril est	6
le 1-mai est	1
le 1-juin est	4

le 1-juillet est	6
le 1-août est	2
le 1-septembre	5
le 1-octobre	0
le 1-novembre	3
le 1-décembre	5

À nouveau facile, le quantième :
Du 1 au 31 il y a $31 - 1 = 30 \equiv 2$.

Conclusion :

On peut récupérer $31 \equiv 3$ plutôt que $31 - 1$, ce qui est plus agréable, en décalant d'une unité les modulus calculés pour chaque mois (dans l'ordre janv $\equiv 6$, fev $\equiv 2$, mars $\equiv 2$, avr $\equiv 5$, etc...), ce qui revient à considérer le jour 0 de chaque mois.

Conclusion, on gagne 6 jours et le 31 décembre 2000 sera un lundi + 6 = dimanche et un de plus pour le lendemain.

L'autre méthode est d'utiliser les formes quasi-affines (cf annexe mathématique de mon livre*) mais alors il faut démarrer au 1er mars ce qui est au moins aussi compliqué.

Quant à calculer le jour du 14/7/1789, il faut faire pareil mais en retranchant ce qui est un peu plus délicat.

J'ai rédigé un programme MAPLE permettant la conversion des différents calendriers entre eux (julien, grégorien, musulman, juif et période julienne). Vous pouvez l'utiliser si vous disposez du logiciel (à demander au journal).

* Référence du livre :

La saga des calendriers
ou le frisson millénariste

Jean LEFORT

Ed. Belin, Pour la Science

Nombres particuliers et remarquables

François DRESS, Bordeaux I

Ce petit essai a été écrit pour accompagner l'exposition Mille-et-Un chiffres, réalisée par Cap-Sciences, CCSTI d'Aquitaine. Les visiteurs de cette exposition sont invités à parcourir l'histoire des nombres et des moyens de calcul jusqu'aux prodigieuses applications du calcul intensif.

Mais beaucoup resteront toujours un peu envoûtés par le commencement de cette histoire, ... les nombres entiers.

Des nombres aux mille facettes

Dans ces quelques pages qui vous présentent les entiers - et surtout les plus petits - on ne trouvera ni découverte insolite ni interprétation extravagante qui permettrait de décrypter le monde.

J'ai simplement souhaité y rassembler dans un texte unique les multiples facettes dont scintillent les entiers dans la culture humaine, et faire partager sa fascination.

Il n'est guère de nombre entier, parmi les quinze ou trente premiers, qui ne soit le compte de quelque ensemble naturel ou qui ne possède quelque propriété remarquable. Avec un peu d'érudition, un peu de peine et beaucoup de conviction, on peut même présenter les propriétés naturelles ou mathématiques d'un entier donné quelconque, pas trop grand, de façon à donner

l'illusion qu'il est tout à fait exceptionnel.

La numérologie, la magie, l'ésotérisme, ou plus simplement la superstition banale, ont abondamment utilisé cette illusion. Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, ..., douze, treize, chacun de ces nombres est exceptionnel si vous avez décidé de le croire. Chacun est exceptionnel... donc aucun ne l'est !

Alors évitons la superstition et contentons-nous de regarder la richesse des nombres entiers, de leurs propriétés et de leurs usages.

Les trois premiers

Un, le premier, le symbole de l'unique, que dire de plus ?

Deux, le symbole du couple ou de la paire, mais surtout de l'opposition ou de la symétrie : l'homme et la femme, le jour et la nuit, le bien et le mal, le yin et le yang, l'être et le néant, l'ordre et le chaos, le chaud et le froid, la droite et la gauche, ...

Trois, le symbole de la fécondité, de la relation et de l'échange: l'homme et la femme et l'enfant, l'homme et la femme et l'amour, le maître et l'élève et le savoir, ...

Et saviez-vous que *diable* et *double* ont la même origine étymologique ?

Le nombre en grammaire

Le nombre en grammaire est une catégorie qui oppose un et beaucoup, le singulier et le pluriel, mais de nombreuses langues ont gardé des traces d'une diversité plus grande. On trouve le "duel" dans des déclinaisons et conjugaisons du sanskrit, du grec, de l'arabe, de l'hébreu.

On peut donner deux (!) exemples en arabe (transcrit avec l'alphabet latin). En arabe littéraire, *allât* signifie "elle a dit", *balata* "elles (deux) ont dit", et *qulna* "elles (plus de deux) ont dit".

En arabe dialectal, *yum* signifie "un jour", *yumain* "deux jours", et *ayyam* "plusieurs (plus de deux) jours".

Le nombre en géométrie

Les polygones commencent avec 3 côtés et 3 sommets, pour le triangle (un polygone à 2 côtés ne pourrait être qu'aplati et n'existe pas vraiment). Les premiers polygones réguliers triangle, carré, pentagone, hexagone, produisent un sentiment

esthétique et sont d'ailleurs repris par l'homme pour ses constructions et ses décorations.

Le polygone à 7 côtés (l'heptagone) est d'un dessin et d'un emploi difficile, mais avec le polygone à 8 côtés (l'octogone), on retrouve une figure plus esthétique et souvent utilisée.

Si vous essayez de "paver" votre cuisine avec des tomettes qui sont des polygones réguliers identiques, vous vous rendrez vite co-superposés.

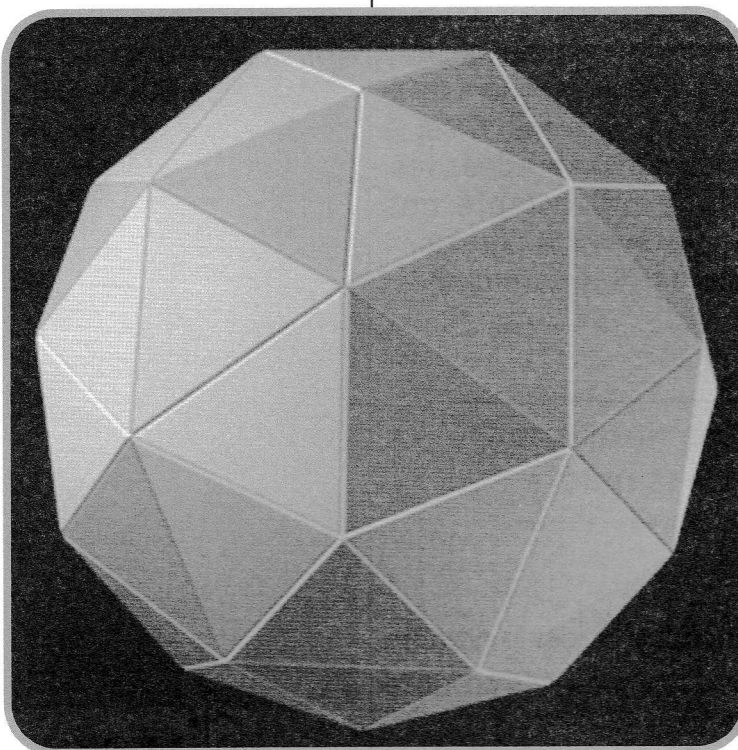
Après les polygones, qui sont des figures du plan, il faut considérer les polyèdres, qui sont des figures de l'espace formées par des faces (polygonales) contiguës, avec des sommets et des arêtes (ce mot est préféré ici à côté). Si vous n'êtes pas familiers avec les polyèdres, pensez au cube, aux paral-

Petit problème de généalogie :
Quand on additionne l'année de naissance d'un père, l'année de naissance de son fils, l'âge du père et l'âge du fils, qu'est-ce qu'on obtient ?

lélépipèdes, aux pyramides, aux prismes...

Contrairement aux polygones réguliers, qui forment une suite infinie (pour tout $n > 3$, il existe un polygone régulier à n côtés et n sommets), il n'existe qu'un nombre fini de polyèdres réguliers. Il en est ainsi que l'on se restreigne ou non aux polyèdres "convexes", mais le cas général est très compliqué - quoique

donnant visuellement des figures magnifiques - et l'on se contentera d'examiner les polyèdres convexes réguliers.



Ils sont au nombre de 5 et ils étaient connus notamment des anciens Grecs (on les appelle d'ailleurs les 5 solides ou polyèdres platoniciens).

Ce sont :

- **le tétraèdre régulier**, avec 4 faces triangulaires, 4 sommets et 6 arêtes (on peut se représenter un tétraèdre comme une pyramide de base triangulaire, avec 3 faces triangulaires),

- **le cube**, avec 6 faces carrées, 8 sommets et 12 arêtes,

- **l'octaèdre régulier**, avec 8 faces triangulaires, 6 sommets et 12 arêtes (on peut se représenter un octaèdre comme formé par deux pyramides de base carrée, accolées par leurs bases - il reste donc $4 + 4 = 8$ faces triangulaires),

- **le dodécaèdre régulier**, avec ses 12 faces triangulaires, 20 sommets

et 30 arêtes,

- **l'icosaèdre régulier**, avec 20 faces triangulaires, 12 sommets et 30 arêtes.

Les trois premiers sont bien connus et souvent utilisés, le dodécaèdre est notamment utilisé pour confectionner des lustres, et l'icosaèdre est moins connu et d'usage plus rare.

Pour les esprits curieux, on citera un théorème de mathématiciens, découvert par Euler (1707-1783), un des plus grands mathématiciens de tous les temps: si on appelle F le nombre de faces d'un polyèdre convexe (régulier ou non),

Réponse au problème
généalogique :
Vous obtenez le double de
l'année actuelle soit 2x
2000 !!! Etonnant !
En effet, si vous additionnez
votre année de naissance et
votre âge, vous obtenez l'an-
née en cours (sans chipoter
sur la date exacte de l'anni-
versaire!). Ne cherchez pas
de relation entre l'âge du père
et l'âge du fils, il n'y en a pas.
C'était juste pour construire
l'histoire et vous pouvez bien
sur le faire avec l'âge de votre
mère et l'âge de votre sœur.
Ce n'est pas une affaire entre
hommes !

S le nombre de sommets, et A le nombre d'arêtes, alors

$$F + S - A = 2.$$

Les puissances de deux

Mise en valeur par le développement - très récent à l'échelle de l'histoire de l'humanité - de l'informatique, la suite des puissances de deux: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024, 2 048, ..., ou tout au moins le début de cette suite, a toujours joué un rôle important dans les comptes des hommes. C'est la suite des dichotomies successives, c'est la suite qui compte nos ancêtres: nous avons 2 parents, 4 grands-parents, 8 arrière-grands-parents, ...

Les nombres de la nature

Le nombre **1** est le nombre des organes "uniques": le cœur, le cerveau, le nez, ...

Le nombre **2** est le nombre de la symétrie "ordinaire", c'est le nombre des mains, des pieds, des yeux, des oreilles (qui rentrent dans la symétrie générale du corps humain), mais aussi des mâchoires et des lèvres (qui ne rentrent pas dans cette symétrie).

Le nombre **3** pourrait être celui de la symétrie ternaire, mais elle ne se rencontre pas vraiment dans le règne animal; c'est néan-

moins le nombre de mâchoires de la sangsue (qui forment un Y inversé), le nombre d'anneaux du thorax des insectes, le nombre de pétales et de sépales des orchidées, des liliacées (lis, tulipe, asperge, muguet, poireau), ...



Nous venons de signaler les 3 anneaux du thorax des insectes, et il faut faire une parenthèse pour parler de métamérisation: c'est le processus du développement de certains animaux qui se manifeste par la formation de blocs consécutifs, souvent très semblables, appelés selon les cas segments, métamères ou anneaux. Pour certaines espèces, le nombre de métamères est très variable, pour d'autres il est fixe et nous fournira donc un des nombreux nombres remarquables de la nature vivante.

Le nombre **4** est celui de la symétrie de certaines méduses (4 lèvres, 4 poches génitales, 4 poches gastriques), c'est le nombre de membres de la plupart des mammifères, le nombre de pétales des crucifères (moutarde, chou, navet, radis), du lilas, ...



Le nombre **5** est celui qui caractérise la symétrie des échinodermes (oursin, étoile de mer), c'est aussi le nombre de doigts d'une main, et c'est encore le nombre de pétales de beaucoup de fleurs violacées (violette, pensée), papillonacées (trèfle, ajonc, haricot), bouton-d'or, primevère), comme le nombre de lobes des feuilles de certains arbres (érable, marronnier).

Le nombre **6** est celui de la

symétrie de certains coraux (chaque individu possède 6 cloisons gastriques et 6 tentacules) comme de la symétrie des cellules hexagonales des abeilles dans une ruche, c'est le nombre des étamines des crucifères, le nombre de pattes des insectes (que l'on dénomme parfois, pour cette raison, hexapodes), le nombre de segments de l'abdomen des crustacés supérieurs (crevette, crabe, écrevisse, langouste).

Les nombres **7** et **9** sont des "petits" entiers qui ne sont pas très présents dans la nature vivante... On peut néanmoins signaler que de nombreuses feuilles composées, comme celles de l'acacia ou du frêne, possèdent 5, 7, 9, voire 11 ou 13 folioles.

Le nombre **8** est celui de la symétrie de certains autres coraux comme le corail rouge, c'est le nombre d'anneaux du thorax des crustacés supérieurs, le nombre de pattes des araignées et des scorpions, le nombre des tentacules de la pieuvre.

Le nombre **10** est le nombre de pattes du crabe, de la langouste et de la crevette (que l'on dénomme parfois décapodes), celui des tentacules du calmar et de la seiche, c'est également celui des cors du cerf adulte (le "dix-cors").

Le nombre **11** est, l'auriez-vous deviné, le nombre des segments de l'abdomen des insectes (encore que, chez un nombre important d'espèces, 2 ou 3 métamères

terminaux soient fusionnés - mais la plupart des aptérygotes ont conservé les 11 segments).

Les biologistes comptabilisent souvent ensemble les métamères "postcéphaliques" (thorax + abdomen), et le nombre **14** est alors le compte aussi bien pour les insectes ($3 + 11$) que pour les crustacés ($8 + 6$).

Le nombre **20** est le nombre des faces de l'icosaèdre (comme on l'a noté ci-dessus), polyèdre qui représente la forme de l'enveloppe ou "capside" de nombreux virus, comme celui de l'herpès.

Le nombre **34** est le nombre de segments de la sangsue qui présente, à la différence d'autres annélides, un nombre parfaitement invariable de métamères.

Il y a enfin l'infini, ou presque... Le lombric atteint 150 anneaux, mais il y a plus. Les mille-pattes comprennent des espèces comme les scolopendres, qui sont eux très loin de 1000 pattes, et les iules. Ces dernières appartiennent à l'ordre des diplopodes, qui possèdent jusqu'à 190 anneaux et qui, comme leur nom l'indique, ont 2 paires de pattes par anneau. Ainsi, l'infini numéral de la nature vivante se situe au-delà de 760 (environ !).

