Simulations de files d'attente

d'après Vincent Paradis, Montréal

Les simulations de files d'attente sont largement utilisées dans le domaine de la recherche opérationnelle.

On cherche par exemple à déterminer dans un super-marché le nombre de caisse nécessaire pour que les clients n'attendent pas, dans un péage d'autoroute, le nombre de guichets pour éviter les bouchons, à une laverie automobile, à une caisse de banque, à un cinéma...

Le Poisson au supermarché

Prenons l'exemple du supermarché. Il faut que les clients n'attendent pas plus de trois minutes pour être servis, avec comme autre variable les heures de pointe. Or des lois probabilistes déterminent des arrivées aléatoires.

La première partie de l'activité servira à illustrer la "plausibilité" d'une de ces lois, celle de Poisson. Dans une seconde partie, l'objectif sera, à l'aide d'un générateur de nombres aléatoires, de simuler des arrivées à un lave-auto afin de déterminer le temps moyen d'attente dans la queue.

La loi de Poisson

On veut vérifier que des arrivées aléatoires, c'est-à-dire au hasard, se comportent selon une loi de Poisson. Prenons le cas d'un laveur de voitures. Choisissons la "minute" comme unité de temps. Les voitures arrivent de façon irrégulière. Les intervalles entre les arrivées successives des automobiles au lave-auto, se comportant selon une loi de Poisson, se distribuent exponentiellement.

La distribution est donnée par la fonction suivante :

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

où λ est le nombre moyen d'arrivée par unité de temps.

Supposons les données suivantes :

TABLEAU 1

Le nombre d'arrivées qui correspond à la grandeur des intervalles de temps.

Intervalles entre les arrivées (minutes)	Nombre d'arrivées	Pourcentage cumulatif
00-02	15	35
02-04	13	28
04-06	12	40
06-08	20	60
08-10	10	70
10-12	2	72
12-14	3	75
14-16	5	80
16-18	5	85
18-20	0	85
20-22	0	85
22-24	2	87
24-26	3	90
26-28	1	91
28-30	4	95
≥ 30	5	100

Supposons que la durée totale des relevés fut de 1000 minutes. Comme il y a 100 observations ou arrivées, le nombre moyen d'arrivée par minute est de 0,1 soit 100 arrivées en 1 000 minutes. La valeur du paramètre est donc : $\lambda = 0{,}1$.

