Les droites de notre Terre

Pascal Monsellier, Rennes

Des droites sur une sphère !

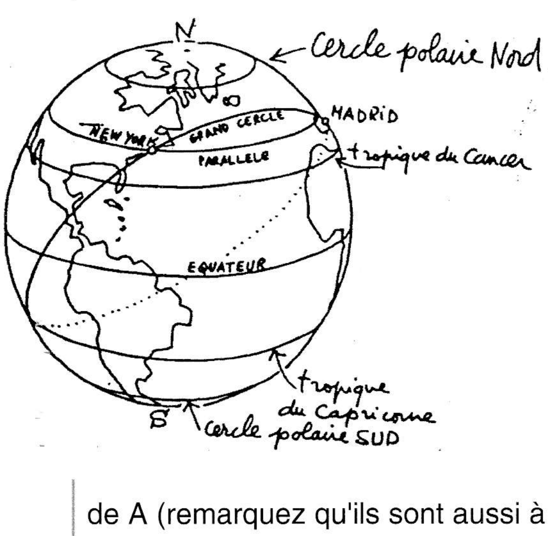
On a l'habitude d'appeler droite, le plus court chemin permettant d'aller d'un point à un autre.

Si l'on généralise l'usage de cette définition, il y a des droites sur toute surface et en particulier sur la sphère.

Pour les trouver, il suffit de tendre entre deux points un élastique ou une "règle universelle" (règle plate coupée dans du caoutchouc) qui déterminent aussi bien les lignes droites sur un plan que sur une sphère.

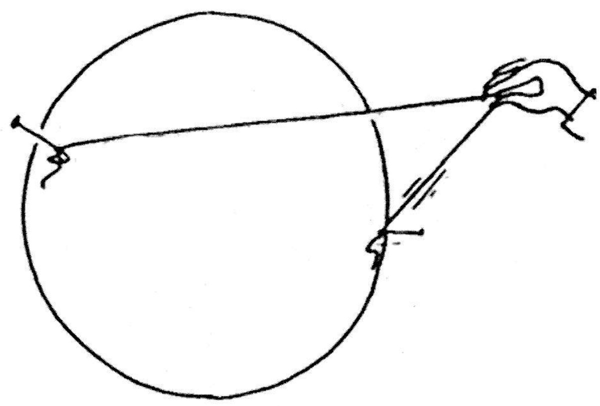
des cercles différents

Sur une sphère, choisissons deux points fixes A et B aux antipodes. Un cercle de la sphère est un ensemble de points situés à la même distance

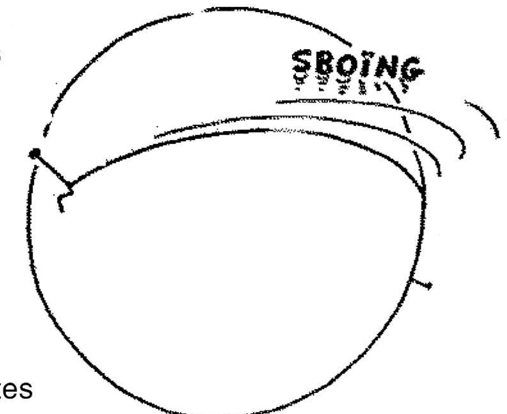


de A (remarquez qu'ils sont aussi à la même distance de B !).

Les cercles de même "centre" (ou "pôles") A et B sont dits parallèles.

