Dimensions fractales

Frédéric Vivien, Rouen

moine de l'humanité, en Asie et en Afrique aussi bien qu'en Europe.

Un bipède sans plumes n'est devenu homme qu'après avoir conquis le feu et les éléments et avoir décoré son corps, sa demeure et son temple. Au cours des millénaires, ses motifs décoratifs s'affinèrent. Certains - bâtisses, broches et colliers - aidèrent à la naissance de la géométrie qui allait être codifiée par Euclide et beaucoup plus tard devenir l'outil essentiel de maintes sciences.

D'autres éléments décoratifs furent laissés de côté puis se déguisèrent pour participer à une révolution anti-euclidienne en mathématiques, et enfin donnèrent une forme à des objets que la vieille géométrie et les sciences étaient forcées de laisser de côté comme amorphes, c'est-à-dire sans aucune forme qui aurait permis l'analyse de la nature et sa synthèse.

Ayant ainsi traversé et apporté ma contribution à plusieurs territoires du savoir désintéressé ou pratique, avec des pointes vers les arts, l'aval et l'amont de l'œuvre d'une vie viennent de se refermer devant nos yeux en un anneau fractal. Parti il y a très très longtemps de l'art, un long périple confus est désormais revenu à son origine.

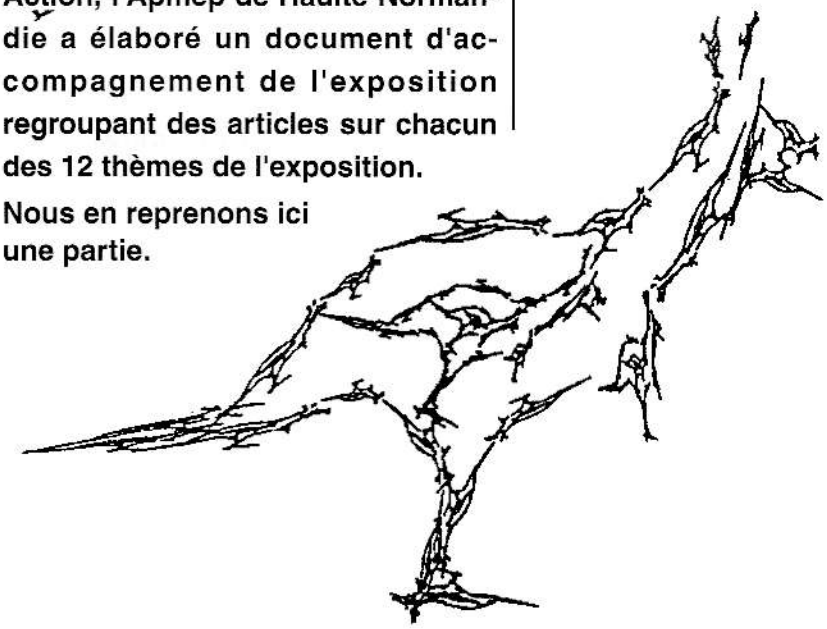
Benoît Mandelbrot

Mis à jour le lundi 28 août 2000

Il a écrit :

- Les Objets fractals (1975, 4e éd. 1995)
- Fractales, hasard et finance (1997),
- The Fractal Geometry of Nature (1984),
- Fractals and Scaling in Finance (1997),
- Multifractals and 1/f Noise (1999).

Dans le cadre de l'accueil de l'exposition "Maths 2ooo" conçue par Centre•Sciences, coproduite avec la Cité des Sciences et diffusée en Haute-Normandie par Science-Action, l'Apmep de Hauite-Normandie a élaboré un document d'accompagnement de l'exposition regroupant des articles sur chacun des 12 thèmes de l'exposition. Nous en reprenons ici une partie.