Mais saviez-vous que les

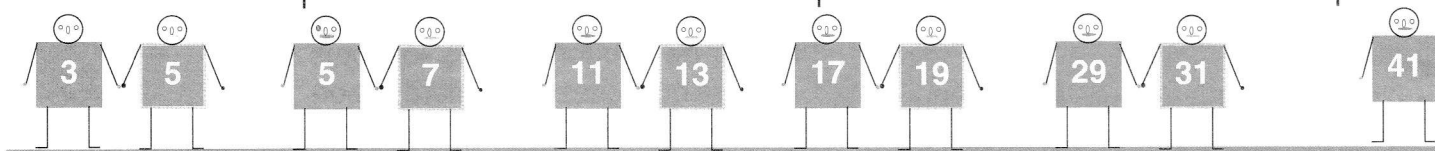
mille-pattes forment la classe des myriapodes, et que *myria-* est un préfixe grec qui signifie... dix mille? Il est vrai que kilopodes, ça ferait un peu lourd !

Il n'est pas sans intérêt de comparer avec l'infini de la littérature, qui commence à 1001 (c'est en effet cette 1 001ème nuit qui signifie que les histoires de Shéhérazade n'auront pas de fin), et avec l'infini des physiciens, qui se situe vers 109, estimation (grossière) du nombre total de particules subatomiques dans notre univers.

N'oublions pas pour terminer quelques nombres relatifs à l'homme: 20 puis 32 dents, 24 vertèbres (7 cervicales, 12 dorsales, 5 lombaires), 24 côtes, 46 chromosomes. Mais ces nombres sont plus ou moins le fruit du hasard de l'évolution et n'ont pas grande valeur intrinsèque.

Les nombres de l'arithmétique

L'arithmétique - appelée aussi théorie des nombres - est principalement la science de la divisibilité. Tout est clair pour ce qui nous intéresse ici si l'on a bien compris ce que sont les diviseurs des nombres entiers: par exemple, les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, et 12 lui-même, ceux de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14, et 28 lui-même.



Les nombres *premiers* sont ceux qui n'ont presque pas de divi-

seurs: 1, c'est inévitable, le nombre lui-même, c'est inévitable aussi, et aucun autre. Pour des raisons mathématiques impérieuses mais qui ne seront pas expliquées ici, le nombre 1 n'est pas considéré comme un nombre premier.

La suite des nombres premiers est: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, ...

On peut remarquer que 2 est le seul nombre

premier pair, mais cela n'est pas plus puissant que de dire que 3 est le seul nombre premier divisible par 3, ou 17 le seul nombre premier divisible par 17.

La suite des nombres premiers est infinie (c'était connu notam-

ment des anciens Grecs) et on peut même dire plus, il y a beaucoup de

nombres premiers.

Ils vont en se raréfiant progressivement, mais lentement, et il y en a réellement beaucoup !

Ainsi, il y a 168 nombres premiers jusqu'à mille, soit environ 1 sur 6, il y en a 50.847.734 jusqu'à un milliard, soit environ 1 sur 20, et il y en a 24 739.954.287.740 860 jusqu'à un milliard de milliards, ce qui fait encore plus de 1 sur 40.

Les nombres premiers se raréfient très régulièrement si l'on regarde les choses d'un point de vue global,

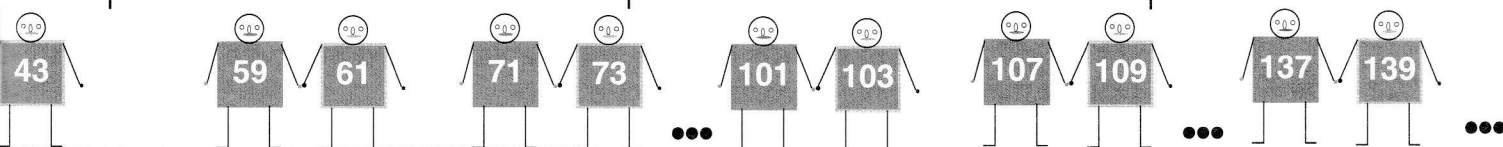
mais ils sont distribués de façon extrêmement irrégulière dans le détail, et c'est une grande énigme des mathématiques...

Quelle loi pour les nombres premiers "*jumeaux*", comme 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19, ..., et dont les mathématiciens sont

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
191	192	193	194	195	196	197	198	199	200

Il y a une infinité de nombres premiers !

Ceci était déjà bien connu
anciens Grecs .



convaincus - quoiqu'ils n'aient pas encore pu le démontrer - que la suite est également infinie ?

Quelle loi pour les grands écarts entre deux nombres premiers consécutifs, comme entre 23 et 29 (écart de 6), entre 89 et 97 (écart de 8), entre 113 et 127 (écart de 14), ... ?

Les contraires des nombres premiers sont les nombres "très composés", comme 6 (qui a 4 diviseurs), 12 et 18 (6 diviseurs), 24 et 30 (8 diviseurs), 48 (10 diviseurs), 60 et 72 (12 diviseurs), ...

On appelle nombres **parfaits** ceux qui sont égaux à la somme de leurs diviseurs (en ne comptant pas dans la somme le nombre considéré, quoique bien sûr il se divise toujours lui-même). Les premiers nombres parfaits sont $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, 496, 8 128, ...

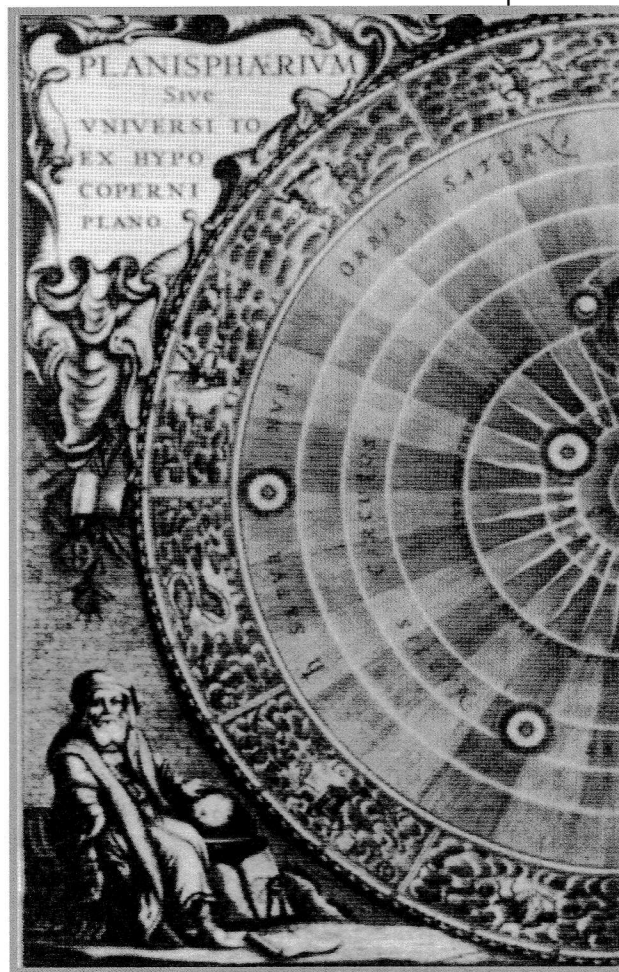
Pour terminer sur l'arithmétique, il ne faut pas oublier les puissances "parfaites" : les carrés: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, ..., les cubes: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1 000, ...

sur la Terre comme au ciel

En commençant par les 2 "luminaires", le Soleil et la Lune.

De nombreux cycles se décomposent de façon naturelle, presque obligatoire, en quatre quarts: les 4 points cardinaux (le cycle quotidien du Soleil), les 4

phases de la Lune, les 4 saisons (le cycle annuel).

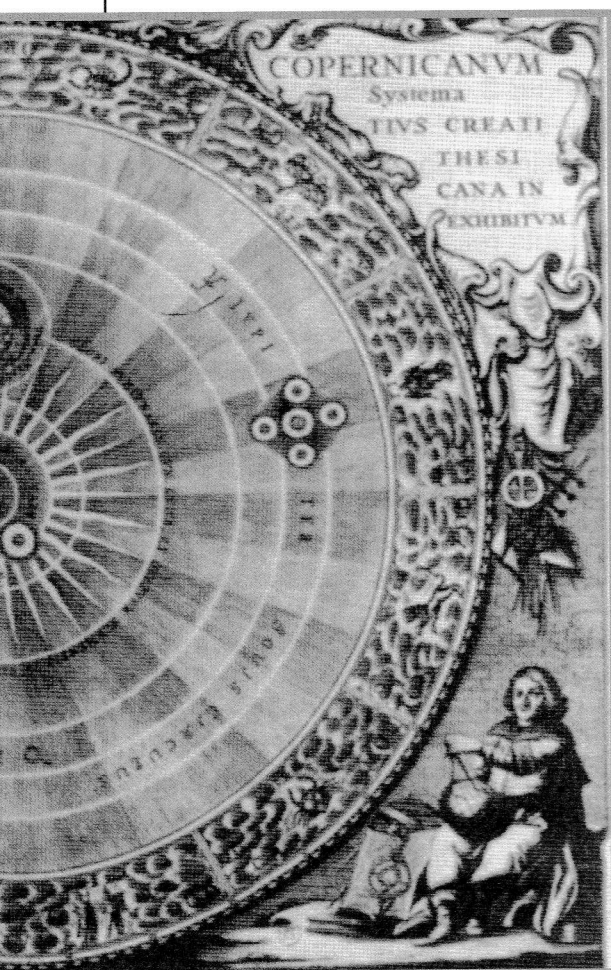


Il y a 28 jours dans une lunaison et c'est un rythme qui s'est imposé aux hommes les plus primitifs (aviez-vous pensé à l'origine de l'expression "mal lunée" ?).

La demi-lunaison, 14 jours, et surtout le quart de lunaison, 7 jours, se sont également imposés comme rythmes fondamentaux. Et c'est bien sûr pour cela que dans la Bible, l'auteur de la Genèse a indiqué 7 jours comme durée de la création, faisant ainsi du nombre 7 un symbole de perfection et lui donnant une valeur éminente qu'il a conservée aujourd'hui.

Autre nombre lié au calen-

drier, 13 : il y a 13 mois lunaires dans une année ($13 \times 28 = 364$). Si



vous êtes tentés par la superstition, vous avez le choix entre faire de 13 un nombre bénéfique, car c'est le nombre de mois lunaires dans une année, ou bien un nombre maléfique, car c'est le nombre de jours d'une demi-lunaison moins un. Choisissez, tout peut être argumenté, et le contraire de tout !

On peut aussi diviser l'année en 12 mois, c'est ce qu'ont fait les Chaldéens, à qui l'on doit également l'invention (vers 500 av. J.-C. environ) du zodiaque avec ses 12 constellations. L'inconvénient est bien sûr d'avoir un mois supérieur de 2.4 jours au mois lunaire... mais il y

a un avantage non négligeable : 12 est divisible par 4 et l'on peut alors associer 3 mois à chaque saison.

Bien sûr, on n'oubliera pas 365 jours dans l'année, 366 les années bissextiles, 100 la périodicité des années qui devraient être bissextiles et qui ne le sont pas, 400 la périodicité de celles qui le sont quand même, tout cela parce qu'une année vaut (à peu près !) :

365.2422 jours et que
 $365 + 1/4 - 1/100 + 1/400 = 365.2425$

Vous savez maintenant pourquoi l'an 2000, dernière année du XIXe siècle, sera (quand même !) bissextile.

Autre nombre remarquable, ou tout au moins longtemps considéré comme tel : 5, le nombre des planètes. Les Anciens connaissaient Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne, dont ils avaient repéré les mouvements erratiques sur la voûte céleste des étoiles.

Ils n'avaient pas conscience que la Terre était elle aussi, une planète tournant autour du Soleil, et ils n'imaginaient pas qu'il put y avoir d'autres planètes au-delà de Saturne (Uranus a été découverte en 1781 par Herschel).

La conviction des Anciens que 5 était en quelque sorte un nombre parfait était renforcée par l'association qu'ils avaient effectuée entre les 5 planètes et les 5 solides platoniciens. Pour être complet, il faut ajouter que c'est parfois le nombre 7 qui a été considéré comme le nombre fondamental: il y a en effet 7 corps célestes mobiles sur la voûte céleste (le Soleil, la

Lune et les 5 planètes connues des anciens).

Les nombres de la combinatoire

Avec 1 lettre (a), on peut former un seul "mot": a . Avec 2 lettres (a, b), on peut former 2 "mots" : ab et ba . Avec 3 lettres (a, b, c), on peut former 6 "mots": $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Avec 4 lettres (a, b, c, d), on peut former 24 "mots": $abcd, abdc, acbd, \dots, dcba$.

On peut montrer que ces nombres successifs sont ce que les mathématiciens appellent des "factorielles", qu'ils notent en ajoutant un point d'exclamation. $n!$ (prononcez "factorielle enne") est le produit des entiers de 1 à n :

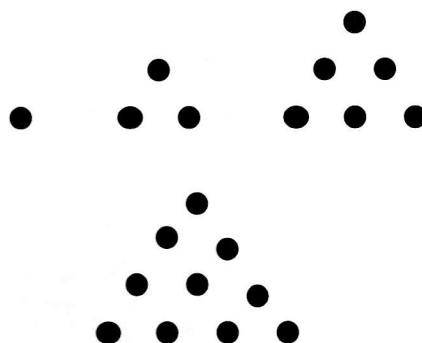
$$\begin{aligned} 1! &= 1, \\ 2! &= 1 \times 2 = 2, \\ 3! &= 1 \times 2 \times 3 = 6, \\ 4! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24, \\ 5! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Ces nombres croissent très vite :
 $10! = 3\,628\,800$,
 $20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$,
 $30! = 265\,252\,859\,812\,191\,058\,636\,308\,480\,000\,000$, etc.

Une autre suite de nombres qui interviennent en combinatoire est la suite 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, ... (formule générale $n(n-1)/2$).

On les appelle parfois nombres triangulaires, parce qu'ils représentent la somme des entiers jusqu'à n (vérifiez-le ...) et qu'on peut donc les dessiner par des points en triangle (tout comme on

peut dessiner les carrés parfaits par des points en carré). Ces nombres représentent également le nombre de manières dont on peut sélectionner 2 objets dans un ensemble qui en contient n ; exemple: si l'on dessine n points au hasard, il y a exactement $n(n-1)/2$ segments différents reliant deux points.



Si vous supportez que la complexité s'accroisse un peu, sachez que si l'on dessine n points au hasard, il y a exactement

$$n(n-1)/2$$

triangles différents formés par des "triplets" de points.

Les nombres ainsi définis, appelés parfois nombres pyramidaux, forment la suite :

0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, ...