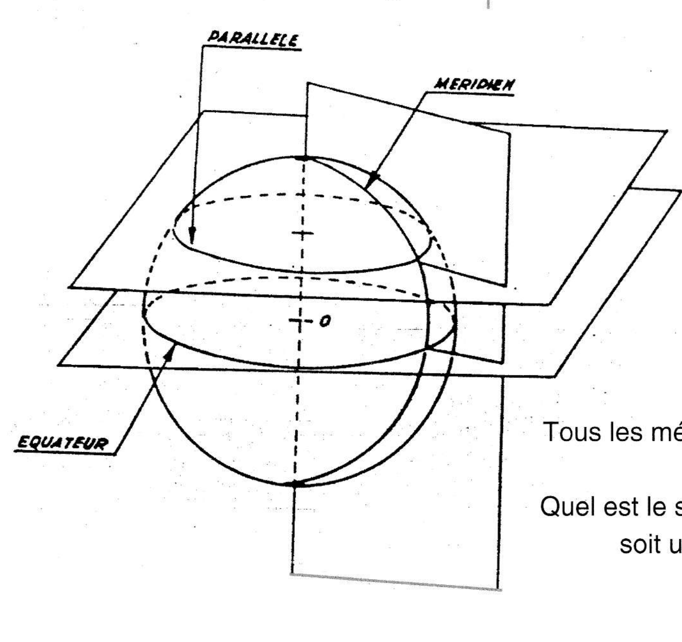


Celui qui est le plus grand de tous, équidistant de A et de B est appelé "grand cercle" ou "équateur". C'est le seul de la famille dont le plan contient le centre de la sphère.

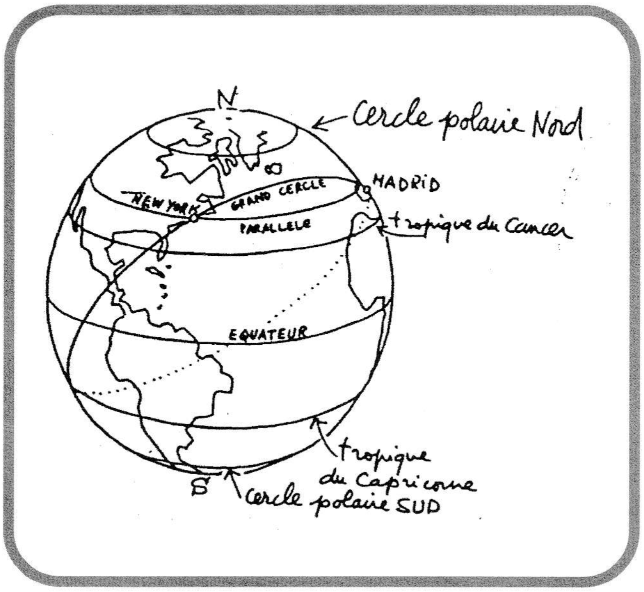


Un élastique tendu sur une sphère réalise le "plus court chemin" entre ses extrémités.

Les lignes droites (plus court chemin) sur une sphère sont les grands cercles. Ils sont appelés de plusieurs façons : grand cercle - géodésique - orthodromie (pour les géographes).
Sur notre planète Terre, les cercles polaires, les tropiques sont des parallèles, mais ne sont pas des grands



Tous les méridiens sont des grands cercles.
Quel est le seul parallèle qui soit un grand cercle ?



La Planète Terre

cercles. Le seul parallèle qui soit un grand cercle est l'équateur. Ainsi, Madrid et New York sont sur le même parallèle mais l'arc de parallèle qui les joint n'est pas le plus court chemin qui les relie sur Terre. Les méridiens sont eux des grands cercles. Ils passent tous par les pôles.

Conforme or not conforme ?

Une carte est une représentation de la réalité. Elle peut privilégier un aspect de cette réalité plutôt qu'un autre. Les cartes conformes respectent les formes. L''angle de deux courbes sur la Terre y est égal à l'angle de leurs images sur la carte. On dit qu'il y a conservation des formes.

De telles cartes permettent de reconnaître les continents, les pays ... mais elles ont un inconvénient majeur : les rapports d'aires ne sont pas conservés, ce qui contribue à hypertrophier les régions proches des pôles par rapport aux régions équatoriales.