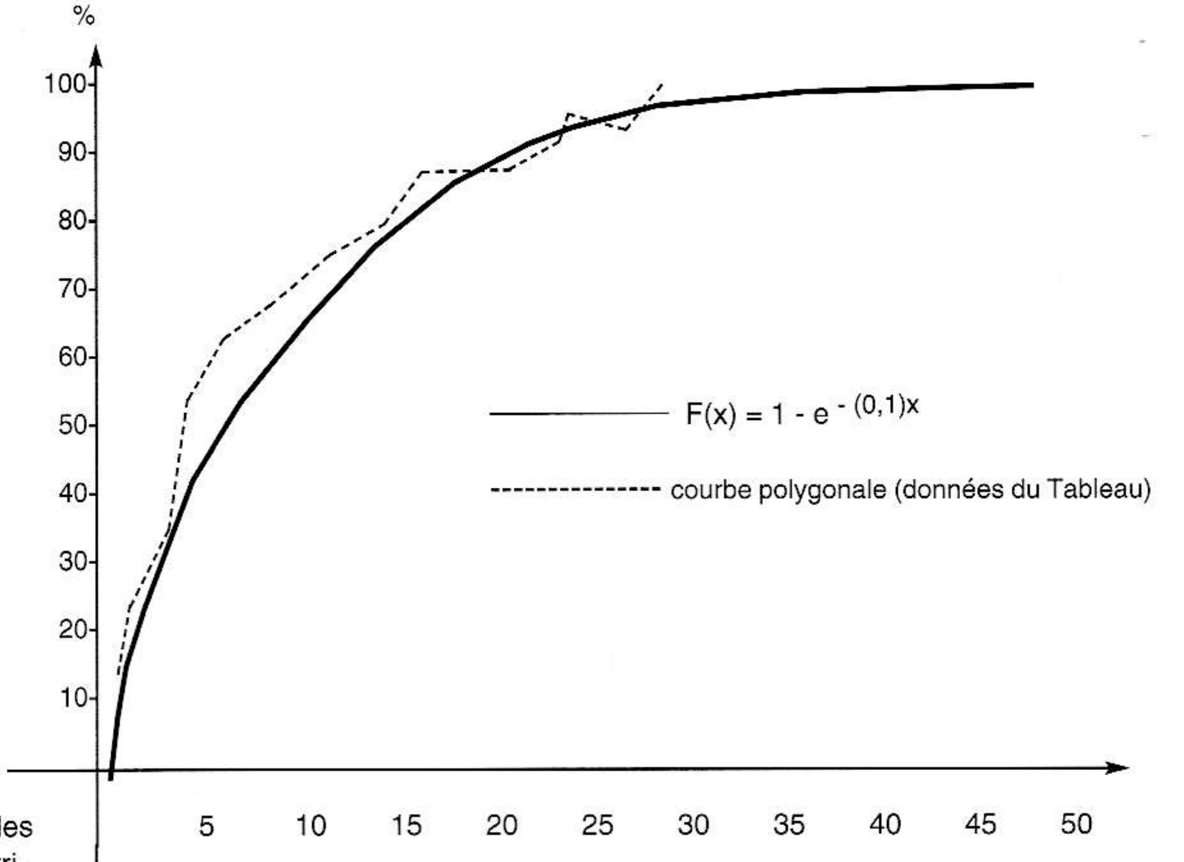
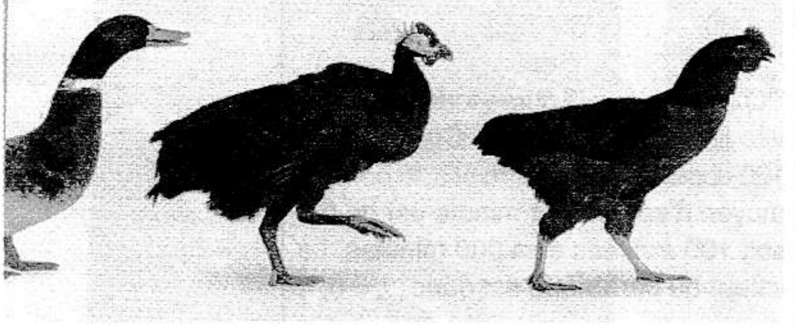


Figure 1 : les intervalles entre les arrivées en fonction du pourcentage d'arrivées.

Il s'agit maintenant de construire les graphes théoriques et pratiques, le graphe théorique étant celui de la fonction continue $F(x) = 1 - e^{-(0,1)x}$, le graphe pratique étant fourni de seize points, ceux du pourcentage cumulatif (cf. TABLEAU 1).

À noter que la construction de la courbe polygonale suppose le postulat de l'équirépartition à l'intérieur d'un intervalle donné ; on fait donc correspondre les pourcentages cumulatifs aux points milieu des intervalles, soit 1, 3, 5 ...



La démarche

Chaque groupe d'élèves a une centaine de relevés à faire. Il suffit dans un premier temps de noter l'heure des arrivées, par exemple :
(heure de départ : midi)
12 heures 01 minute 12 secondes,
02 minutes 28 secondes,
53 secondes,
04 minutes 01 seconde, etc.

Par la suite, on établit la durée des intervalles, soit :

1 minute 12 secondes,
1 minute 16 secondes,
0 minute 25 secondes,
1 minute 8 secondes, etc.

Ensuite selon la durée d'un intervalle, il s'agit de construire un tableau semblable au tableau 1.
Le nombre d'intervalles doit varier entre 10 et 20 afin de construire un graphe intéressant. La durée d'un intervalle est donc à fixer en fonction de ce critère et de la réalité observée.