Les nombres de l'homme

Les bases de numération

Les peuples les plus primitifs comptaient ainsi: un, deux, deux-et-un, deux-et-deux, beaucoup. Puis ils ont progressivement forgé le système de numération "avec base" pour désigner les grands nombres.

Avec la base 10, c'est le système unités-dizaines-centaines-milliers-...

Les bases utilisées dans l'histoire de l'humanité pour des systèmes de numération ont été très nombreuses :

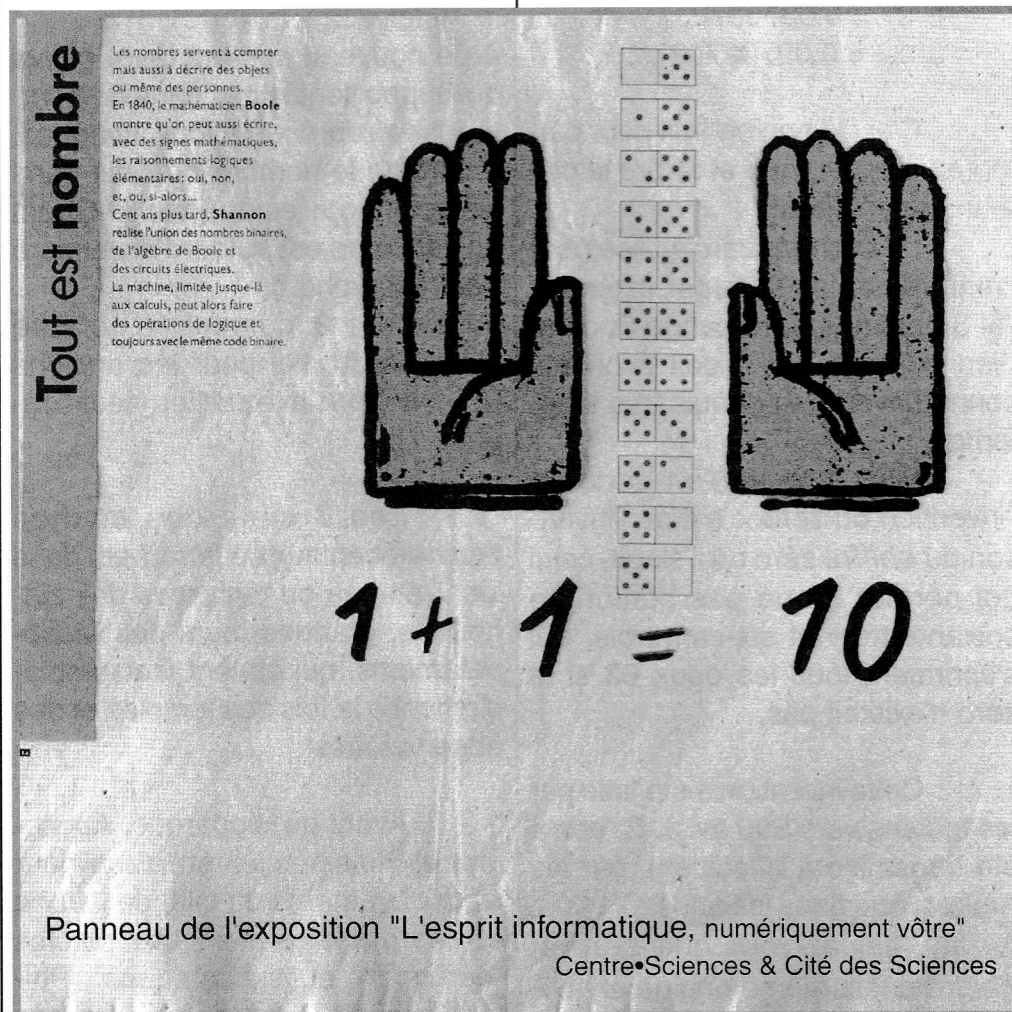
- **2** comme la plus simple, mais aussi la plus longue pour écrire les nombres, utilisée - mais de façon très restreinte - par les hommes les

- **8** ou **16** comme des "blocs" de 3 ou 4 chiffres binaires,

- **10** comme les doigts des deux mains,

- **12** comme le plus petit nombre divisible par 2 par 3 et par 4 (vous avez dit des douzaines et des "grosses" de douze douzaines ? Sans oublier les jours de 24 heures),

- **20** comme les doigts des mains et



plus primitifs, et qui est revenue en force avec l'omniprésence de l'informatique,

- **5** comme les doigts de la main,

- **6** comme le plus petit nombre divisible par 2 et par 3,

des pieds (vous avez dit quatre-vingts ?)

- et **60** comme le plus petit nombre divisible par 2, 3, 4, 5 et 6 (vous avez dit 60 secondes ou 360 degrés ?).

Aux systèmes de numération on peut rattacher les configurations de chiffres formées par les décimales des fractions "qui ne tombent pas juste".

Ainsi, dans la base 10 habituelle,

$$1/3 = 0.333333333...$$

$$2/3 = 0.666666666...$$

$$1/7 = 0.142857142857...$$

tout le monde sait cela.

Mais saviez-vous que :

$$1/27 = 0.037037037... \text{ et}$$

$$3/37 = 0.027027027... ?$$

C'est le bon endroit pour parler (enfin !) de **zéro** et tordre le cou à un malentendu.

Le *nombre* zéro, utilisé pour compter rien du tout (par exemple: j'ai 3 pommes, j'en mange 3, combien en reste-t-il ?) doit avoir été connu (inventé ?) depuis très longtemps.

Mais lorsque l'on parle de l'invention du zéro, c'est de l'invention du *chiffre* zéro qu'il s'agit, celui qui permet de ne pas confondre soixante-trois et six-cent-trois, qui s'écriraient tous les deux 63 si le zéro n'existait pas.

Cette invention a été faite par les Indiens vers 500 av. J.-C. et n'a été transmise à l'Occident, par les Arabes, que dans les années 1 000. Au fait, saviez-vous que **zéro** et *chiffre* ont la même origine étymologique ?

Les cosmogonies

Lorsque les hommes ont élaboré des cosmogonies et des systèmes de l'univers, quelques petits

nombre entiers ont joué un rôle important :

4 comme les quatre éléments (l'eau, l'air, le feu, la terre) qui, pour les philosophes grecs présocratiques puis pour les alchimistes, constituaient par un mélange convenable toute chose,

5 comme les cinq éléments (wu xing) qui représentent dans le monde chinois traditionnel les cinq énergies naturelles (le bois, le feu, le métal, l'eau, la Terre),

4 de nouveau comme les 4 piliers qui supportent le ciel dans de nombreuses représentations antiques, **7** comme le nombre de ciels dans les cosmogonies du Proche-Orient (le septième est aujourd'hui encore très recherché !),

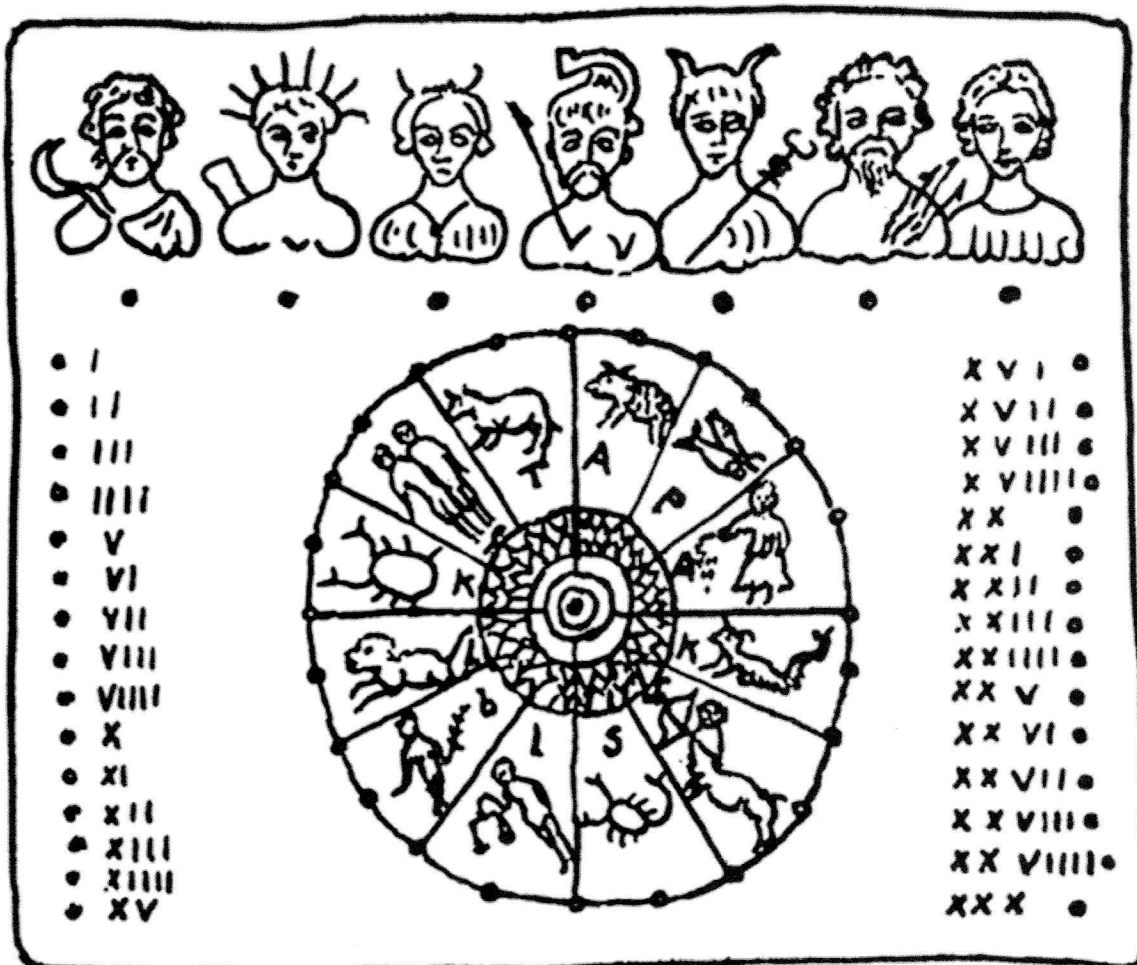
ou encore **9** comme le nombre d'étages du ciel pour les anciens Chinois (vous avez dit les Neuf Dragons ?).

Les 7 ciels des mythes proche-orientaux se retrouvent dans les 7 étages ou terrasses des ziggourats, grandes tours des Mésopotamiens, qui étaient vraisemblablement à la fois des temples et des observatoires.

Avant qu'Hipparque, Apollonius et Ptolémée tentent d'expliquer les mouvements du ciel, de la lune et des planètes avec des cercles "déficients" et "excentriques", Philolaüs avait tenté de décrire ces mouvements avec 10 sphères concentriques ; il pensait que ce nombre était parfait, qui n'a pas empêché Eudoxe d'en imaginer 27, puis Aristote 55.

Quant au zodiaque (bande

qui entoure l'écliptique, cercle du trajet apparent sur la voûte céleste du Soleil, de la Lune et des planètes), qui a déjà été évoqué dans les nombres de la Terre et du ciel, on mesurera tout l'arbitraire de certains nombres si l'on sait que les Babyloniens l'avaient tout d'abord découpé en 18 constellations, puis en 11 seulement, et que les Chaldéens portèrent finalement ce chiffre à 12 en séparant la Balance du Scorpion.



Certains considèrent aujourd'hui qu'Ophiucus est la 13ème constellation du zodiaque (vous avez dit 13 mois lunaires !?). Il faut enfin mentionner le zodiaque lunaire indien (nakshatra) avec 28 constellations. Alors, 11, 12, 13, 18, 28 ? Après tout cela, croyez-vous vraiment que l'on peut regarder un astrologue sans pouffer de rire ?

Des nombres conséquents et inconséquents

L'homme a donné une signification remarquable à beaucoup d'autres nombres.

Certains ont une base objective, comme **les 3 couleurs primaires** (un théorème de "physique physiologique" énonce que 3 est le bon nombre de couleurs qui permet de reconstituer toutes les autres par superposition - et la rétine comprend trois catégories de cônes pour la vision des couleurs), **les 5 sens**, ou encore 7 ou 12 comme nombre de **notes d'une gamme** (on sait en effet depuis les pythagoriciens qu'il y a des lois de l'harmonie, et ces lois conduisent très naturellement à des gammes de 7 ou 2 notes).

D'autres ont une origine vaguement magique mais sont purement conventionnels, comme par exemple **les 3 Grâces**, les prétendues **7 couleurs de l'arc-en-ciel**, les **9 Muses** ou les **10 commandements**, ou encore **les 1001 nuits**.

Et 7 !

Un statisticien, considérant les 7 merveilles du monde (antique), les 7 péchés capitaux, le 7ème art, les 7 nains, et bien d'autres exemples, vous dira que le nombre 7 bat tous les records.

Bien entendu, les choses se compliquent si l'on prend pleinement en compte les civilisations autres que la nôtre. Par exemple, le nombre 9 est à ce point considéré comme bénéfique dans certaines civilisations orientales qu'il existe en Birmanie des billets de 45 et de 90 kyats.

La langue française possède de nombreuses expressions incluant des nombres entiers :

**2 temps 3 mouvements,
monter 4 à 4,
se mettre en 4,
tourner 7 fois sa langue
dans sa bouche,
chercher midi à 14 heures**
(mais pourquoi 14 plutôt que 13,
ou que 10 ou 11 ?),
**22 v'la les flics,
se mettre sur son 31,
"dites 33",
voir 36 chandelles,
être au 36ème dessous,
être aux 100 coups,
faire les 400 coups.**
**Des nombres
bénéfiques et maléfiques**

Pourquoi certains nombres sont-ils traditionnellement considérés comme nobles ou favorables, et d'autres au contraire néfastes ?

Il faut répéter que c'est essentiellement une affaire de tradition et de croyance, extrêmement dépendante du contexte culturel. Il arrive que l'explication soit banale. Ainsi, le nombre 4, *si* (prononcer "sseu") pour les Chinois, est maléfique pour eux (comme pour les Japonais) parce que sa prononciation est extrêmement voisine de celle du nom qui signifie "mort".

Si l'on étudiait en détail cette question, on verrait qu'à travers le temps et les civilisations, les mêmes nombres sont alternativement (ou parfois simultanément !) considérés comme bénéfiques ou maléfiques. On se contentera de rapporter ici les explications les plus convaincantes sur les trois nombres qui arrivent en tête du hit-parade des petits nombres entiers : 7, 12 et 13.

Comme on l'a déjà dit, de toutes les hypothèses qui peuvent être proposées pour expliquer l'omniprésence du nombre 7, la plus naturelle, celle qui avance le nombre de jours d'un quart de lunaison, semble de loin la plus vraisemblable.