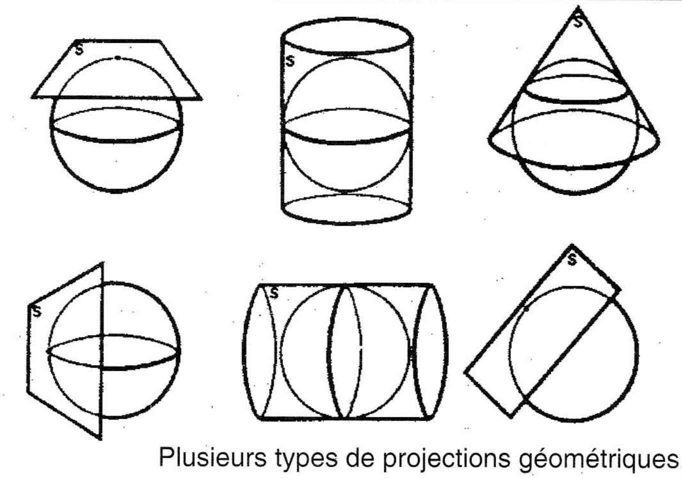
Les cartes équivalentes respectent, elles, les rapport d'aire : deux régions de même aire sur la Terre auront des images de même aire sur la carte. Cette propriété permet de respecter les équilibres visuels entre continents. Mais cela se paie au prix de déformations importantes des figures.

Une carte ne peut être à la fois conforme et équivalente ! Il faut choisir.

Selon l'usage que l'on veut faire d'une carte, et son étendue (planétaire ou locale), on privilégie l'une ou l'autre de ces qualités. Pour tous les travaux demandant un repérage précis (navigation, topographie ...) on utilisera des cartes conformes. Pour des comparaisons géographiques entre régions de basses et hautes latitudes, on choisira des cartes équivalentes.

Cela n'aurait évidemment aucun sens de déterminer la route la plus courte entre Moscou et Los Angeles sur la carte équivalente de Lambert, ou de comparer l'étendue de l'Inde à celle de la Scandinavie sur une carte conforme de Mercator!

Réaliser une carte, c'est établir une correspondance entre la sphère terrestre et un plan (on néglige ici le fait que la Terre mieux approchée par une ellipsoïde que par une sphère).



Plusieurs types de projections géométriques.
On peut projeter sur un plan, un cylindre, un cône ...

Projections et maillages

Il est nécessaire d'établir entre les points de la sphère et ceux de la carte des relations du type :

$x = f(\alpha, \lambda) \qquad y = g(\alpha, \lambda)$

$\alpha = h(x, y) \qquad \lambda = k(x, y)$

où x et y sont les coordonnées rectangulaires dans le plan, a la latitude et l la longitude du point sur la sphère, f, g, h, k des fonctions continues quelconques.

Parmi les solutions possibles à ce problème, les mathématiciens en ont décrits près de deux cents dont une trentaine sont employées dans les applications usuelles.

En pratique deux familles de solutions sont envisageables :

---->Soit on utilise une projection géométrique de tout ou partie de la sphère terrestre sur une surface développable (plan, cylindre ou cône) tangent à la Terre et on aplatit cette surface pour obtenir la carte recherchée. Les résultats obtenus, on le verra, sont très divers.

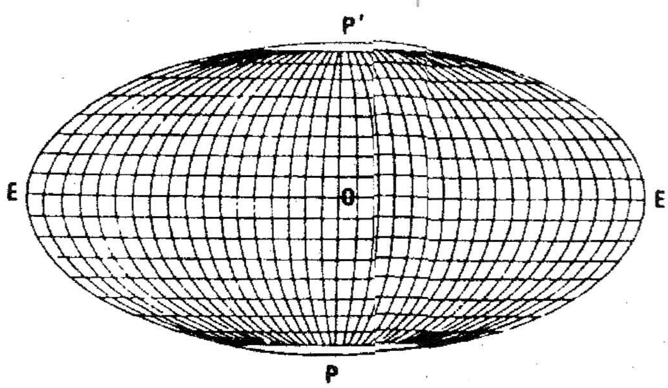
Mais à l'origine géométrique du procédé permet dans beaucoup de cas des tracés, des mesures et des calculs sur les cartes, en particulier avec l'ordinateur.