Une table de nombres aléatoires

Les élèves ont à simuler une file d'attente en se basant sur le graphe théorique qu'ils viennent de vérifier, et pour ce faire, à construire une table de nombres aléatoires.

Il existe des tables comportant un million de chiffres, réalisées au moyen d'une roulette électronique.

Il peut être intéressant de faire construire aux élèves leur propre table de nombres aléatoires et de la vérifier.

Voici quelques moyens faciles à utiliser :

- Un icosaèdre à 20 faces que l'on trouve facilement dans les boutiques de jeux. Il s'agit d'un dé à 20 faces ou chaque chiffre de 0 à 9 apparaît 2 fois.

À noter qu'il n'existe pas de polyèdre régulier à 10 faces. Les élèves peuvent le construire avec du carton.

- Une urne contenant 10 boules numérotées de 0 à 9. Il s'agit de remuer l'urne de façon à engendrer aléatoirement le tirage d'une boule porteuse d'un nombre.

- Un dé dont 5 faces sont numérotées 0, 1, 2, 3 et 4. Le sixième est hachuré, son tirage annulant un coup, et un jeton numéroté 0 et 5. On lance le dé et le jeton et on fait la somme.

Une façon simple de vérifier si une table de nombres aléatoires n'a pas été biaisée, est la suivante : la moyenne arithmétique des chiffres de 0 à 9 est 4,5, c'est-à-dire

$$\sum_{m=0 \text{ à } 9} m \;/\; 10 = 4,5$$

Alors la moyenne arithmétique de n nombres aléatoires compris entre 0 et 9, soit les chiffres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, devrait être approximativement :

$$\left(\sum_{i=1 \text{ à } n} n_i\right) / 10 \text{ peu différent de } 4,5$$

Plus n est grand, plus l'approximation devrait être bonne.

Une fois la table de nombres aléatoires produite, il reste à simuler la file d'attente. Pour cela, un transfert de variable isolée est nécessaire.

Prenons :

$$F(x) = y = 1 - e^{-(0,1)x}$$

$$1 - y = e^{-(0,l)x}$$

$$\ln(1 - y) = \ln e^{-(0,1)x} \text{ pour } 0 < y < 1,$$

$$\ln(1 - y) = -(0,l)x$$

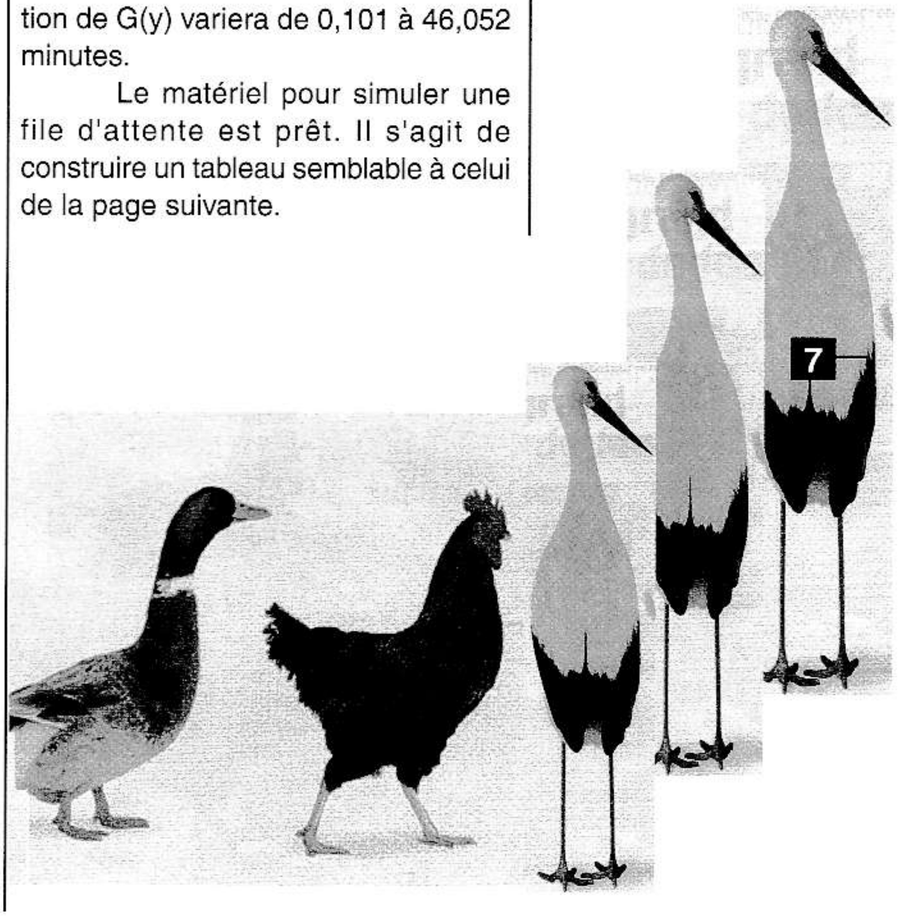
$$x = -10 \ln(1 - y) \equiv G(y) \text{ (modulo D)}$$