A l'inverse, c'est une raison arithmétique (d'être le plus petit nombre divisible à la fois par 2 et par 3 et par 4) qui expliquerait que 12 vienne en seconde place dans la statistique. Le cas de 13 est plus mystérieux, d'autant que c'est l'un des nombres qui sont considérés tantôt comme bénéfiques et tantôt comme maléfiques.

Si 12 est un bon nombre, et 14 aussi (pour la même raison que 7), alors cela pourrait expliquer que 13 soit apparu plutôt mauvais... On trouve dès l'antiquité gréco-romaine des attestations de cette croyance, mais il semble que le dernier repas du Christ ($12 + 1$) ait scellé dans les pays de tradition chrétienne le caractère porte-malheur de 13 (néanmoins le pire nombre pour les Italiens est 17 et non pas 13 - on peut signaler qu'à l'inverse 17 est un nombre particulièrement favorable en Islam - et puis il faut savoir s'arrêter !).



**LE
HASARD :**

**LES
JEUX
LA
VIE**

Des nombres pour jouer

Parmi les nombres complètement conventionnels, il faut faire un chapitre spécial pour les nombres qui interviennent dans les jeux. L'imagination humaine n'a guère de limite et il y a beaucoup de nombres dans les jeux.

Les nombres de joueurs :

1 pour le solitaire et pour les réussites, 2 pour les jeux qui sont des duels (échecs, dames, ...), 4 qui débouche le plus souvent sur un duel de 2 équipes de 2 (bridge, belote, ...), 5 pour le traditionnel tarot et son alliance originale de $1 + 1$ contre 3, beaucoup plus dans les sports d'équipe (hockey, rugby, football, ...).

Le matériel du jeu :

6 faces pour un dé, 26 pièces pour le

Exposition de Centre-Sciences, CCSTI région Centre
"Jeux & stratégies" sur la théorie des jeux

"Rubik cube" (soit $3^3 = 27$ moins le petit cube central), 28 dominos, 32 cartes pour la belote, 37 trous pour le solitaire et 37 cases pour la roulette, 52 cartes pour le bridge, 53 cartes pour le rami, 63 cases pour le jeu de l'oie, $8 \times 8 = 64$ cases pour un échiquier, 78 cartes pour le tarot, $10 \times 10 = 100$ cases pour un damier, 108 cartes pour la canasta.

Les noms de jeux :

jeu du sept, passe-dix, vingt-et-un, vingtsix, trente-et-un, trente-six, trente et quarante, 421.

Les figures :

2 pour une paire, 3 pour un brelan, 4 pour un carré, 5 pour une quinte, 12 levées pour un petit chelem et 13 pour un grand.

Devinette et paradoxe !

Une devinette...

333 888, c'est quoi ?

Certains prétendent qu'un obscur poète nommé Acajou aurait eu le premier cette idée, composant le distique :

« 14 397

Fut le nombre annoncé
par Miss Elizabeth. »

et, vous l'avez deviné, 333 888 est un alexandrin !

... et un paradoxe...

Que pensez-vous du plus petit entier qu'on ne peut pas définir en moins de 30 mots (de la langue française) ?

Qu'il est parfaitement caractérisé par cette phrase qui a moins de 30 mots !!!

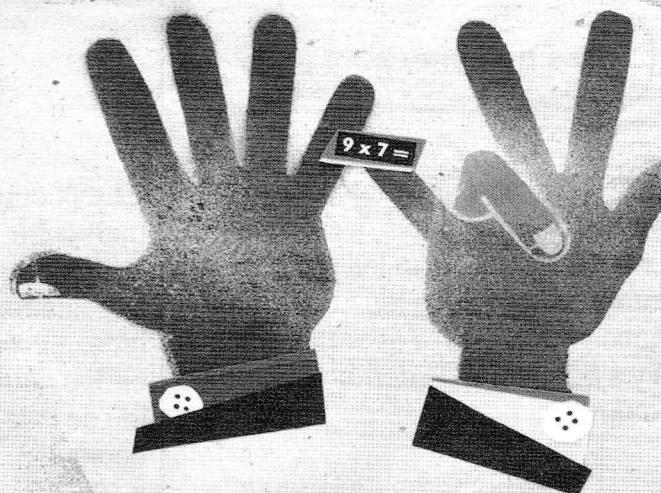
Il ne vous reste plus qu'à trouver où se trouve le paradoxe !

Savez-vous calculer ?

Comment calculaient les Grecs ?
Les Romains ? À quoi sert le zéro ?
Comment les Chinois se servaient-ils des bouliers ?

Parmi les plus anciens algorithmes, on trouve les règles – souvent non dites – qui permettent d'écrire les nombres en chiffres ou en lettres, de les nommer, de calculer directement à partir de ces écritures.

Chaque culture a ses méthodes de calcul. Certaines ont donné naissance aux machines à calculer de Pascal, de Leibniz. D'autres, encore plus anciennes, sont aujourd'hui utilisées dans les calculatrices électroniques.



Inutile d'apprendre ou de faire apprendre par cœur les tables de multiplication ! Il suffit de - bien- savoir compter sur ses doigts. Pour calculer, par exemple, 9×7 , mettez vos mains devant vous, comptez sur vos doigts jusqu'à 7 en partant de la gauche. Abaissez votre 7ème doigt et regardez vos deux mains : les doigts non baissés de gauche marquent les dizaines, les doigts non baissés qui suivent le doigt baissé marquent les unités. Étonnant non ! Essayez avec d'autres multiplications par 9. Et avec un autre nombre ?

2000, année mondiale des mathématiques"

Gérard Tronel, responsable pour la France

Pourquoi une année mondiale ?

Ni plus ni moins que leurs contemporains les mathématiciens s'intéressent à l'an 2000 qui devrait être une année ordinaire, mais ce n'est pas tout à fait le cas puisque, déjà en 1992, l'Union Mathématiques Internationale avançait l'idée de faire de l'année 2000, l'Année Mondiale des Mathématiques.

Quels sont les buts visés par cette initiative qui, dès le début a reçu le soutien de l'UNESCO ? Certainement attirer l'attention des communautés scientifiques sur le rôle des mathématiques dans les autres champs de la connaissance, mais aussi informer le grand public sur la place des mathématiques dans la vie culturelle, sociale et économique de tous les pays.

Parmi les éditeurs spécialisés dans les publications de revues et d'ouvrages consacrés aux mathématiques Springer a été le premier à apporter un appui sincère et efficace au lancement et à la réussite de l'Année Mondiale des Mathématiques comme en témoigne l'adoption du logo WMY 2000, maintenant familier à tous ceux qui portent un regard sur les mathématiques.

L'année 2000, nous y sommes déjà à mi-parcours ! Comment les mathématiciens sont-ils entrés dans cette année ? Ils préparent activement les manifestations organisées à cette occasion :

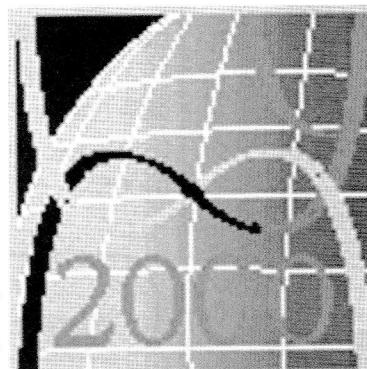
Les programmes sont ambitieux comme en témoigne l'agenda de la Newsletter WMY 2000 qui paraît

régulièrement.

À titre d'exemples sur Les réalisations orientées vers le grand public il faut souligner la réalisation par la communauté canadienne d'une campagne sur les mathématiques dans le métro de Montréal, ainsi que le congrès de Macau sur le thème " Mathematics and its Role in Civilization " qui s'est déroulé du 11 au 14 janvier.

La communauté mathématique attend également des éditeurs des initiatives originales.

La revue mensuelle Pour la Science vient d'éditer un excellent numéro spécial sur "Bourbaki". Elle met un fort coup de projecteur sur des auteurs mathématiciens comme Jean-Paul Delahaye, Ian Stewart. La Recherche va sortir un numéro spécial sur les Jeux mathématiques. Il est curieux et inquiétant de constater que l'on écrit beaucoup de livres sur l'art et les artistes, sur la littérature et les écrivains, sur la poésie et les poètes, mais peu d'ouvrages sur les mathématiques et les mathématiciens, même si certains scientifiques, liés de près ou de loin aux mathématiques, font l'objet de publications pour le grand public : réduire la communauté mathématique à son représentant, certes le plus connu, Einstein, ne rend pas compte de la grande diversité de toute la communauté. Il semble que la correspondance entre les mathématiciens pourrait également faire l'objet de publications montrant la



Ce logo a été créé par Marie-Claude Vergne de l'Institut des Hautes Études Scientifiques de Paris.

Il est le logo de l'Année mondiale des mathématiques : **WMY 2000.**

grande richesse de cette communauté mathématique .

Une fin de siècle peut aussi être l'occasion de faire un bilan et de dégager des perspectives novatrices.

Année mondiale de la culture et de la paix

Saisie par le Luxembourg, soutenue par de nombreux pays, dont la France, l'UNESCO a renouvelé, lors de son assemblée générale de novembre 1999, la décision qu'elle avait déjà prise en novembre 1997 : l'année 2000 sera pour l'UNESCO, l'année mondiale des mathématiques. On sait que, selon la proposition du Directeur Général sortant, Federico Mayor, elle sera d'abord et surtout l'année de la culture et de la paix.

Y aurait-il un rapport et lequel, entre la culture de la paix et la culture des mathématiques ?

Un rapport superficiel d'abord : l'une et l'autre font grincer des dents à certaines gens.

Un rapport plus sérieux : les mathématiques ont joué un rôle dans la guerre froide, elles jouent un rôle dans la guerre économique, il y a beaucoup de mathématiques dans les armes modernes et dans la bulle financière. Y a-t-il place pour elles dans la culture et la paix ?

Tous les thèmes de l'année 2000 sont des éléments de réponse. La recherche scientifique, dans son universalité est un facteur de coopération internationale et de détente :

l'American Mathematical Society en avait donné un exemple éclatant au début des années 80, en refusant de coopérer avec la National Security Agency pour limiter la diffusion des recherches ayant un impact sur la cryptologie.

Faire sortir les mathématiques de leur invisibilité, c'est refuser d'entériner leur image comme arme secrète des riches et des puissants. Les faire concourir au contraire au développement de tous les peuples, comme il est possible malgré les entraves, c'est bien les inscrire dans la culture de la paix mondiale à venir.

L'année 2000 contribuera à l'essor des mathématiques. De façon plus importante encore, elle peut faire des mathématiques et de leurs tendances, de leurs applications, de leur enseignement, de leur image, un grand enjeu de société, qui intéresse tout le monde et qui s'inscrit dans les perspectives de l'humanité.

Les objectifs de l'année mondiale

Ils sont 3 :

- l'énoncé des grands défis mathématiques du 21^e siècle,
- l'affirmation que les mathématiques, à la fois pures et appliquées, sont l'une des clés du développement, et
- la reconnaissance de la présence systématique des mathématiques dans la société de l'information.

Le site de l'année mondiale :

wmy2000.math.jussieu.fr/

Nombres dans la nature

À propos de l'exposition "Maths & Nature"

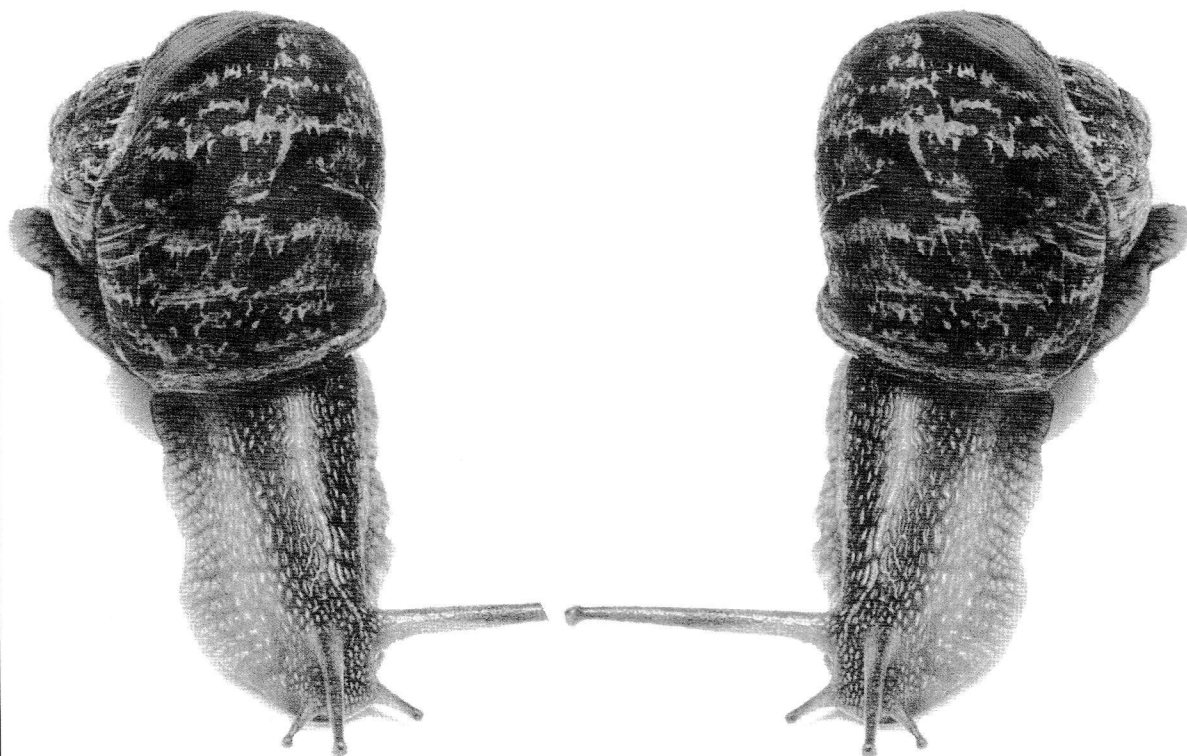
La nature est-elle symétrique ?

Dans le cadre de l'année mondiale des mathématiques, le Plot diffuse une série d'articles associés aux deux séries de posters qui vont être réalisés, avec le concours du Comité européen de l'année mondiale, par Centre•Sciences et diffusés par la Réunion des CCSTI.

La première série de 12 posters porte sur le thème **Mathématiques et nature** et s'appuie sur les propositions de panneaux qui ont reçu les premiers prix du concours lancé par WMY 2000 et l'Unesco, et

en particulier celles de Stéphane Durand, physicien de l'Université de Montréal qui a bien voulu nous prêter son concours pour éditer ces panneaux.