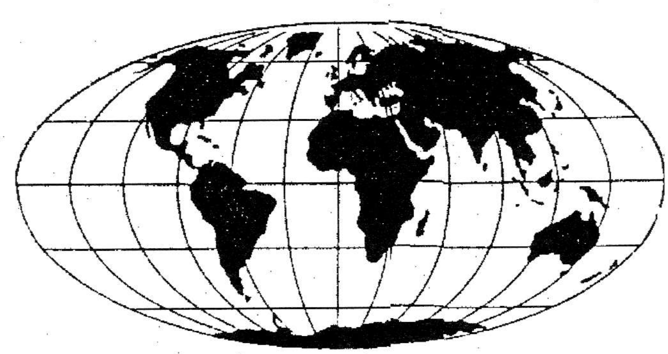
----> Soit la relation entre les coordonnées est de type analytique et ne correspond à aucune projection perspective.

On obtient alors soit des cartes se prêtant aux tracés, soit des cartes purement géopolitiques, soit des planisphères.

Dans tous les cas, les cartes se dessinent par rapport à un réseau, ou maillage, image des méridiens et des parallèles quadrillant la sphère terrestre.

Remarquons que méridiens et parallèles étant orthogonaux, une projection conforme (qui conserve les angles) donnera naissance à un maillage où tous les angles sont droits (mais un maillage orthogonal ne correspond pas nécessairement à une projection conforme !).





Exemples de canevas conventionnel :
Il sert à la planisphère de Mollweide, carte équivalente dans laquelle les méridiens sont des arcs d'ellipse et les parallèles sont des droites parallèles tracées à des distances telles que l'équivalence des mailles est conservée.

Existe-t-il une carte isométrique ?

La vie serait belle s'il en était ainsi ! En effet, une telle carte respecterait par définition toutes les distances et :

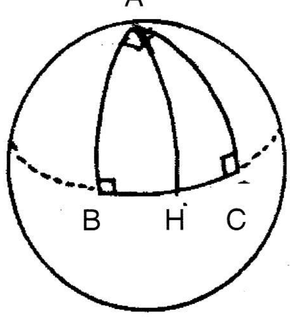
• pour construire une telle carte, il suffirait de reporter sur le papier toutes les distances mesurées sur le terrain par topographie (à une échelle près bien entendu),

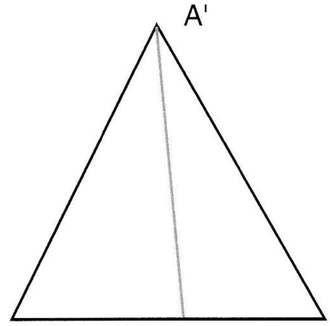
• pour connaître la distance de deux points quelconques, il suffirait de mesurer leur distance sur la carte (et d'appliquer l'échelle de celle-ci).

Malheureusement, une telle carte n'existe pas !
En voici une démonstration simple.

Une remarque au préalable : si une carte isométrique existait, les "plus courtes distances" (géodésiques) de la sphère et du plan se correspondraient, à savoir que les grands cercles de la sphère auraient pour image les droites du plan.

Considérons un huitième de sphère, c'est-à-dire un triangle sphérique ayant 3 angles droits, et tel que les côtés AB, BC et CA aient même longueur (un quart d'équateur).





Si une carte isométrique existait, le triangle sphérique "équilatéral" ABC aurait pour image un triangle plan équilatéral A'B'C'. Remarquons au passage que les angles droits du triangle sphérique ABC auraient pour image des angles de 60° : la carte ne conserverait pas les angles.

Soit AH, l'arc correspondant au quart de grand cercle passant par A, de longueur égale, elle aussi, à un quart d'équateur. Son image A'H', nécessairement segment de droite, serait corde du triangle A'B'C'.
Or on a toujours A'H' < A'B'.

