

Des additions sans retenues !!!

Deux nouveaux bouts d'allumaths

par les allumés des maths !!!

Le groupe des allumaths (les "allumés" des mathématiques) réunit quelques professeurs et inspecteurs de mathématiques de l'Académie de Poitiers pour la plupart.

Ils échangent problèmes et solutions sans autre restriction que leur intérêt. Voici deux nouveaux sujets, l'un géométrique, l'autre numé-

Plot 91 - Situation 1

Plot 91 - Situation 2

Un carré de "bons nombres"

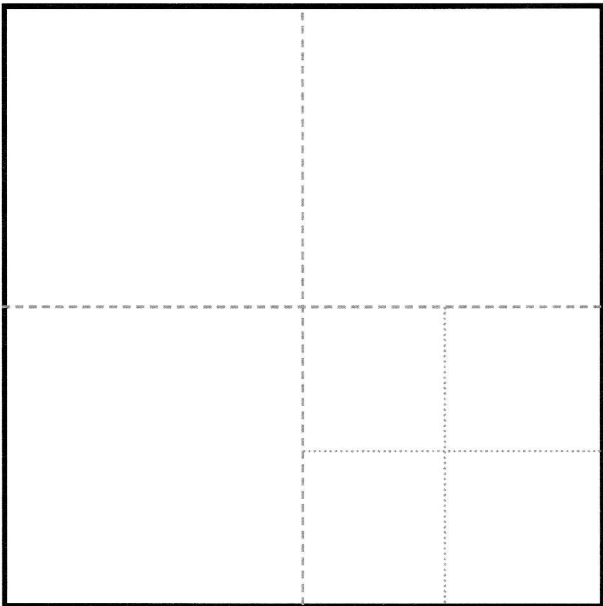
Si un carré peut être partagé en n carrés, alors n est appelé un "bon nombre".
Il est clair que 1, 4, 9 ... sont des bons nombres.
Mais 7 est aussi un bon nombre, comme le montre la figure ci-dessous.

Trouvez tous les "bons nombres" !
Comment généraliser ?

De différence en différence

On considère quatre nombres positifs :
 $a \quad b \quad c \quad d$
puis leur différence de valeur absolue :
 $|a - b| \quad |b - c| \quad |c - d| \quad |d - a|$
et on continue ...

A vous d'imaginer la suite ...



Envoyez vos commentaires
à Marc Blanchard
39, rue Barbès
17300 Rochefort-sur-Mer

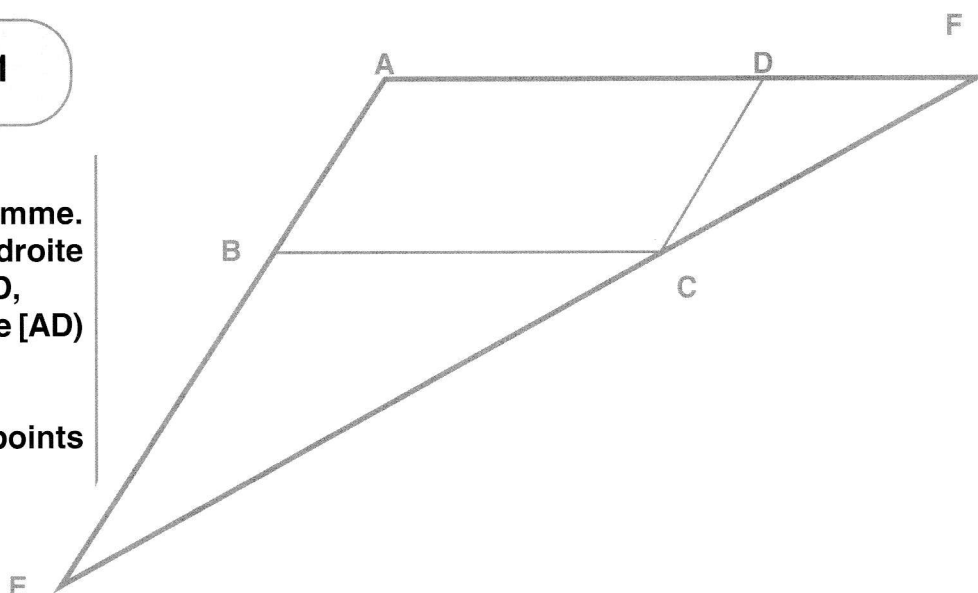
Trois points alignés !

À propos des situations parues dans le PLOT n° 90

Plot 90 - Situation 1

ABCD est un parallélogramme. Soit E le point de la demi-droite [AB) tel que : $AE = AB + AD$, et F le point de la demi-droite [AD) tel que $AF = AB + AD$.

Démontrez que les points C, E et F sont alignés.



Donnons quelques résultats :

Posons $AB = a$ et $AD = b$.

- 1- • C est le barycentre de (E, a) et (F, b).
• Aire (AEF) / Aire (ABCD) = $(a/2b) + (b/2a) + 1$

- 2- Si le plan est euclidien, alors (EF) est parallèle aux bissectrices des angles ABC et ADC.

- 3- Soit E' (resp. F') le symétrique de E (resp. F) par rapport à B (resp. D).