La longueur de la côte de Bretagne

On peut distinguer la similitude des mathématiciens, rigoureuse, et la similitude statistique. Par exemple, lorsque l'on observe la côte de Bretagne à très haute altitude, elle apparut très dentelée avec une succession ininterrompue de promontoires et de baies. Lorsque l'altitude diminue, la perspective évolue, mais l'aspect dentelé de la côte se maintient, avec des promontoires et des baies plus petits. Chaque changement d'échelle souligne la permanence de cette structure. C'est une similitude statistique.

Après le flocon de neige, on peut se demander, comme l'a fait Benoit Mandelbrot dans ses travaux, quelle est la longueur de la côte de Bretagne,

La réponse dépend du niveau de détail qu'on décidera de prendre en compte. La longueur mesurée en promenant un compas le long de la côte ne cesse d'augmenter lorsqu'on diminue l'ouverture du compas et la longueur devient infinie !

La dimension fractale

On peut se poser la question de la dimension des objets géométriques.

Par exemple, la courbe de von Koch, qui possède une longueur infinie contenue à l'intérieur d'une surface finie, est davantage qu'une courbe sans être un plan. Sa dimension est supérieure à un mais inférieure à deux; on obtient ainsi une dimension non entière donnant le degré d'irrégularité et correspondant à l'effficacité avec laquelle une courbe occupe l'espace.

Le travail fondamental pour définir la dimension d'un objet est celui de Haussdorff (1919) approfondi par Besicovitch (1935) permettant ainsi de définir la dimension de Haussdorff-Besicovitch utilisée ici.

Il est facile de calculer la mesure d'un objet auquel on a fait subir une contraction (ou une dilatation) de rapport k lorsque l'on travaille en dimension 1, 2 ou 3: la mesure initiale est respectivement multipliée par k, k^2 ou k^3.

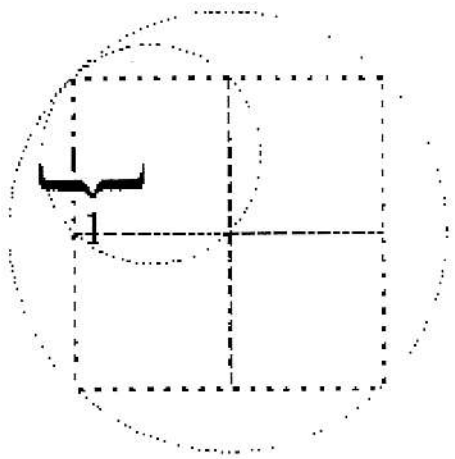
De même pour les fractales, la mesure initiale est multipliée par $n = k^d$ où d est la dimension fractale.

Cette dernière diffère d'une dimension ordinaire : elle est un nombre réel quelconque.

Une autre méthode pour déterminer la dimension fractale d'un objet est de compter le nombre moyen de motifs répétés contenus dans une sphère de rayon k centrée en un point donné de l'objet. Ce nombre de motifs est donné par $n = k^d$ et la dimension fractale est ainsi égale à :

$$d = \ln n / \ln k$$

Dans le cas d'un objet ordinaire de dimension 2, ici un carré, si on double le rayon de la sphère, on multiplie le nombre de carrés par $4 : 4 = 2^2$



Dans le cas de l'exemple le plus simple de structure fractale, **la poussière de Cantor**, lorsque l'on triple le rayon de la sphère, on double le nombre de morceaux obtenus.