Une telle carte isométrique ne peut exister puisque les deux arcs AB et AH, de même longueur, ont des images de longueurs inégales.

Faute de grives ...

... on mange des merles.

À défaut d'avoir des cartes isométriques, on se contentera de projections ayant, au mieux, l'une des propriétés suivantes :
- soit conformes (elles conservent les angles),
- soit équivalentes (elles conservent les aires à un facteur près).

Malheureusement, chacune de ces propriétés, complète ses avantages par beaucoup d'inconvénients, et elles sont en outre incompatibles !!!

Retour sur l'échelle

Nous aborderons souvent la notion d'échelle (que les géographes appellent souvent "module linéaire").

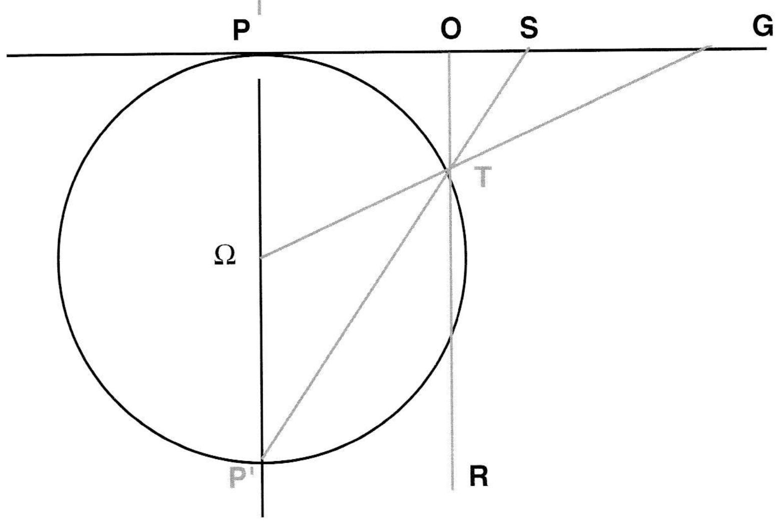
Rappelons ce dont il s'agit :

Une courbe AB sur la Terre a pour image une courbe A'B' sur une carte plane. On appellera échelle sur la courbe considérée, le rapport longueur A'B' / longueur AB. C'est le coefficient multiplicateur qui transforme les distances. Notons que nous ne tenons pas compte de la taille réelle de la Terre et que nous supposons que la sphère et la carte ont même ordre de grandeur.

Par exemple, une carte isométrique, qui respecterait toutes les distances, aurait en tout point une échelle valant 1.

Mais une telle carte... n'existe pas !!! (bis repetita placent).

Retour sur la conservation



Pour aplatir une sphère, il y a 3 possibilités qui correspondent chacune à projeter sur une surface développable simple : un plan, un cône ou un cylindre tangents à la sphère.

Cela donne des projections
- azimutales,
- coniques ou
- cylindriques.

Une autre façon de classer les projections cartographiques est de partir du point de projection.

Ainsi, pour une projection azimutale, il y a plusieurs façons de projeter un point T de la Terre.
Sur le dessin ci-dessus apparaissent les 3 principaux types de projection des points de la Terre sur un plan :

- **gnomonique** : Ω**TG**,
le centre de la Terre est centre de projection,

- **stéréographique** : P'T**S**,
T' est le point - le pôle - opposé au point de tangence du plan de projection,

- **orthographique** : RT**O**,
le centre de projection est à l'infini.

Troisième voie pour classer les projections cartographiques : les propriétés qu'elles conservent, sachant qu'elles ne peuvent en conserver que très peu.

Les angles :
Ce sont les projections conformes. Tout angle sur la sphère est projeté sans changement sur le plan. Par exemple, les méridiens et les parallèles qui sont perpendiculaires sur la sphère terrestre restent perpendiculaires sur le plan.

