Fractales et rugosités

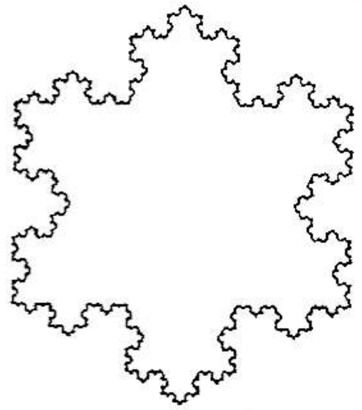
Benoît Mandelbrot, Université de Yale

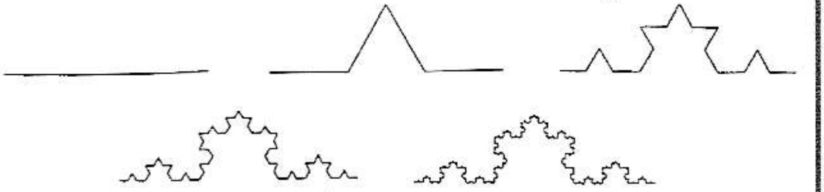
Benoît Mandelbrot, mathématicien, a fait naître et connaître les fractales et les a rendues très populaires.

Nous retranscrivons ici l'extrait de sa conférence «L'anneau fractal de l'art à l'art à travers la géométrie, la finance et les sciences» **prononcée le 28 juin dans le cadre de l'Université de tous les savoirs. La totalité de sa conférence sera publiée dans la Collection UTLS chez Odile Jacob en 2ooo ou 2oo1.**

o La courbe de von Koch

L'exemple le plus célèbre de courbe fractale est celui du flocon de neige de Helge von Koch, mathématicien suédois qui la publia pour la première fois en 1904 et la décrivit comme "courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire.





À partir d'un segment de longueur un, remplaçons le tiers central par deux segments de même longueur que lui. Au bout de cette première étape, nous obtenons une nouvelle figure. Nous pouvons itérer ce procédé indéfiniment en subdivisant chaque fois les segments en trois parties dont la partie centrale est remplacé par deux segments de même longueur qu'elle.

Cette courbe est autosimilaire et donc fractale car elle reste identique à elle-même quand on la dilate avec un grossissement égal à une puissance de trois.

La figure ci-dessus montre les cinq premières étapes de la construction de la courbe de von Koch et ce qu'il en advient lorsque l'on répète le processus sur les 3 côtés d'un triangle équilatéral.

On pense aux sorciers et aux fées quand une idée en apparence insignifiante se met soudain à produire à flot des conséquences variées et importantes. Pour introduire et faire comprendre les fractales, demandons-nous donc si un objet géométrique peut prendre la même forme qu'on l'examine de près ou de loin. Cette propriété fut récemment baptisée autosimilarité.

Elle semble d'une parfaite insipidité, mais c'est la graine d'une floraison de développements constituant toute une géométrie. Insipidité est également le terme approprié pour dénoter la droite et le plan idéaux, qui sont des exemples d'autosimilarité connus de tout le monde. En revanche, la sphère n'est pas autosimilaire ; quand on la regarde de près, en étant dessus, elle paraît plate ; de loin, comme tout objet borné, elle paraît ponctuelle.

Il y a 100 ans

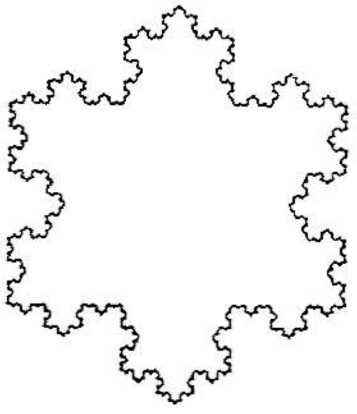
Il y a cent ans, de 1875 à 1925, des mathématiciens perspicaces prirent conscience d'une poignée de curiosités ou monstres, objets qu'ils présentèrent comme nouveaux, sans contrepartie dans la nature et contredisant l'intuition géométrique. Certains de ces objets étaient autosimilaires, car cette qualité les rendait plus faciles à décrire.