- C, E', F' sont alignés.
- (E'F') est parallèle aux bissectrices des angles BAD et BCA, donc perpendiculaires à (EF).

- 4- Construisons les points E'' et F'' tels que : $AE'' = -BE$ et $CF'' = DF$. Cela revient à intervertir les rôles joués par A et C d'une part, et par B et D d'autre part.

On en déduit :

- D, E'', F'' sont alignés
- (E''F'') est parallèle aux bissec-

trices des angles BAD et BCA, donc (E'F') est perpendiculaire à (EF).

- Les triangles isocèles AEF et AE''F'' ont même aire.

- 5- Soit C' le symétrique de C par rapport au milieu I de [EF].

On note B' l'œ (AB) et D' l'œ (AD) tel que AB'C'D' est un parallélogramme.

- Aire (ABCD) = Aire (AB'C'D'),
- (BD), (B'D'), (EF) sont parallèles,
- (ED), (FB') d'une part, (ED'), (FB) d'autre part sont concourantes sur (AI).

- 6- Et, avec Raymond Millon de Montigny le Bretonneux (fidèle lecteur dont nous publierons dans le prochain numéro quelques remarques sur l'existence supposée du nombre d'oor dans certaines pyramides) : l'enveloppe de (BD) lorsque C se déplace sur (EF), est une parallèle de sommet le milieu de [OA] (où O est le milieu de [EF], d'arc la médiatrice de [EF], de foyer le centre du cercle circonscrit au triangle AEF passant par E et F où elle est tangente à (AE) et à (AF).

2 0 0 0

1er janvier 2000 ?!?

À propos de la situation 2 parue dans le **PLOT** n° 90

Plot 90 - Situation 2

Et si je ne savais pas calculer ?

$$17 + 5 = 12$$

$$18 + 8 = 16$$

$$55 + 66 = 11$$

...

Et si on décidait, en classe de CE₁, d'oublier systématiquement les retenues lorsqu'on ajoute deux nombres entiers naturels ?!!

• **IN** muni de "l'addition-sans-retenue" (notée **+**) a une structure de groupe isomorphe au groupe des suites de termes de **Z / 10Z** dont seul un nombre fini n'est pas nul.

Par exemple, l'opposé de 1075 est 9035.

• $n \in \mathbf{IN}^*$ étant fixé, si l'on note $\mathbf{IN}_n$, l'ensemble des naturels s'écrivant avec n chiffres au plus, alors c'est un sous-groupe isomorphe à $(\mathbf{Z} / 10\mathbf{Z})^n$ muni de l'addition.

• Si l'on note **2.IN** l'ensemble des naturels qui ne s'écrivent qu'avec des chiffres pairs (0, 2, 4, 6, ou 8), alors c'est encore un sous-groupe.

Il en est de même avec **5.IN** l'ensemble des naturels qui ne s'écrivent qu'avec 0 ou 5.

On en déduit que **2.IN_n** ($= 2\mathbf{IN} \cap \mathbf{IN}_n$) est un sous-groupe isomorphe à $((\mathbf{Z} / 5\mathbf{Z})^n, +)$ et **5.IN_n** ($= 5\mathbf{IN} \cap \mathbf{IN}_n$) est un sous-groupe isomorphe à $((\mathbf{Z} / 2\mathbf{Z})^n, +)$.

• En munissant en outre **IN** de la "multiplication-sans-retenue" (notée **x**) alors $(\mathbf{IN}, +, \mathbf{x})$ est un anneau commutatif, de caractéristique 10.

Il est en fait isomorphe à $(\mathbf{Z} / 10\mathbf{Z})[\mathbf{x}], +, \mathbf{x})$, anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans **Z / 10Z**.

$$1974$$

$$\mathbf{x} \ 26$$

$$\hline 6424$$

$$2848$$

$$\hline 24804$$

Par exemple :

$$1974 \mathbf{x} 26 = 24804 \text{ car :}$$

• cet anneau n'est pas intègre et les diviseurs de zéro sont les éléments de $2\mathbf{IN} \cup 5\mathbf{IN}$.

En outre, tout naturel est somme d'une seule façon d'un multiple de 2 et d'un multiple de 5. Pour ce calcul, il suffit d'utiliser la formule $n = (6\mathbf{x} \ n) + (5\mathbf{x} \ n)$. Par exemple : $71 = 26 + 55$.

$(\mathbf{IN}, +, \mathbf{x})$ est un anneau unitaire dont les unités sont 1, 3, 7 et 9. Tout naturel est donc divisible par 1, 3, 5, 7 ou 9. Par exemple :

$$71 = 3 \mathbf{x} 97 = 7 \mathbf{x} 13 = 9 \mathbf{x} 71).$$

Remarquons que :

$$97 = 7 \mathbf{x} 71, 13 = 3 \mathbf{x} 71, 39 = 9 \mathbf{x} 71.$$

• Comme en arithmétique classique, il est possible d'introduire une notion de congruence, de nombres premiers ou irréductibles, de factorisation de naturels comme produits de puissances de nombres premiers, de PGCD et de ppcm.

Le lecteur intéressé rencontrera des surprises (?), par exemple :

• l'ensemble des nombres dont les chiffres des unités est pair (resp. multiple de 5) est $56 \mathbf{IN}$ (resp. $65 \mathbf{IN}$).