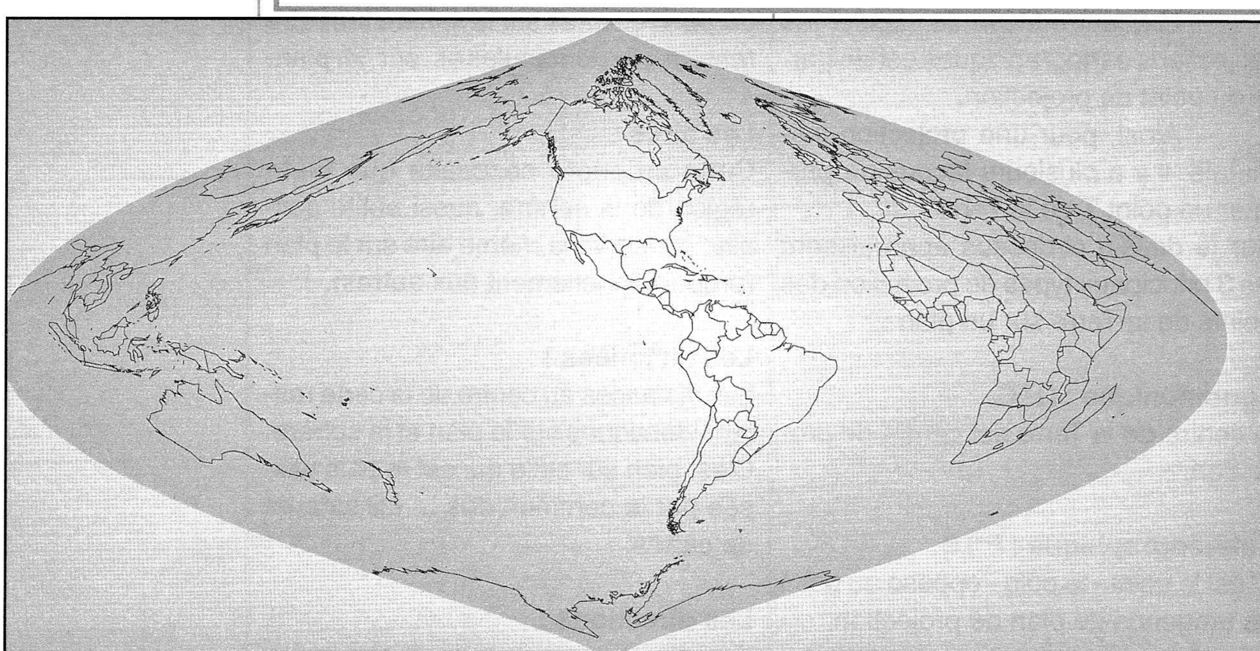
Les aires :
Cette propriété nécessite que toute région de la sphère, aussi petite soit-elle, conserve la même aire sur le plan (proportionnellement aux autres).

Les distances :
Les distances au centre de la carte restent identiques sur le plan et la sphère. C'est bien sûr celle qui est le plus utilisée par le commun des ... utilisateurs de cartes.

Les directions :
Les directions par rapport aux méridiens, par exemple, sont conservées sur la carte.

Le monde vu d'Asie : L'asie et ses deux milliards d'habitants, et la masse du désert australien au bout d'un chapelet d'îles. A ses portes, l'Europe et l'Afrique, ainsi que l'ouverture sur le Pacifique. Projection Eckert IV, de type pseudo-cylindrique, centrée sur le méridien de longitude 90° passant par l'Asie. Cette projection qui conservent les aires est principalement utilisée pour représenter le monde.

Projection plane	**Source de projection**	**Conservation**
Azimutale	Gnomonique	Angles égaux
Conique	Stéréographique	Aires égales
Cylindrique	Orthographique	Distances égales
		Directions conservées



Le monde vu des USA : L'accent est mis sur un effet de renvoi dos à dos, ou de symétrie : la côte Est des États-Unis tournée vers l'Europe, la côte Ouest tournée vers l'Asie. L'économie trouve ses racines dans la géographie. Projection sinusoïdale de Samnon-Flamsteed, de type pseudo-cylindrique.