Beaucoup plus tard, j'allais les séparer des autres curiosités en question, vouer ma vie scientifique à leur étude, et les baptiser des «fractales».

le lisse et le rugueux

Cette chronique brossera à grands traits chacune des 3 grandes étapes récentes de l'étude des fractales.

En premier lieu, surprise absolue et plus grand bonheur intellectuel de ma vie, je reconnus à ces monstres un autre rôle tout à fait nouveau.



Le flocon de von Koch

Il a la propriété d'être de longueur infinie mais l'aire qu'il délimite vaut seulement 8/5 de la surface du triangle de départ. En effet, à chaque étape de la construction, chaque côté de la figure est remplacé par une figure de longueur 4/3 fois plus grande. Le processus répété indéfiniment prouve que la longueur du flocon devient infinie. En comptant la surface des triangles créés à chaque étape, on peut démontrer également, par un simple raisonnement, par récurrence, que la surface de la courbe engendrée après n constructions est égale à $[8/5 - 3/5 * (4/9)^n]$ pour un triangle équilatéral initial d'aire unité.
Ainsi par passage à la limite, le flocon de von Koch délimite une surface finie limitée par une courbe de longueur infinie.

On les qualifiait imprudemment d'«exceptionnels». Je montrai, tout au contraire, que la fractalité n'est pas loin d'être la règle dans la nature. Selon le cas, elle ne concerne que des détails ou touche à l'essentiel.

Cette thèse osée et interdisciplinaire provoquant l'incrédulité, il faut la préciser et la rendre «naturelle». Le point essentiel est que la droite et le plan sont parfaitement lisses, mais en règle presque générale les choses sont loin de cet idéal : non pas lisses mais rugueuses dans le détail ou dans l'essentiel.

Songeons maintenant à l'ensemble des messages que nous recevons de nos sens. Ceux de la vue et l'ouïe, considérés comme raffinés, se trouvent égale⊂ent avoir été le plus tôt et les mieux explorés ; c'est peut-être une façon de constater qu'ils étaient (très relativement parlant !) les plus faciles à explorer.

A l'autre extrême, le sens du lisse ou du rugueux restait en dehors des sciences. Il appartenait au monde de la mécanique pratique des frottements dont les ingénieurs cherchent à se débarrasser.

Il semblait impossible d'en extirper un quelconque concept. Les questions que posait la rugosité n'étaient pas sottes, mais inabordables. Faute de mieux, elles ne recevaient que des réponses évasives et inadéquates.
Par exemple, songez aux questions incontournables que voici :

- Comment mesurer la rugosité ou volatilité des chroniques boursières, ne serait-ce que pour pouvoir évaluer les risques financiers de façon réaliste?
- Comment mesurer la côte de la Bretagne ?
- Comment caractériser la forme d'une côte, d'une rivière, d'une ligne de partage des eaux ou de la frontière d'un bassin d'attraction dans le contexte de l'hydraulique, mais aussi des systèmes dynamiques ?
- Comment définir la vitesse du vent en plein orage ?
- Comment mesurer et comparer les rugosités d'objets communs tels qu'une pierre cassée, un talus, une montagne ou un bout de fer rouillé ?
- Quelle est la forme d'un nuage, d'une flamme ou d'une soudure ?
- Quelle est la densité des galaxies dans l'Univers ?
- Comment varie l'activité sur le réseau Internet ?

A toutes ces questions (ou fragments de questions), c'est la géométrie fractale (continuée par la multifractale) qui allait apporter les premières réponses satisfaisantes.

Dans chaque cas, les réponses se fondent sur la qualité - elle-même surprenante - que la rugosité se trouve souvent être fractale. Dans beaucoup de phénomènes naturels ou créations de l'homme telles que la Bourse ou Internet, cela permit à la géométrie fractale de devenir la rampe de lancement de la première théorie du rugueux «simple».

Arts et fractales

Pour résumer, et apaiser toute inquiétude que les fractales auraient pu susciter, cette nouvelle géométrie, je la fis naître de l'union entre une certaine mathématique ésotérique et le plus grossier de nos sens.