$$G(y) = -10 \ln(1 - y)$$

À l'aide d'une calculatrice, il s'agit maintenant d'évaluer G(y) pour des valeurs de y variant de 0,01 à 0,99.

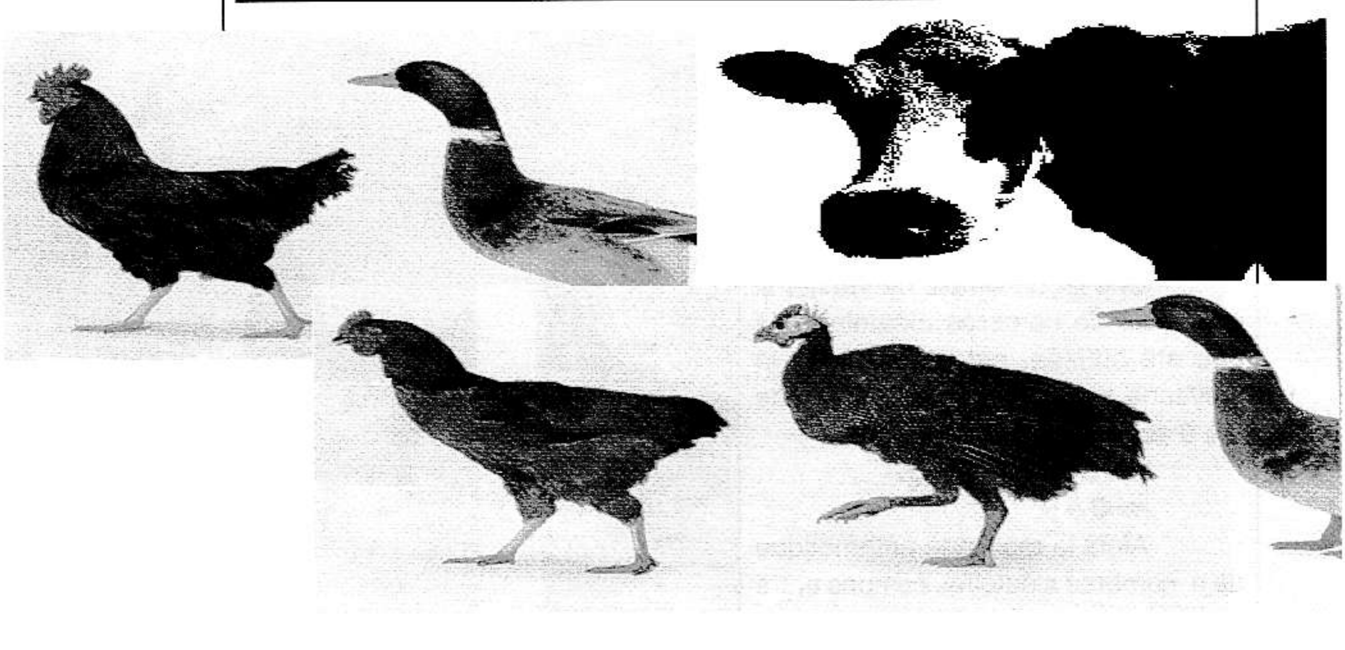
Dans notre exemple l'évaluation de G(y) variera de 0,101 à 46,052 minutes.