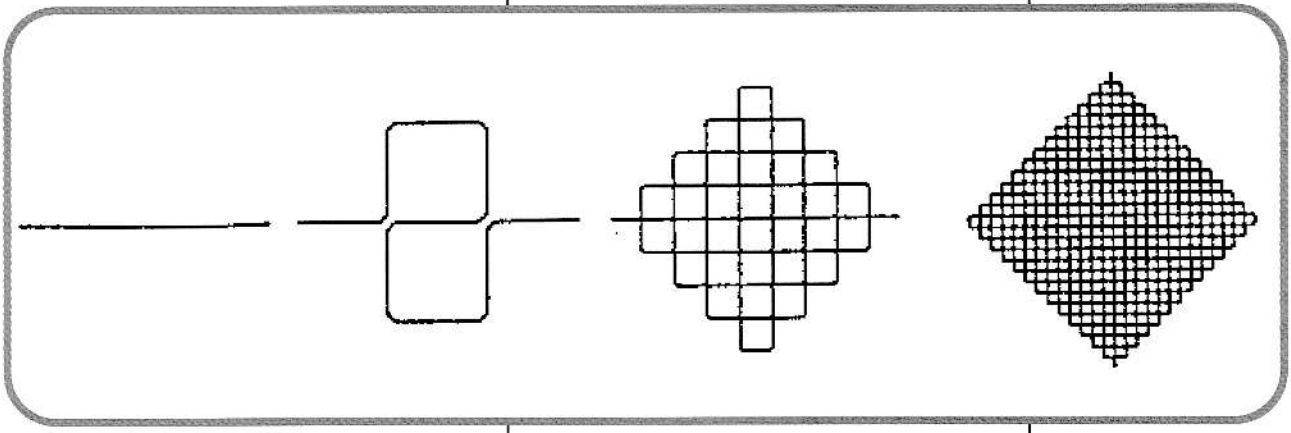
Ou encore, lorsqu'on lui fait subir une homothétie de rapport 3, sa mesure est multipliée par 2 et $d = \ln 2 / \ln 3 \sim 0{,}63$.

La courbe de von Koch possède une dimension fractale égale à

$d = \ln 4 / \ln 3 \sim 1{,}26$,

pour une échelle augmentée de 3, le nombre de segments quadruple.

La courbe de Peano, imaginée par Guiseppe Peano en 1890, est une courbe fractale dont il est donné les premières étapes de sa construction par la figure suivante:



On démontre que la courbe obtenue en itérant une infinité de fois le processus passe par tous les points du carré (et même plusieurs fois pour certains).

On retrouve ce résultat en calculant sa dimension fractale :
lorsqu'on lui fait subir une homothétie de rapport 3, sa mesure est multipliée par 9, soit :
$d = \ln 9 / \ln 3 = \ln 3^2 = 2.\ln 3 / \ln 3 = 2$.

Les manipulations de l'exposition **Maths 2ooo** : "De nouvelles dimensions" et "Des boulettes fractales", utilisent des méthodes expérimentales pour déterminer la dimension fractale d'une courbe. Vous pouvez consulter [6] et [8] pour plus de détails ainsi que d'autres méthodes.

L.F. Richardson étudia en 1961 les variations de la longueur approchée $P(e)$ de diverses côtes en fonction du pas de longueur e (ou écartement du compas de longueur e et constata que la longueur variait en suivant approximativement une loi de puissance en e soit

$$P(e) = n(e) \times e \sim c / e^D$$

où $n(e)$ représente le nombre de pas de longueur e nécessaire pour par-

Figure 1

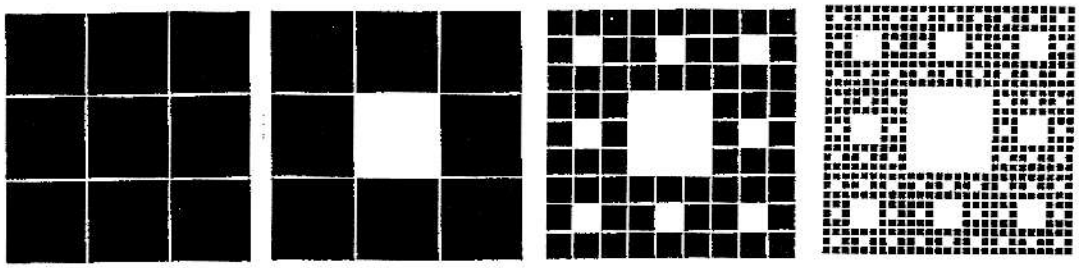


Figure 1 : **le tapis de Sierpinski**, obtenu en enlevant à chaque étape le carré central, après avoir découpé le carré initial en 9 carrés identiques.