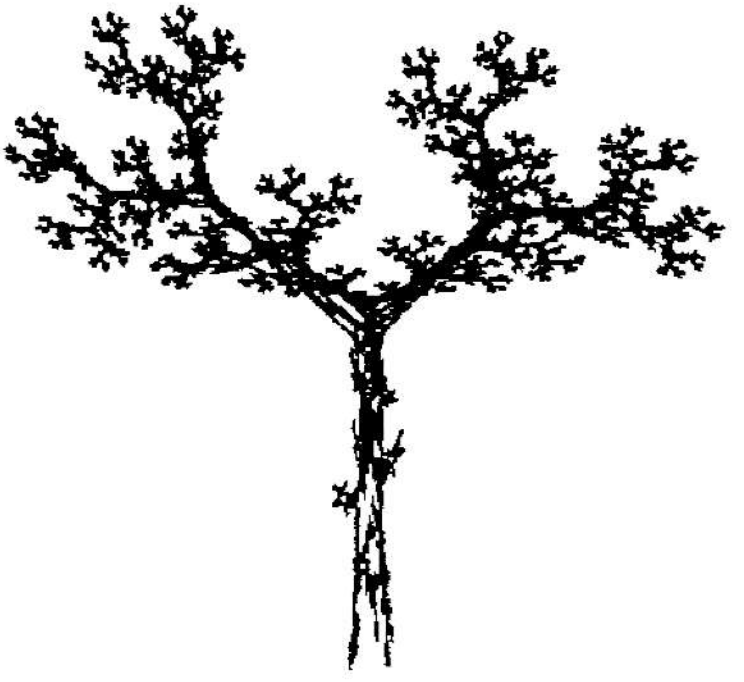
Elle dura, fructifia, s'imposa et ne manquera jamais de problèmes à traiter. De plus, son domaine s'étendit, d'abord à l'aval, puis à l'amont de mes travaux scientifiques.

A l'aval, elle conduisit à un deuxième étonnement absolu, cette fois esthétique. Les nouvelles images fractales, fruits sans nombre de ce qui avait d'abord paru une mésalliance, et dont l'accouchement se fit dans un centre informatique, furent de plus en plus largement perçues comme belles ou tout au moins hautement décoratives.

L'ensemble de Mandelbrot vient inévitablement à l'esprit. Une formule ancienne, paraissant d'une parfaite insipidité, se révéla la source d'images fantastiques qu'on voit désormais partout, à tel point qu'elles se fondent dans l'univers visuel de l'humanité. Elles ne vont pas subir le sort commun des modes.

Selon la belle expression de mon ami le regretté Marcel Paul Schutzenberger, elles marquent un nouveau style.

L'aval de la géométrie fractale s'ajoutant désormais à son étrange interdisciplinarité, l'incrédulité renaît sous une forme plus forte encore. La géométrie fractale jouant à la fois tant de rôles divers, comment se fait-il qu'elle n'ait que vingt-cinq ans d'âge ?
Que les premières «protofractales» n'en aient que cent ?

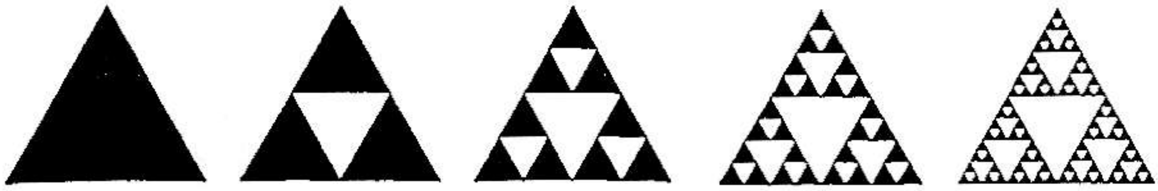


Avoir déclenché tout cela (la chance d'être l'homme qu'il fallait, quand il fallait et où il fallait) est un privilège merveilleux qui doit être accepté avec humilité. Dès mon livre de 1975, et surtout le livre anglais de 1982, la géométrie fractale s'est littéralement et tout à fait spontanément envolée.