La seconde série de 12 posters portera sur **les mathématiques dans la vie quotidienne**. Elle abordera des problèmes qui vont des codes secrets aux ondes, de la circulation en ville à celle sur Internet, des images compressées aux images médicales.



Quel est celui que vous mangez le plus souvent ?

de Fibonacci à phi

Apmep de Haute-Normandie et Poitou-Charentes

Ces textes sont extraits et complétés de "Maths en scène", publié par l'Apmep de Rouen et Science-Action (ici Jacqueline Borréani) et "des maths et vous" de l'Apmep de Poitou-Charentes, pour accompagner l'exposition "Maths 2000".

Les pétales des fleurs

Pourquoi le nombre de pétales des fleurs est-il souvent un des nombres suivants : 3, 5, 8, 13, 21, 34 ou 55 ? Par exemple, les lis ont 3 pétales, les boutons d'or en ont 5, les chicorées en ont 21, les mar-

pommes de pin : pourquoi ont-elles 8 spirales d'un côté et 13 de l'autre ? Et finalement, pourquoi le nombre de spirales d'un ananas est-il aussi 8 dans une direction et 13 dans l'autre ? (Sauf aux Antilles où vous pourrez en trouver qui en ont 13 et 21 : ce sont les ananas bouteilles).

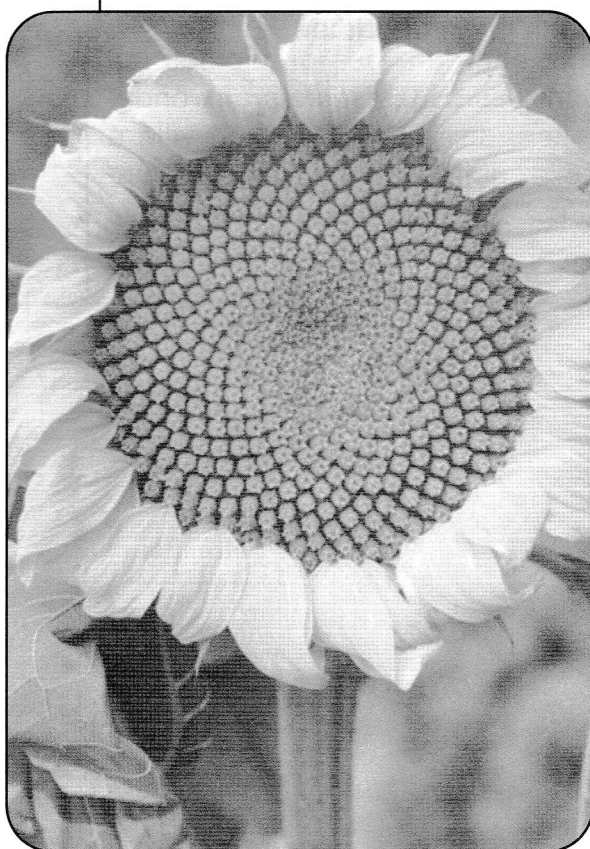
Ces nombres sont-ils le ... fruit du hasard ? Non ! Ils font tous partie de la suite de Fibonacci : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc., où chaque nombre s'obtient à partir de la somme des deux précédents. Depuis longtemps on avait remarqué que ces nombres étaient importants dans la nature, mais c'est seulement depuis peu qu'on comprend pourquoi.

C'est une question d'efficacité dans le processus de croissance des plantes. L'explication est néanmoins un peu compliquée et on ne la présentera pas ici.

Contentons-nous de mentionner qu'elle est reliée à un autre nombre fameux, le nombre d'or, lui-même intimement lié à la forme spirale de certains coquillages.

Mentionnons aussi que, dans le cas du tournesol, de l'ananas et de la pomme de pin, la correspondance avec les nombres de Fibonacci est très exacte, tandis que dans le cas du nombre de pétales des fleurs, elle est plutôt vérifiée en moyenne ; et dans certains cas le nombre est doublé, car les pétales sont disposés sur deux rangées.

Stéphane Durand
in *Math2000*, supplément à la
Revue *QuébecSciences*
de Mai 2000



guerites ont souvent 34 ou 55 pétales, etc.

Par ailleurs, lorsqu'on observe le cœur des tournesols on remarque deux séries de courbes, une enroulée dans un sens et une dans l'autre ; le nombre de spirales n'étant pas le même dans chaque sens. Pourquoi le nombre de spirales est-il en général soit 21 et 34, soit 34 et 55, soit 55 et 89, ou soit 89 et 144 ? Même chose pour les

Les nombres de Fibonacci

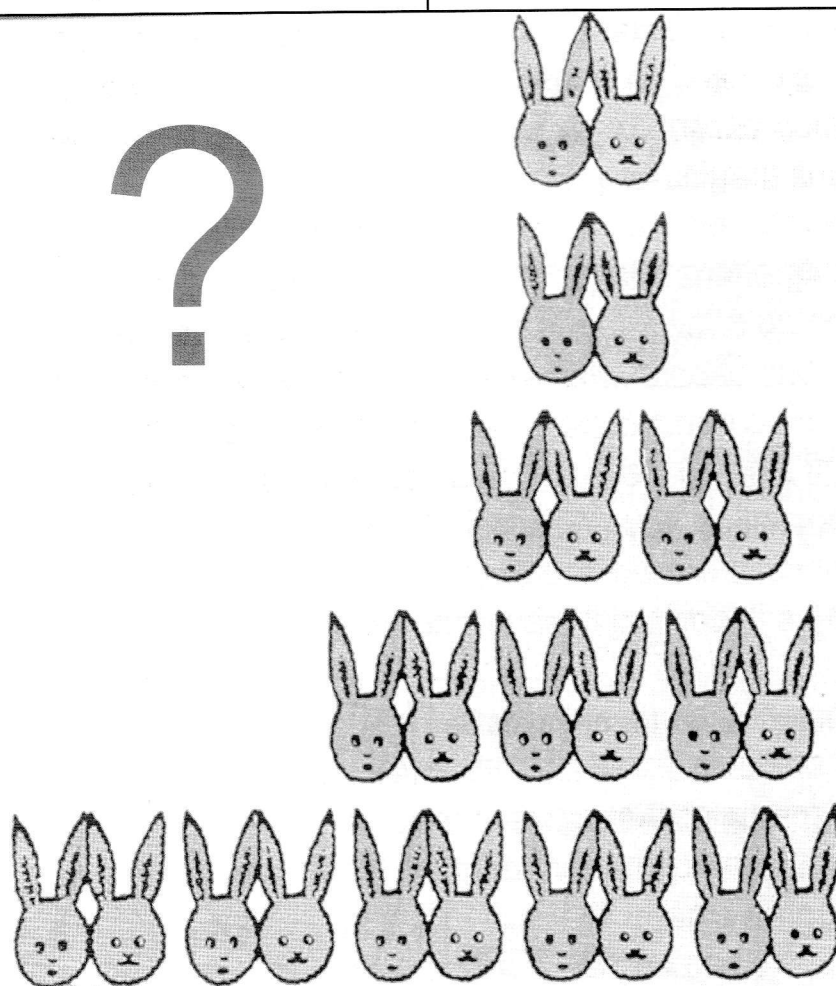
Dans son ouvrage, Liber Abaci (livre de l'abaque), paru en 1202, Fibonacci ou Léonard de Pise, a étudié un problème qui a inspiré

de nombres 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13.... u_n ,

.. : dite suite de Fibonacci. Cette suite s'obtient par une récurrence : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$. Chaque terme de la suite est égal à la somme des deux termes précédents à partir du rang 2.

Les deux premiers termes de la suite

Ces textes et ceux des prochains numéros du Plot, sont là pour accompagner les affiches réalisées par Centre•Sciences et diffusées par la Réunion des CCSTI dans toutes les régions et dans tous les pays francophones avec le concours du Ministère des Affaires Etrangères.



de nombreux mathématiciens :

1 lapin + 1 lapin = ???

"Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin d'une année, si, commençant avec un couple de nouveau-nés, chacun des couples produit chaque mois un nouveau couple, lequel devient productif au second de son existence ?".

Ce problème célèbre utilise la suite

sont 1 et les autres sont :

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

$$3 + 5 = 8$$

$$5 + 8 = 13$$

$$8 + 13 = 21 \dots$$

Cette suite particulière possède de nombreuses propriétés, entre autres :

2	circée
3	iris, lis tulipe plantain
5	anémone églantine
8	ficaire anémone
13	camomille marguerite
21	aster chicorée
34	paquerette
55	aster
89	aster

• pour tout $n > 0$, les nombres U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux. Ils n'ont que 1 comme diviseur commun.

• la limite de U_{n+1} / U_n quand n tend vers l'infini est égale au nombre d'or Φ que nous étudierons plus loin.

• en considérant deux suites (v_n) et (w_n) définies par :

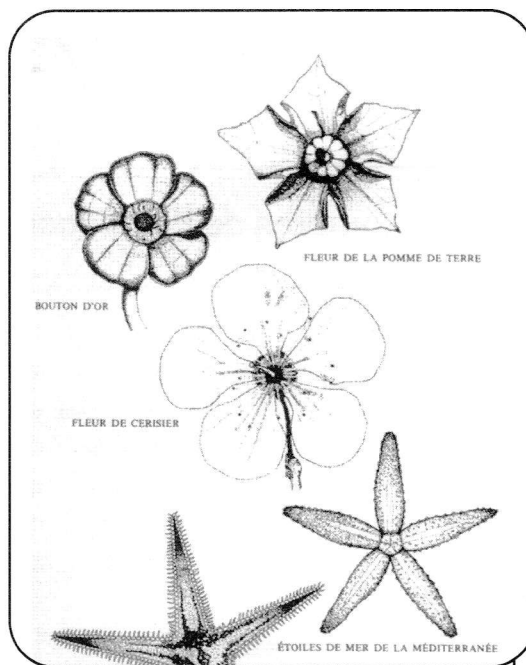
$$v_n = \Phi^n \text{ et } w_n = (-1/\Phi)^n,$$

on démontre que $u_n = (v_n - w_n) / \sqrt{5}$,
C'est la formule de Binet.

Quelques particularités des plantes

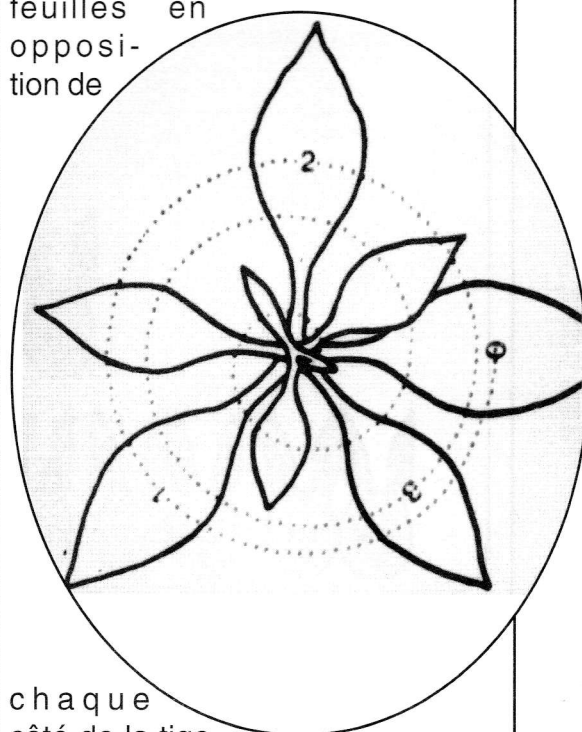
Le tableau ci-contre présente une répartition de fleurs courantes selon le nombre de leurs pétales.

Les nombres 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... sont les nombres de pétales les plus fréquemment rencontrés, ce sont les nombres de

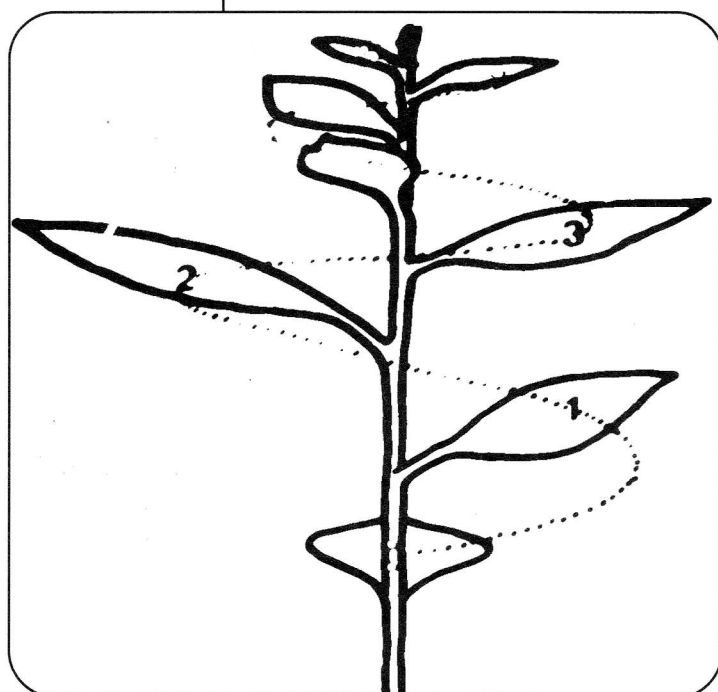


la suite de Fibonacci.

Le long de la tige des plantes, les feuilles sont disposées de façons différentes. Certaines ont leurs feuilles en opposition de



chaque côté de la tige, pour d'autres, les feuilles poussent en décrivant une courbe qui tourne en hélice du bas vers le haut. Concernant la majorité des plantes de cette catégorie, si, à partir de n'importe quelle feuille, on compte



le nombre n_1 de feuilles entre deux feuilles disposées l'une au-dessus de l'autre et le nombre n_2 de tours compris entre ces deux feuilles, on obtient deux nombres de Fibonacci. On peut ainsi associer à chacune de ces plantes une fraction n_1 / n_2 qui mesure en nombre de tours, l'angle entre deux feuilles.

Le même angle est conservé dans la disposition des branches, des bourgeons et des feuilles.

Ainsi, pour un abricotier ou un cerisier, le rapport est de $2/5$, pour un poirier ou un peuplier, il est de $3/8$

Les rapports les plus courants sont

$1/2, 1/3, 2/5, 3/8, 5/13, 8/21$.