Le matériel pour simuler une file d'attente est prêt. Il s'agit de construire un tableau semblable à celui de la page suivante.



Simulation du temps d'attente

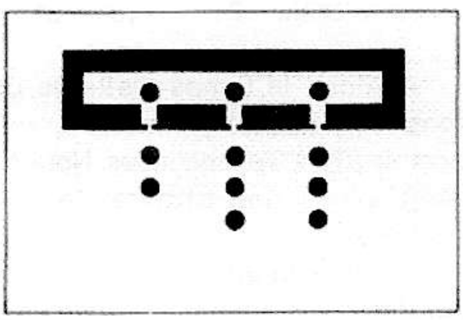
n° client	n° aléatoire	intervalles entre arrivées	Temps de service	Temps d'attente
1	0,77	14,697	5	0
2	0,20	2,231	5	2,769
3	0,81	16,607	5	0
4	0,80	16,094	5	0
5	0,34	4,155	5	0,845
6	0,71	12,379	5	0
7	0,18	1,985	5	3,015
8	0,13	1,393	5	6,622
9	0,58	8,675	5	2,947
10	0,59	8,916	5	0
11	0,81	16,607	5	0
12	0,58	8,675	5	0
13	0,36	4,463	5	0,537
14	0,55	7,985	5	0
15	0,06	0,619	5	4,381
16	0,48	6,539	5	2,842
17	0,74	13,471	5	0
18	0,38	4,780	5	0,221
19	0,06	0,619	5	4,601
20	0,17	1,863	5	7,738
21	0,17	1,863	5	10,875
22	0,69	11,712	5	4,163
23	0,97	35,066	5	0
24	0,56	8,210	5	0
25	0,67	11,087	5	0
Simulés	donnés par le générateur de nombres aléatoires	donnés par une table	Temps constant	Total : 51,558 temps moyen : 2,062



Les caisses "5 objets"

La queue au supermarché !!!

Le gérant de votre supermarché se pose la question suivante :
Quels avantages y aurait-il à remplacer le système traditionnel des files à chaque caisse par une file unique ?
Nous allons examiner comment, à l'aide de simulations, il est possible de comparer les deux systèmes sous certains aspects.



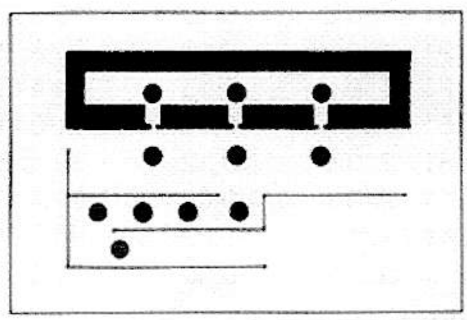
Posons une première question :
En moyenne, le temps d'attente d'un client est-il le même dans les deux systèmes ?
Le temps d'attente dépend fondamentalement de deux facteurs lorsque le nombre de guichets est fixé :
1) le nombre de clients en attente lorsque nous y pénétrons ;
2) le temps qui est requis pour servir une personne.

Le temps requis pour servir un client n'est évidemment pas toujours le même. On peut cependant connaître la probabilité que ce temps soit dans différents intervalles.

Pour cela, il faut faire un relevé.
Un des vendeurs à été assigné à la tâche suivante :
Prendre note du temps nécessaire pour servir chacun des 100 premiers clients aujourd'hui.