Mais je n'ai jamais eu la présomption d'avoir «inventé» tout ceci ex nihilo. Tout au contraire, je cherchais des précurseurs (Gustave Eiffel?) dont je me plaisais à citer des phrases sans suite, mais parmi eux aucun ne pouvait être perçu comme ultime «inventeur».
Quelle corde sensible de l'humanité avait-elle donc attendu que je la fasse résonner ?

Résolvant ce grand mystère, une troisième surprise apparut et se plaça à l'amont de mes travaux. Mes ouvrages me valurent beaucoup de lecteurs de tous bords et un courrier abondant plein de variété et d'enseignements. Voici ce qui en ressort.

Dans l'histoire des fractales, la période 1875-1925 reste un moment



o Le triangle de Sierpinski

Cet ensemble fractal utilise comme figure de départ un triangle équilatéral. En utilisant les milieux de ses côtés, on définit ainsi un nouveau triangle central que l'on enlève au triangle initial permettant d'obtenir la figure après la première étape. Il suffit d'appliquer ce procédé aux trois triangles restants pour obtenir la figure suivante. En itérant ce procédé une infinité de fois, on obtient ainsi le triangle (ou fanion) de Sierpinski que l'on retrouve dans la manipulation "Coloriages fractals" de l'exposition **"Maths 2ooo"** qui utilise des propriétés du triangle de Pascal.

fort, spécialisé et trompeur. Mais il semble bien que l'on ne puisse identifier quelque commencement que ce soit.

Précisons que les fractales sont des formes telles que, indépendamment des sens que l'on donne aux mots, le détail reproduit la partie et la partie reproduit le tout. Pour s'en assurer, divers procédés commencent par tracer les grandes lignes d'une figure, puis utilisent un générateur pour ajouter des détails de plus en plus petits. Il est donc essentiel d'avoir une progression sans fin, idée familière aux théologiens.

Dans le bouddhisme zen, on trouve le thème (repris par Leibniz) de la goutte de rosée dans laquelle est incluse en miniature tout une réplique du monde, y compris des gouttes de rosée et ainsi de suite à l'infini. Cette théologie de la goutte d'eau trouve un écho dans de nombreux mandalas tibétains, avec leur bouddhas de toutes tailles, et on l'aperçoit aussi dans la grande vague du peintre Hokusai.

Pour changer de continent et de métier, le thème du générateur répété se trouve dans l'univers de Kant (fait de galaxies groupées en amas, superamas et ainsi de suite sans fin), dans les célèbres dessins de fontaines de Léonard de Vinci, avec leurs tourbillons superposés, dans L'Ange de Gustave Doré, fait d'anges plus petits, sans parler du visage de la mort de Salvador Dali.

Pour changer encore de continent, on nous a récemment appris que l'art de nombreuses nations africaines regorge de fractales d'une subtilité pleine de signification car objets de tradition.

Les nombres de l'homme

Sans être un aussi grand observateur, je me suis aperçu il y a longtemps de cette vérité : j'ai dit souvent que les branches de l'arbre étaient elles-mêmes de petits arbres complets ; des fragments de rochers sont semblables à des masses de rochers, des particules de terre à des amas énormes de terre. Je suis persuadé qu'on trouverait en quantité de ces analogies. Une plume est composée d'un million de plumes.

Arrêtons-nous sur Swedenborg, dont les mots allaient être cités par Emerson. Il ne brillait pas par ses connaissances en biologie, mais son intuition que le monde est ainsi fait partait d'observations authentiques.

C'est ainsi que Delacroix aurait moins fait tiquer s'il avait choisi le chou-fleur. Il ne s'agit donc pas ici de validité scientifique ; cependant son opinion fausse mérite d'être citée, car elle attire l'attention sur un fait patent : l'idée d'emboîtement autosimilaire vient spontanément aux humains, et l'intuition de fractalité a toujours fait partie du patri-

Dimensions fractales

Frédéric Vivien, Rouen

moine de l'humanité, en Asie et en Afrique aussi bien qu'en Europe.