courir la courbe,
c est une constante réelle et
d = 1 + D est la dimension fractale de la courbe.
Ainsi en prenant le logarithme (quelle que soit la base choisie) des deux membres de l'expression, nous obtenons successivement (aux approximations prés) :

$$P(e) = c / e^{D} = c \times 1/ e^{D}$$

qui est équivalent à :

$$\log P(e) = D \times \log(1/e) + \log c$$

Or P(e) = n(e)xe d'où

$$\log n(e) + \log e = D \times \log(1/e) + \log c$$

$$\log n(e) - \log (1/e) = D \times \log(1/e) + \log c$$

Soit, finalement

$$\log n(e) = (D +1) \times \log(1/e) + \log c$$
$$= d \times \log(1/e) + \log c$$

La dimension fractale *d* de la courbe est donc la pente de la droite sur le papier logarithrnique lorsque l'on représente n(*e*) en fonction de 1/e.
La manipulation de l'exposition "De nouvelles dimensions" permet ainsi de retrouver expérimentalement la dimension fractale de la courbe de von Koch (environ 1,26) en prenant comme approximation du pas de longueur *e* le diamètre des billes.

@

et sur Internet, tapez

www.2000enfrance.com /sites/utls/

ou

www.lemonde.fr/article

pour avoir les articles de l'Université de tous les savoir.
Pour avoir des logiciels **"fractales"**, tapez le mot dans un moteur de recherche
et faites-nous connaître vos trouvailles.

La rédaction.

Bibliographie

[1] The Science of Fractal Images, édité par H.-O. Peitgen et D. Saupe, Springer-Verlag, 1988.
[2] Ch. Ruhla, La Physique du Hasard de Blaise Pascal a Niels Bohr, Liaisons Scientifiques.
[3] Michael F. Barusley, Fractals everywhere, 2è édition, Acadernic Press, 1993.
[4] Plot n° 77, décembre 1996.
[5] MATh.en.JEANS, 5e congrès, éditée par l'Association, 1995.
[6] H.-O. Peitgen, H. Jurgens et D. Saupe, Fractals for the classroom, Part One, Springer-Verlag, New York, 1992.
[7] Initiation aux Systèmes Dynamiques, Hors Série Tangente no3, éditions Archimède, 1998.
[8] J.-F. Gouyet, Physique et structures fractates, Masson, Paris, 1992.
[9] Ian Stewart, Les fractals, Les chroniques de Rose Polymath (Bande dessinée), Belin.

Figure 2 : **l'éponge de Sierpinski**-Menger obtenue en évidant à chaque étape une croix à l'intérieur du cube comme l'indique la figure.

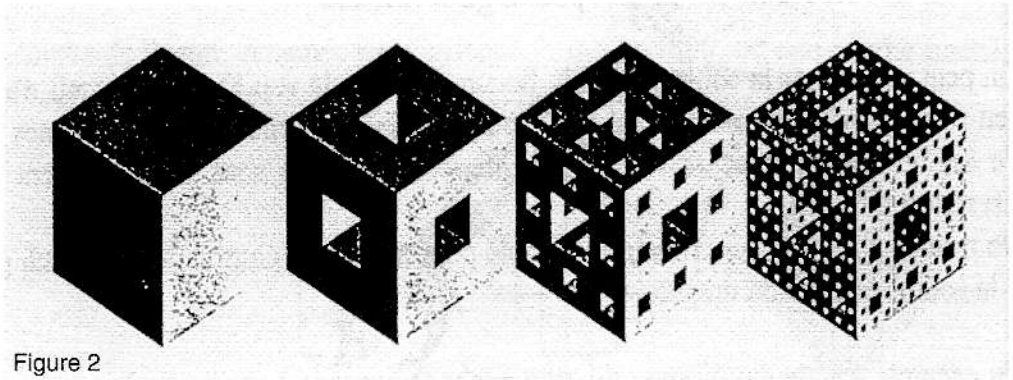


Figure 2