Voici ce qu'il a obtenu :

Temps (secondes)	Nombre de personnes	Fréquences relatives
1 - 30 s	5	0,05
31 - 60 s	8	0,08
61 - 90 s	10	0,10
91 - 120 s	13	0,13
121 - 150 s	15	0,15
151 - 180 s	18	0,18
181 - 210 s	12	0,12
211 ~ 240 s	7	0,07
241 - 270 s	7	0,07
271 - 300 s	5	0,05



Ces résultats nous donnent une assez bonne idée du temps passé au guichet: on peut dire par exemple que la probabilité qu'une personne se présentant au guichet y passe entre 2 minutes et 2 minutes et demie est de 15/100 (cette valeur n'est évidemment qu'une estimation de la probabilité).

Si on voulait plus de précision, on devrait baser l'estimation sur plus de 100 clients et diminuer la longueur des intervalles.

Remarquez que la probabilité qu'une personne se présentant au guichet y passe entre 1 et 30 secondes est la même que celle de lire dans une table de nombres aléatoires une quelconque des paires de chiffres suivants : 00, 01, 02, 03, 04.
De même, la probabilité qu'un client

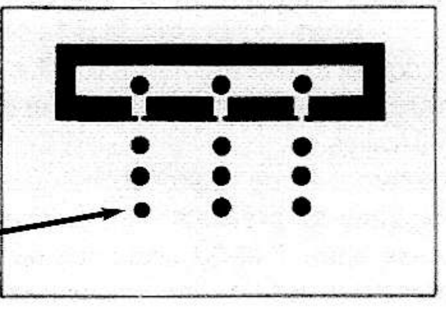
passe entre 31 et 60 secondes au guichet est la même que celle de trouver une quelconque des paires suivantes : 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12.
On peut donc établir une correspondance entre les temps de service et certaines paires de nombres aléatoires.

Temps passé au guichet	Probabilité	Paires de nombres associés
1 - 30 s	0,05	00 à 04
31 - 60 s	0,08	05 à 12
61 - 90 s	0,10	13 à 22
91 - 120 s	0,13	23 à 35
121 - 150 s	0,15	36 à 50
151 - 180 s	0,18	51 à 68
181 - 210 s	0,12	69 à 80
211 - 240 s	0,07	81 à 87
241 - 270 s	0,07	88 à 94
271 . 300 s	0,05	91 à 99

Supposons que lorsque monsieur X se présente 3 la caisse, il y a déjà 8 clients ; nous allons simuler le temps qu'il devra attendre suivant les deux modes d'attente: les files multiples et la file unique.

Il y a 2 clients devant Monsieur

Files multiples

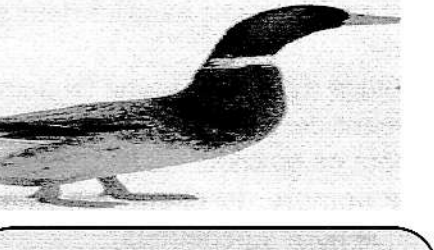


Poulet. Simulons le temps qui sera requis pour servir chacun d'eux.
En utilisant la table des nombres aléatoires, on choisit une ligne (disons la première) et deux colonnes (par exemple les 13e et 14e colonnes). Cela nous fournira une paire de 2 nombres aléatoires. À cette paire correspond un temps de service du premier client. Puis, on simule le temps de service du 2ème client (en regardant par exemple les deux nombres situés sur la 2e ligne, les 13e et 14e colonnes).
Voyons ce que nous obtenons:

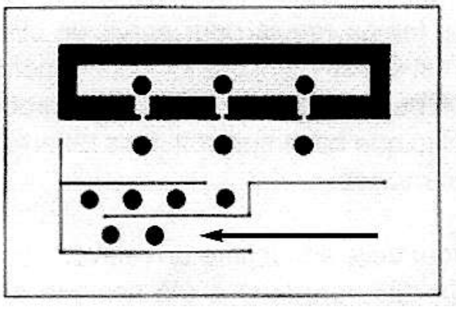
	nombre lu	temps de service
premier client	33	91 - 120 s
deuxième client	74	181 - 210 s

Alors, le temps d'attente de monsieur X, par cette simulation, peut varier de 272 à 330 secondes. Nous lui assignerons une attente de 300 secondes.