Ils sont de la forme

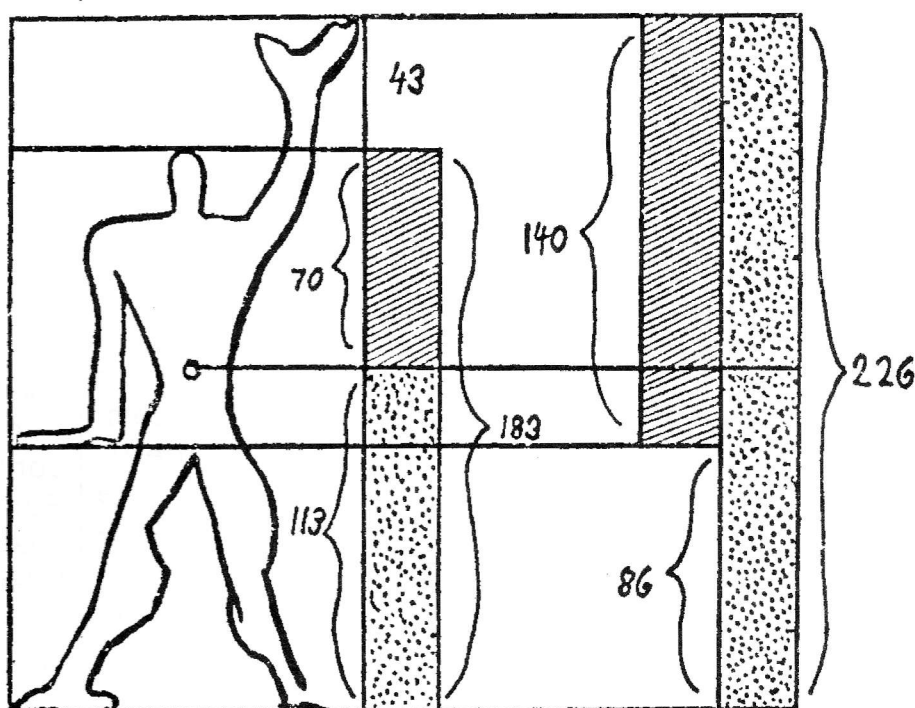
$$U_n / U_{n+2}$$

correspondant à un nombre de tours voisin de $1/\Phi^2$.

Très souvent les branches d'un arbre s'écartent du tronc d'un angle à peu près égal à 69° . C'est l'angle de Wiesner qui correspond à l'angle d'exposition optimale des feuilles de l'arbre à la lumière. Certains font correspondre cette mesure de 69 degrés avec une valeur arrondie, en radians de π/Φ^2 , on peut encore y voir une utilisation mythique du nombre d'or.

Des mesures humaines

Une main humaine peut être utilisée comme unité de mesure. En



effet, un menuisier pour prendre des mesures en valeurs approchées utilise souvent les doigts d'une main en les écartant. La mesure entre le pouce et l'auriculaire s'appelle *l'empan*, la *palme* est la mesure entre l'auriculaire et l'index, la largeur d'une paume de mains est *la paume*. La longueur d'un pied ou entre le coude et l'extrémité du majeur est *la coudée*. Cet ensemble se nomme *la quine* utilisée par les bâtisseurs.

Dans le tableau suivant, on trouve les correspondances entre ces mesures et celles établies en

Paume	palme	empan	pied	coudée
34 lignes	55 lignes	89 lignes	144 lignes	33 lignes

Petit problème fibonacien :

$$1^2 + 1^2 = 1.2$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2.3$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3.5$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5.8$$

Pouvez-vous continuer ?

prenant comme unité de base une ligne, c'est-à-dire le diamètre d'un grain d'orge, à peu près 0.225 cm.

34, 55, 89, 144, 233, nous retrouvons des nombres de la suite de Fibonacci.

doigts de la main de cet homme ; lorsqu'il lève le bras.

À partir de ces deux nombres, 183 et 226, il construit une suite dite rouge (11, 16, 27, 43, 70, 113, 183, 296, ...) et une suite dite bleue (22, 32, 54, 86, 140, 226, 366 ...). Dans ces deux suites, chaque terme est la somme des deux termes précédents, comme dans la suite de Fibonacci. Le quotient de deux termes consécutifs tend vers le nombre d'or Φ quand le rang tend vers l'infini.

Le système de Le Corbusier

1	2	3	4	5	6	7
11	16	27	43	70	113	183

**Calculez $u_n + u_{n+1}$
et u_{n+1} / u_n**

Plus récemment, Le Corbusier (1887-1965) pensa que le système anglo-saxon,

basé sur le pied (0,324 mètre) et le pouce (un douzième de pied), était mieux adapté aux mesures de l'homme que notre système métrique, même si ce dernier est plus facile à utiliser. Afin de palier les faiblesses des deux systèmes, Le Corbusier va mettre au point une nouvelle gamme de mesures appelée "modulor". L'unité de mesure est celle d'un homme de six pieds soit 183 centimètres. Une autre mesure privilégiée est celle de la distance entre le sol et l'extrémité des

C'est ce système de mesures que Le Corbusier a mis en application dans l'Unité d'Habitation construite à Marseille, la Cité Radieuse, dans les années cinquante. Le Corbusier s'appuie sur l'idée répandue de relations existantes entre le nombre d'or et les arts. En effet, dans les années 1920-1930, plusieurs ouvrages sont parus, développant l'argumentaire d'une utilisation délibérée du nombre d'or dans la statuaire et l'architecture grecque ainsi que dans la construction des tableaux des peintres de la Renaissance.

Autre problème fibonacien :

$$2^3 + 3^3 - 1^3 = 34$$

$$3^3 + 5^3 - 2^3 = ??$$

$$5^3 + 8^3 - 3^3 = ??$$

Pouvez-vous compléter et continuer ?

$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: le nombre d'or

Φ

Le nombre d'or remonte très loin dans l'histoire. Il est présent dans ce que l'homme construit mais également dans l'univers du vivant. On le trouverait déjà dans la Pyramide de Chéops construite 2800 av. J.-C. : si on considère chaque face triangulaire de la pyramide, le rapport entre sa hauteur et sa demi-base carrée B, serait précisément égal au nombre d'or. On en trouve aussi trace dans les *Éléments* d'Euclide quand il s'agit de partager un segment en extrême et moyenne raison [13].

ture et peinture).

C'est le premier ouvrage consacré au nombre d'or, *Sectia aurea*, comme le nomme Léonard de Vinci illustrateur de la "*Divine proportion*".

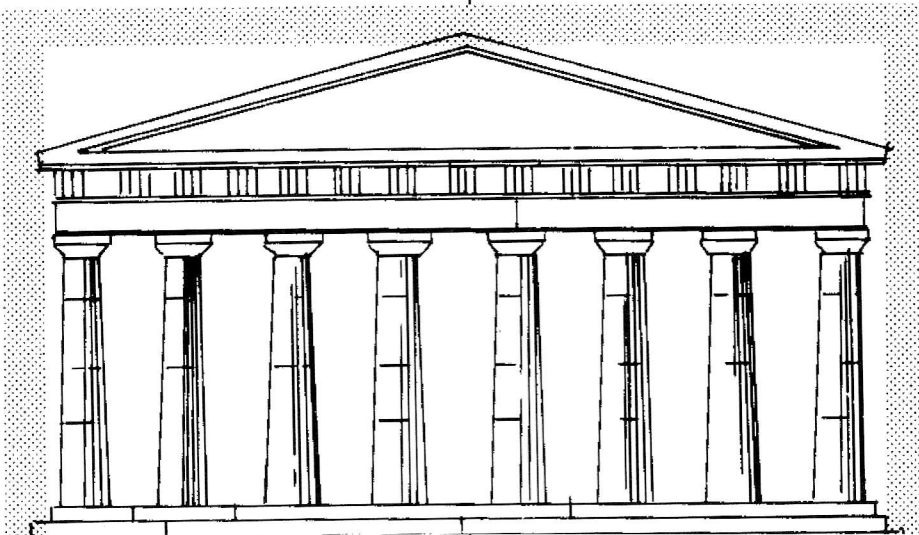
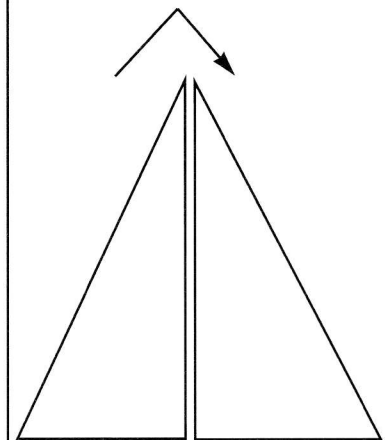
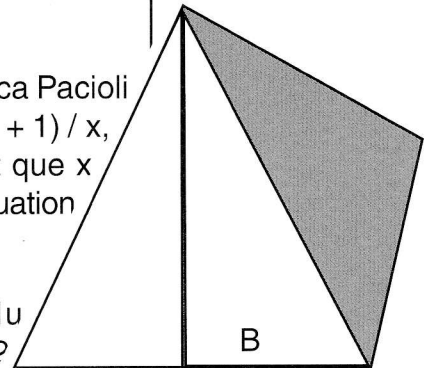
La définition de Luca Pacioli renvoie à l'équation $x = (x + 1) / x$, ou encore, en supposant que x est différent de zéro, à l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Ce trinôme du second degré admet 2 racines. La solution positive est le nombre d'or noté

$$\Phi = (1 + \sqrt{5}) / 2.$$

Une valeur approchée est 1,618034.



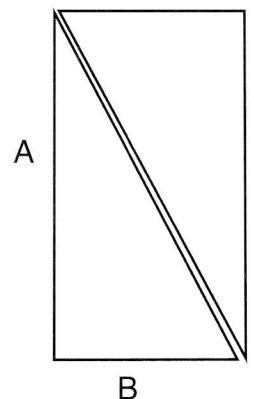
Luca Pacioli, moine et mathématicien, donne une définition du nombre d'or dans son ouvrage la "*Divine proportion*" en 1509: « Le nombre d'or est tel que si on lui ajoute l'unité et qu'on le divise par lui-même, on le retrouve ». Dans ce traité, Pacioli développe les propriétés mathématiques du nombre d'or mais aussi ses conséquences esthétiques dans les arts (architec-

On le retrouverait aussi dans l'architecture grecque. Le Parthénon, sur l'Acropole d'Athènes, aurait été construit selon cette proportion idéale.

Sa façade, fronton y compris, s'inscrit dans un rectangle d'or.

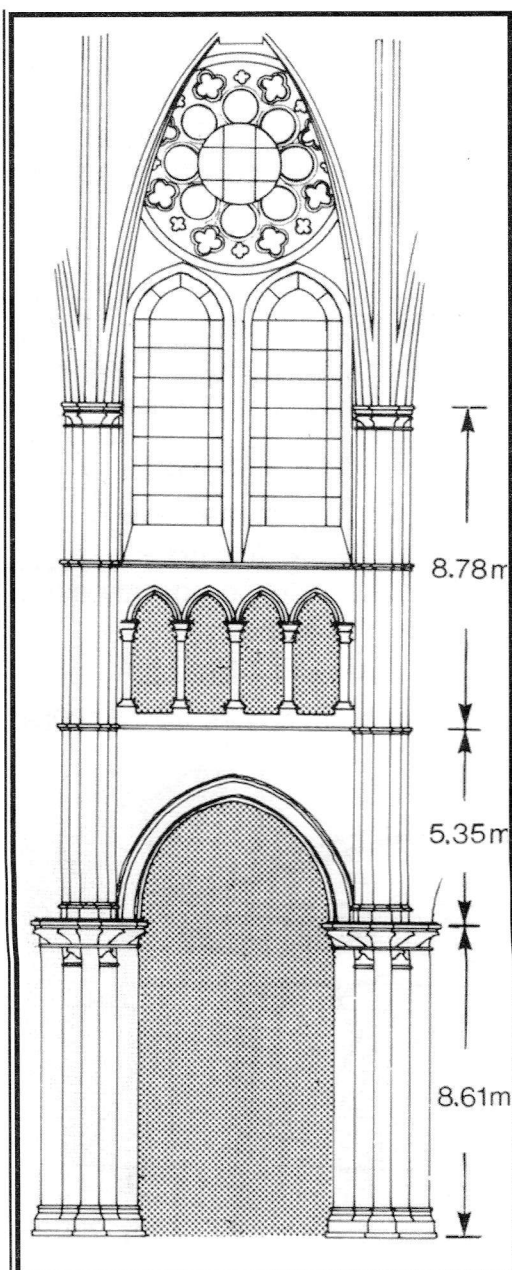
Les constructeurs de cathédrales au Moyen âge auraient aussi exploité cette ... divine proportion.

29



Le rectangle d'or

Le symbole du nombre d'or Φ (qui se prononce phi) aurait été fixé, au début du 20^e siècle, en hommage à Phidias architecte grec qui a décoré le Parthénon.



C'est sans doute **la cathédrale de Chartres** qui en présente la meilleure illustration. On y retrouve le nombre d'or aussi bien dans le plan de base que dans l'élévation de la cathédrale.

Les chapiteaux séparaient les fûts des colonnes suivant une proportion voisine du nombre d'or :

$$8,78 / 5,35 = 1,6411$$

$$8,78 + 5,35 / 8,61 = 1,64111$$

Ces proportions se devinaient

jusque dans le dessin des statues qui ornent le Portail Royal, devant la cathédrale.



Ce nombre possède de nombreuses propriétés algébriques et géométriques.

- Comme $\Phi^2 = \Phi + 1$, on obtient, quel que soit n , l'égalité :

$$\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n$$

- Φ peut aussi s'écrire comme fraction continue. Comme $\Phi = 1 + 1/\Phi$, on peut remplacer Φ par $1 + 1/\Phi$. On obtient :

$\Phi = 1 + 1/\Phi = 1 + 1/(1 + 1/\Phi) = \dots$
soit une écriture illimitée en fraction continue :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

La divine proportion

Problème : trouvez deux segments dont le rapport des longueurs soit égal au rapport des longueurs du plus grand à la somme des deux longueurs.



Soit : $A / B = (A + B) / A$

qui peu aussi s'écrire

$$A/B = A/A + B/A = 1 + B/A$$

Le rapport A/B correspond au nombre d'or, nous avons donc :

$$\Phi = 1 + 1/\Phi.$$

D'où : $\Phi - 1 = 1/\Phi$.

L'inverse du nombre d'or est égal au nombre d'or moins 1 !

On a aussi :

$$\Phi = 1 + 1/\Phi = (\Phi + 1) / \Phi$$

d'où :

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

Augmenté d'une unité, le nombre d'or est égal à son carré.