Un bipède sans plumes n'est devenu homme qu'après avoir conquis le feu et les éléments et avoir décoré son corps, sa demeure et son temple. Au cours des millénaires, ses motifs décoratifs s'affinèrent. Certains - bâtisses, broches et colliers - aidèrent à la naissance de la géométrie qui allait être codifiée par Euclide et beaucoup plus tard devenir l'outil essentiel de maintes sciences.

D'autres éléments décoratifs furent laissés de côté puis se déguisèrent pour participer à une révolution anti-euclidienne en mathématiques, et enfin donnèrent une forme à des objets que la vieille géométrie et les sciences étaient forcées de laisser de côté comme amorphes, c'est-à-dire sans aucune forme qui aurait permis l'analyse de la nature et sa synthèse.

Ayant ainsi traversé et apporté ma contribution à plusieurs territoires du savoir désintéressé ou pratique, avec des pointes vers les arts, l'aval et l'amont de l'œuvre d'une vie viennent de se refermer devant nos yeux en un anneau fractal. Parti il y a très très longtemps de l'art, un long périple confus est désormais revenu à son origine.

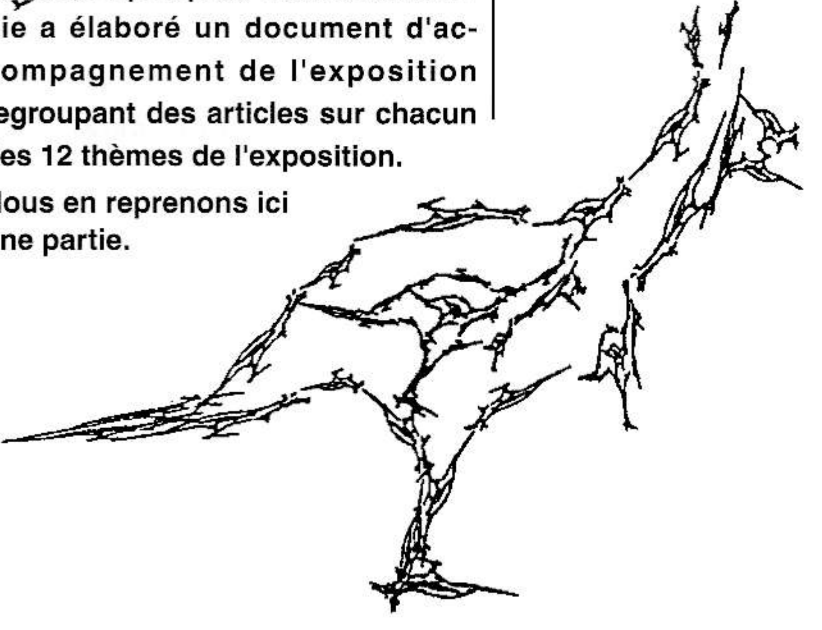
Benoît Mandelbrot

Mis à jour le lundi 28 août 2000

Il a écrit :

- Les Objets fractals (1975, 4e éd. 1995)
- Fractales, hasard et finance (1997),
- The Fractal Geometry of Nature (1984),
- Fractals and Scaling in Finance (1997),
- Multifractals and 1/f Noise (1999).

Dans le cadre de l'accueil de l'exposition "Maths 2ooo" conçue par Centre•Sciences, coproduite avec la Cité des Sciences et diffusée en Haute-Normandie par Science-Action, l'Apmep de Haute-Normandie a élaboré un document d'accompagnement de l'exposition regroupant des articles sur chacun des 12 thèmes de l'exposition. Nous en reprenons ici une partie.



La longueur de la côte de Bretagne

On peut distinguer la similitude des mathématiciens, rigoureuse, et la similitude statistique. Par exemple, lorsque l'on observe la côte de Bretagne à très haute altitude, elle apparut très dentelée avec une succession ininterrompue de promontoires et de baies. Lorsque l'altitude diminue, la perspective évolue, mais l'aspect dentelé de la côte se maintient, avec des promontoires et des baies plus petits. Chaque changement d'échelle souligne la permanence de cette structure. C'est une similitude statistique.

Après le flocon de neige, on peut se demander, comme l'a fait Benoit Mandelbrot dans ses travaux, quelle est la longueur de la côte de Bretagne,