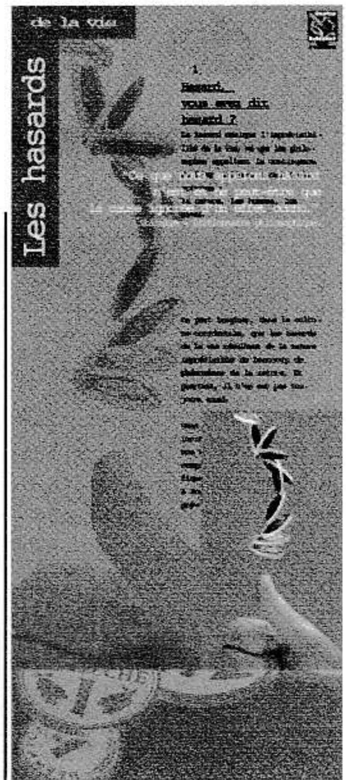
Faites 15 simulations analogues de l'attente de Monsieur Poulet puis calculez la moyenne des temps d'attente.



File unique



Posons que, lorsque Monsieur Canard arrive, les 3 clients aux trois caisses commencent à se faire servir.



À l'aide de votre table des nombres aléatoires, simulez 15 fois l'attente de ce 9ème client et comparez avec l'autre système,

Pour faire cette simulation, on doit tout d'abord simuler le temps que passeront les trois clients qui sont aux guichets, puis acheminer le quatrième client à la première caisse qui se libérera, etc. ,jusqu'à ce que le 9ème client arrive à une caisse :

Que concluez-vous sur le temps moyen d'attente dans les deux systèmes ?

Auriez-vous pu prévoir ce résultat sans simulation ?

Vous avez certainement constaté que les deux systèmes sont équivalents en ce qui concerne le temps moyen d'attente.
Pourquoi en est-il ainsi ?

En regardant les temps qu'a dû attendre le 9ème client dans les deux systèmes, voyez-vous sous quel aspect ces derniers diffèrent ?

Dans le système à plusieurs files, il arrive que l'on attende très peu mais aussi que le temps d'attente soit long alors que dans le système à file unique, le temps d'attente ne varie pas tellement. Pour caractériser un tel fait, nous disons que la variabilité du temps d'attente est beaucoup plus forte dans le système à plusieurs files. Une manifestation frustrante de cette situation est d'apercevoir les files voisines avancer plus vite que la nôtre...

Si vous demandiez au gérant de votre banque les raisons justifiant la file unique, il vous en fournirait probablement plusieurs autres.
Vous pouvez prolonger cette activité en imaginant d'autres exemples de simulation et en les testant.

Une manipulation interactive
de l'exposition "les hasards de la vie" :

Comment choisir la bonne file ?

Que faire ?
Faites tomber les billes de couleur puis votre bille blanche.
Quelle chance avez-vous pour qu'elle soit dans la bonne file d'attente ?

Que retenir ?
Les goulets d'étranglement dans les files d'attente proviennent de l'impossibilité d'exiger un service individuel. Il faut se résigner à partager ce service avec d'autres clients et s'armer bien souvent de patience.

Dans une file d'attente, les arrivées des clients s'opèrent d'une façon aléatoire ; la durée du service est elle-même en partie gouvernée par le hasard. On cherche à établir un compromis entre le temps perdu par les clients du fait de l'attente et la multiplication des files d'attente qui ne fonctionnent pas gratuitement.

En observant la répétition des sorties et le nombre des guichets, on en déduit le nombre moyen de sorties ainsi que le nombre de caissières par unité de temps.

On peut ainsi, dans le cas d'ouvriers, de magasiniers, des péages d'autoroute, minimiser le coût supporté du fait de l'attente des clients dans la file et de l'inoccupation de certains postes pour un meilleur profit de l'entreprise.