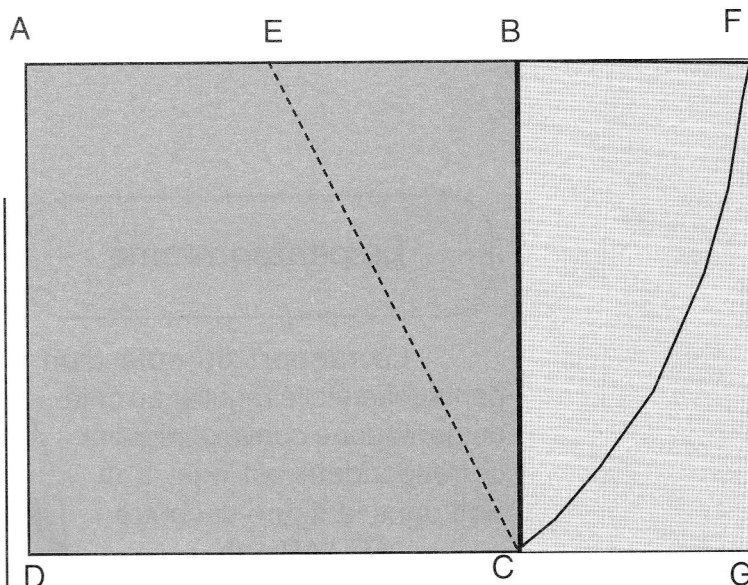
Le rectangle d'or

Problème :

Construire un rectangle qui, diminué de son plus grand carré laisse un rectangle d'or, c'est-à-dire un rectangle dont le rapport longueur/largeur soit égal au nombre d'or.

Solution :

Partez d'un carré ABCD dont le milieu de l'un des côtés soit E. Tracez l'arc de cercle de centre E et de rayon [EC]. Il coupe [AB] en F.



Le rectangle de côtés [AF] et [AD] est un rectangle d'or.

Démonstration : décidons que [AB] ait pour longueur 2 unités. Alors $EC = EF = \sqrt{5}$ unités.

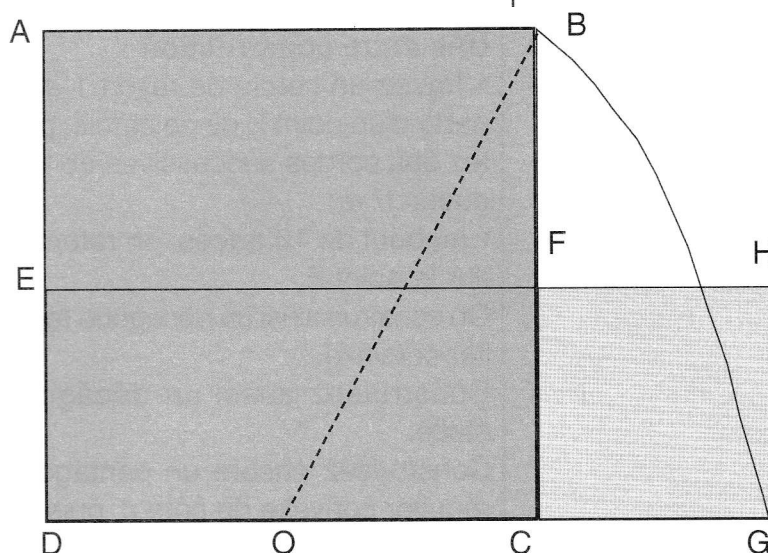
$$\text{Et } AF / GF = (AE + EF) / FG \\ = (1 + \sqrt{5}) / 2 = \Phi.$$

Le rapport AF / AB est égal au nombre d'or.

Il est tel que AB est la moyenne raison entre AF et BF.

$$AF / AB = AB / BF$$

c'est-à-dire : $AB^2 = AF \cdot BF$.



Construction d'Euclide

Soit à construire F sur BC tel que $CB / CF = \Phi$.

O est le milieu d'un côté du carré ABCD. ABFE et le carré CFGH ont même aire.

$$AB \times BF = CF^2 \text{ et } CB \times BF = CF^2.$$

On a donc bien $CB / CF = \Phi$.

Le pentagramme

Le rapport du côté d'un pentagone étoilé régulier au côté du pentagone convexe régulier correspondant est égal à Φ . Soit dans la figure ci-contre : $AC / AB = \Phi$.

Construction du pentagone régulier

- Tracez un cercle de centre O et de rayon égal à 1.
 - Tracez un diamètre [AB] ; H est le milieu de [AO].
 - [OM] est un rayon perpendiculaire à [AB] ;
 - Le cercle de centre H et de rayon HM coupe (OB) en L.
- Démontrez que $AL = \alpha$ et que $OL = 1/\alpha$.

Une autre construction :

- Tracez un cercle de rayon 1 et, à partir d'un point E de ce cercle, portez des cordes successives de longueur $1/\alpha$;
- Au bout de 10 tracés, on retombe sur le point E.

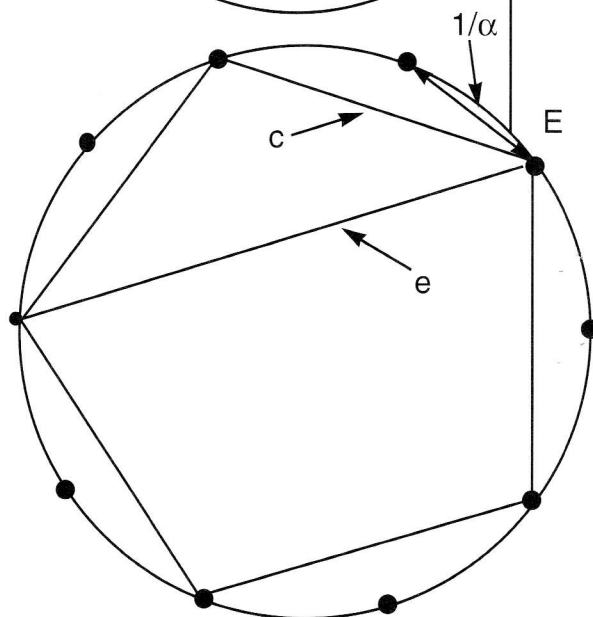
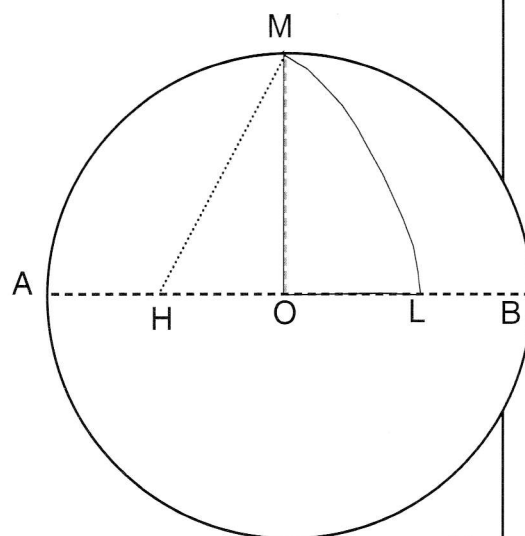
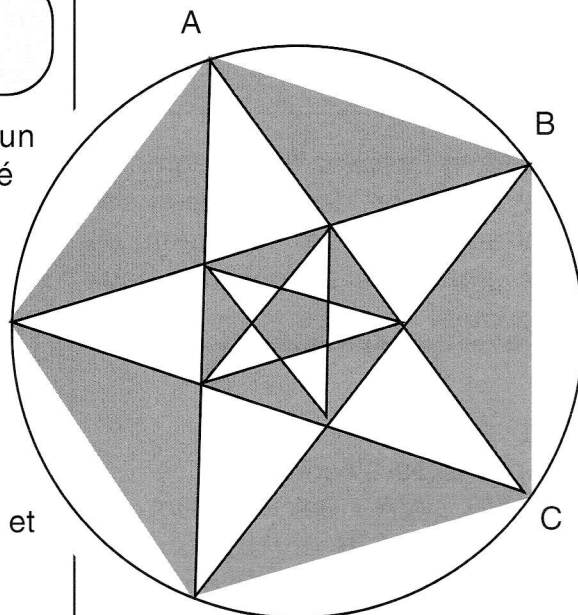
On construit ainsi un décagone régulier convexe.

Construisez aussi un décagone étoilé.

Construisez encore un pentagone régulier convexe de côté c, puis un pentagone régulier étoilé de côté e. Vous apprendrez ainsi que, pour les pentagones réguliers, on a :

$$e/c = \alpha =$$

$$\frac{\text{côté du pentagone étoilé}}{\text{côté du pentagone convexe}}$$



L'escargot d'or

Une spirale est une ligne courbe qui tourne toujours dans le même sens. Très souvent, les spirales sont constituées d'arcs de cercles successifs dont les centres et les rayons changent à chaque passage d'une zone à une autre. La plus simple est la spirale à deux centres, dont les rayons des demi-cercles successifs sont adaptés pour obtenir une ligne continue.

Les spirales d'or

On peut tracer des spirales en utilisant un rectangle ou un triangle d'or, c'est-à-dire un rectangle dont le rapport des mesures de la longueur et de la largeur est égal au nombre d'or ou un triangle isocèle dont un angle mesure 36° .

Voici un exemple de spirale d'or construit à partir de rectangles d'or.

En continuant indéfiniment ce procédé, on obtient une spirale qui converge vers un point.

On peut démontrer que cette spirale possède une longueur finie et que le point de convergence est le point de concours de deux droites perpendiculaires portant les centres des arcs de cercles. Une des deux droites est une des diagonales du premier, troisième, cinquième, ... rectangles d'or et l'autre droite est une des diagonales des autres rectangles.

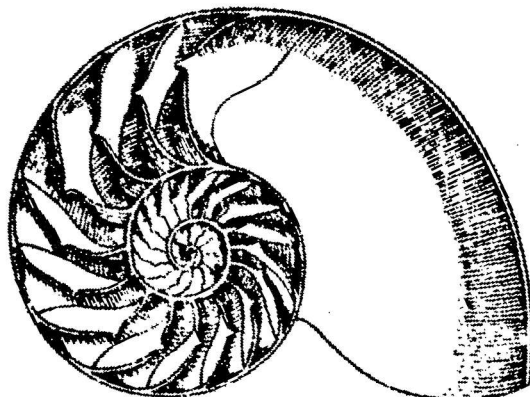
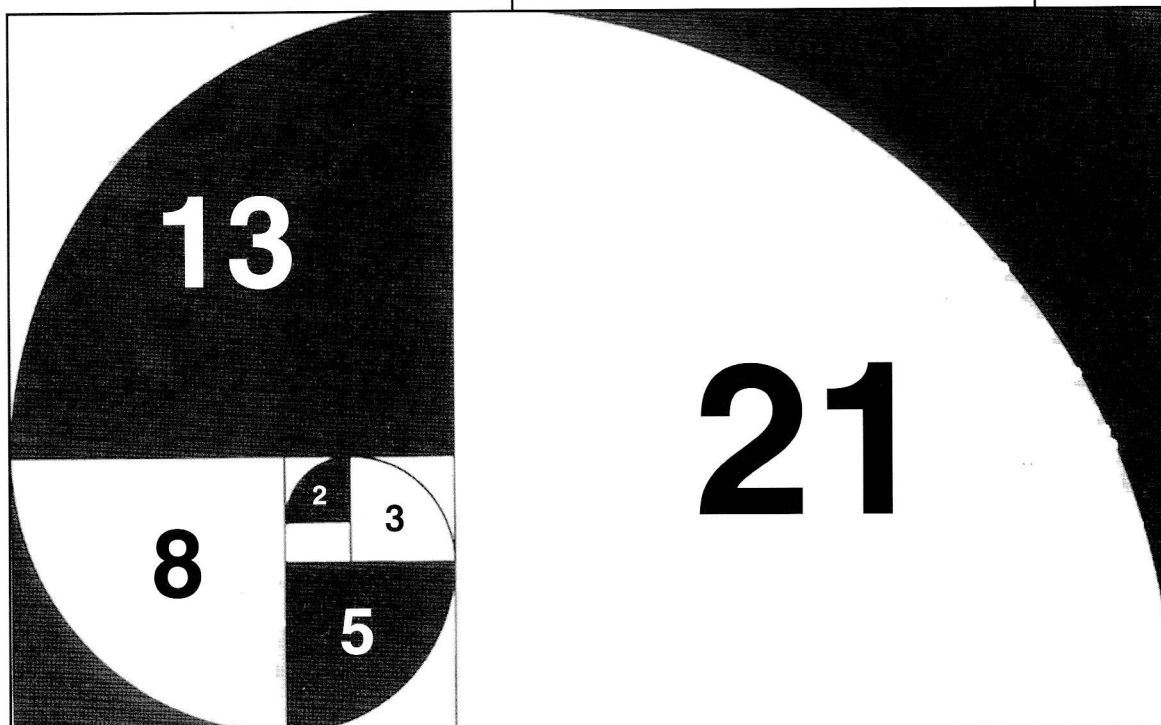


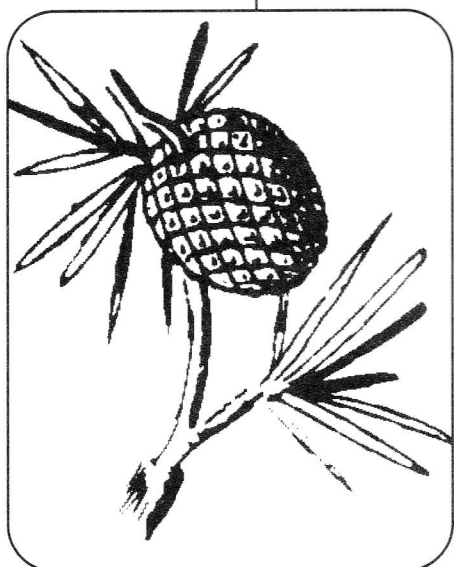
Photo d'un nautilus, coquillage fossilisé existant depuis 500 millions d'années.

Coquillages et nautilus

L'observation de coquillages ou d'escargots par leur sommet,

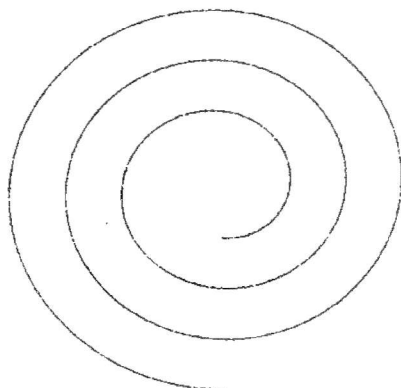


montre un enroulement, sans qu'il n'y ait en général d'axe ou de plan de symétrie. En plaçant le sommet vers le haut et l'ouverture vers soi, à droite, on peut remarquer, pour la plupart des gastéropodes de terre ou de mer, un enroulement qui se fait dans le sens des aiguilles d'une montre, selon une spirale de type logarithmique.



Quelques espèces ou quelques individus dits senestres, échappent à cette règle d'enroulement à droite, ils sont aussi rares que des trèfles à quatre feuilles. Mais on en trouve comme on trouve aussi des pins à gauche et des pins à droite ! Autrement dit, des pins qui font plus de pommes de pins qui ont plus de spirales qui tournent

à gauche et d'autres pins qui ont plus de pommes qui tournent à droite ! Étonnant non ? Et ce phénomène peut changer d'un arbre à l'autre.



D'autres spirales sont formées d'une succession d'arcs de courbes non circulaires qui peuvent avoir un même centre ou plusieurs centres.

Spirale d'Archimède

La spirale d'Archimède est obtenue en faisant varier le rayon, toujours de la même quantité quand on tourne d'un angle constant, on dit qu'il y a croissance linéaire du rayon en fonction de l'angle.

En coordonnées polaires, la spirale est la courbe représentative de la fonction décrite par la formule

$$R = m \cdot \alpha + n,$$

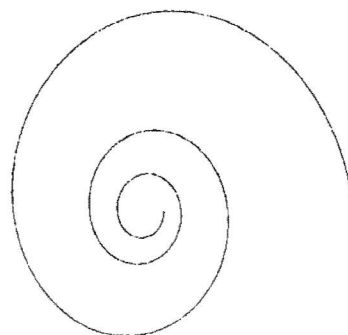
où R est le rayon, α est l'angle de rotation depuis l'origine, m est la quantité dont R augmente quand α augmente d'une unité, et n est la valeur du rayon quand α est égal à zéro.

Une bande magnétique vidéo est un exemple d'une telle spirale.

• Spirale logarithmique

Les spirales "logarithmiques" sont des spirales dont les rayons des arcs de courbes augmentent toujours dans la même proportion quand on tourne selon le même angle de rotation.

La croissance du rayon est alors exponentielle.



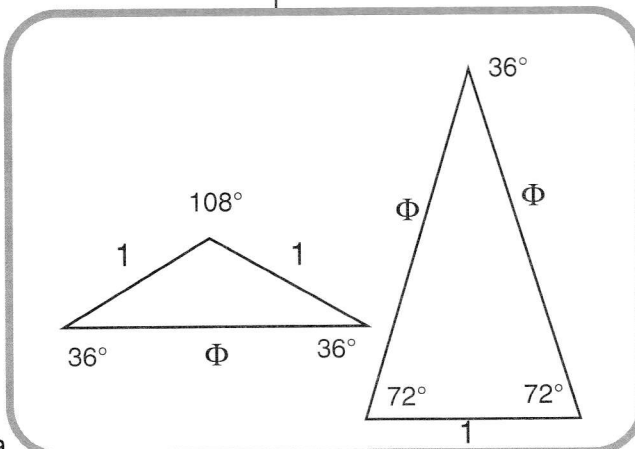
Descartes s'est intéressé à la spirale logarithmique ainsi que Jacques Bernoulli qui voulut la faire graver sur sa tombe. Mais le graveur s'est trompé, ce n'est pas une spirale logarithmique, "Spira Mirabilis", c'est une spirale d'Archimède qu'il traça !

Des activités en or !

Lors de la présentation de l'exposition Maths 2000 à l'Espace Pierre Mendès-France à Poitiers, nos collègues de l'Apmep de Poitou-Charentes ont concocté quelques activités pour la classe que nous nous faisons un plaisir de vous suggérer.

Construisez un triangle d'or !

Les triangles d'or sont des triangles isocèles dont les côtés sont proportionnels à 1, Φ et Φ (on obtient triangle aigu) ou à 1, 1 et Φ (on obtient un triangle obtus). Leurs angles sont multiples de 36° : respectivement 36° , 72° , 72° ou 36° , 36° , 108° .

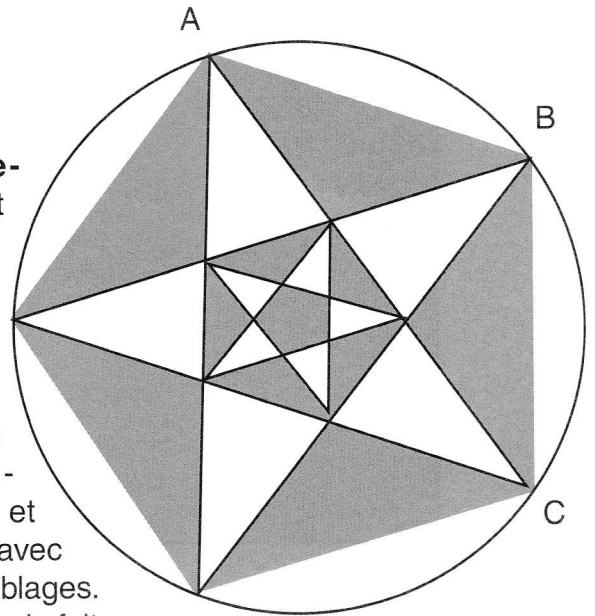


Ils ont la particularité suivante: dans un triangle aigu d'or ABC de base [BC], la bissectrice de l'angle C coupe [AB] en D tel que BCD soit un triangle d'or aigu et ACD un triangle d'or obtus.

De même, dans un triangle d'or obtus de base [BC], si D est le point de [BC] tel que $BD=BA$, alors ACD est un triangle d'or obtus et ABD un triangle d'or aigu..

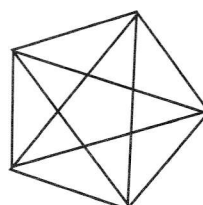
Conséquence: On peut paver les triangles d'or par des triangles d'or, d'où les "carreaux" d'un pavage de Penrose (ces triangles sont ceux qui interviennent dans les pentagones ou décagones réguliers).

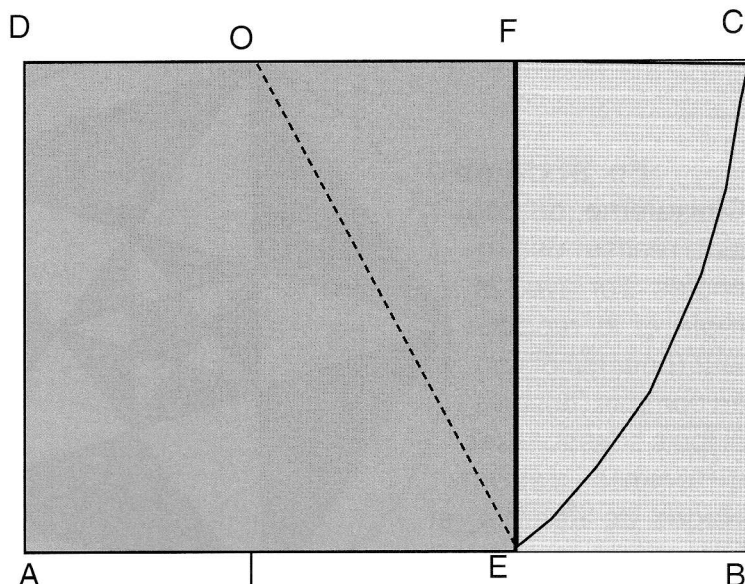
En Sixième-Cinquième, on peut faire réaliser des triangles d'or avec la règle et le rapporteur (pour les 6°) ou au compas (pour les 5°) puis construire les différents assemblages de Penrose et faire paver le plan avec ces différents assemblages. On peut aussi justifier le fait que le plan peut être pavé.



Vous pouvez enfin, en utilisant le principe de la Tortue-Logo, faire calculer l'angle d'un pentagone régulier ($1/5^{\text{ème}}$ d'un tour complet, soit ... 72° !) ou d'un pentagone régulier étoilé. Nous vous laissons faire le raisonnement !

Vous pouvez aussi utiliser le même procédé pour tout angle de polygone régulier.





En Troisième ou Seconde

Tracez un carré AEFD et placez O le milieu de [DF]. Placez, sur la droite (DF), le point C tel que $OC=OE$. Puis tracez le rectangle ABCD. On note l sa largeur et L sa longueur.

Exprimez OF, EF, OE en fonction de 1.

Exprimez L en fonction de 1. En déduire que $L/l = \Phi$.

La largeur l' et la longueur L' du rectangle EBCF vérifient $l' = L - 1$ et $L' = 1$. Montrer que $l'/L' = L/l - 1$.

On pose $a = \Phi$.

Montrer que $\alpha - 1 = 1/\alpha$ et en déduire que $l'/L' = l/L$.

En terminale

Questions préliminaires

1- Soit ABC et A'B'C' deux triangles tels que $\hat{A} = \hat{A}'$ et $AB/A'B' = AC/A'C'$. Démontrer que les deux triangles sont semblables.

2- Soit ABC un triangle. On note I le point d'intersection de la bissectrice

intérieure de l'angle $\hat{A}$ avec le segment [BC].

a- Soit A' le pied de la hauteur issue de A au triangle ABC. Soient H et K les projections de I sur (AB) et (AC). Démontrez, en utilisant des aires, que $IB \times AA' = AB \times IH$ et que $IC \times AA' = AC \times IK$.

b- En déduire que $IB = IC$.

Les triangles d'or

Reprendre la définition de départ. 1- Montrez qu'il n'existe que deux sortes de triangles d'or :

Les uns ont les trois angles aigus, les autres possédant un angle obtus.

2- Dessinez (on prendra des valeurs approchées)

- un triangle d'or dont les côtés mesurent 1; 1; Φ .

- un triangle d'or dont les côtés mesurent 1; Φ ; Φ .

3- Soit ABC un triangle d'or isocèle en B dont les côtés mesurent 1; Φ ; Φ .

Soit I le point d'intersection de la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ et de [BC].

On se propose de démontrer que les triangles IAB et IAC sont des triangles d'or.

a- Montrez que $BI = 1$ et que $IC = \Phi$. (Utilisez la question 2b).

b- Montrez en utilisant la question 1 que les triangles AIC et BAC sont semblables.

c- En déduire que AIC est isocèle et que les triangles AIB et AIC sont des triangles d'or.

4- En déduire que les angles des triangles d'or mesurent $36^\circ, 72^\circ$ ou 108° .

5- a- Montrez que si les angles d'un triangle isocèle sont $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ alors ce triangle est d'or.

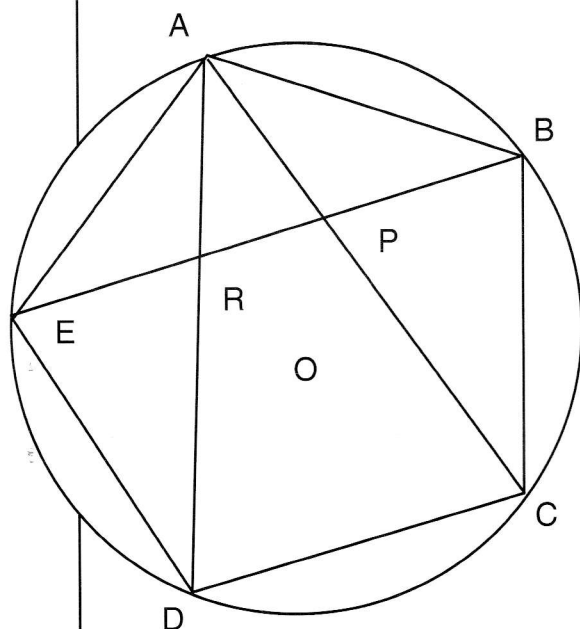
b- Même question avec un triangle isocèle dont les angles mesurent $108^\circ, 36^\circ, 36^\circ$.

Les triangles d'or et le pentagone

ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans un cercle (C). Les diagonales (AC) et (AD) coupent (EB) en P et R.

1- Démontrez à l'aide de considération sur les angles que EAB, EAP, EDC sont des triangles d'or.

2- En déduire que le rapport des longueurs de la diagonale et du côté du pentagone est égal au nombre d'or.



Construction du triangle d'or à la règle et au compas

1. Justifiez la construction suivante d'un triangle d'or dont les trois angles sont aigus.

Supposons que le côté donné soit [OA].

- Construisez le cercle (C) de centre O contenant A et la perpendiculaire (D) à (OA) passant par O.

- (D) coupe (C) en deux points :

soit P l'un d'eux. Placez O' milieu de [OP] et tracez (C') le cercle de diamètre [OP].

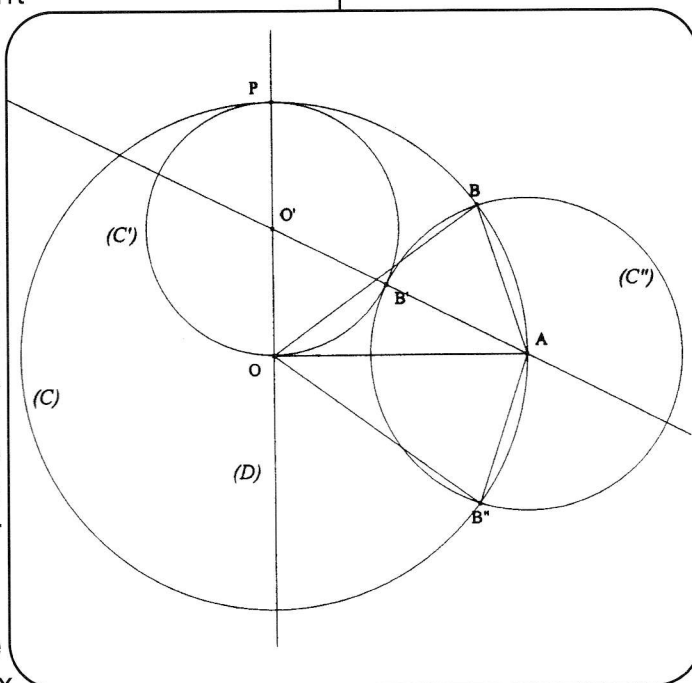
- La droite (AO') coupe (C') en B' et C' (B' élément de [AO']).

- Le cercle (C'') de centre A passant par B' coupe le cercle (C) en B et B''.

Les triangles OAB et OAB'' sont des triangles d'or dont les trois angles sont aigus.

2. Construisez à partir de cette figure un triangle l'or ayant un angle obtus.

3. Comment, à partir de cette construction, construire à la règle et au compas un pentagone régulier ?



Remarque :

Cette construction peut être réalisée à l'aide d'un logiciel comme CABRI. On peut alors définir une macro-construction pour construire un triangle d'or. Lorsqu'on a appris au logiciel à construire un triangle d'or à partir de O et A donnés, il sera facile de construire le triangle d'or correspondant à deux autres points O' et A' donnés.



La nature

est-elle

symétrique ?



L'Univers a-t-il une main gauche et une main droite ? Pourquoi la double hélice d'ADN tourne-t-elle toujours dans le même sens ? Pourquoi un miroir inverse-t-il la gauche et la droite et pas le haut et le bas ?

L'ordre dans la nature a toujours aidé l'homme à mieux comprendre son univers. Des minéraux aux organismes vivants, des particules élémentaires au cosmos, la nature offre une palette de formes et de lois qui permet aux scientifiques de développer sans cesse de nouvelles représentations du monde.

