

de Fibonacci à phi

Apmep de Haute-Normandie et Poitou-Charentes

Ces textes sont extraits et complétés de "Maths en scène", publié par l'Apmep de Rouen et Science-Action (ici Jacqueline Borréani) et "des maths et vous" de l'Apmep de Poitou-Charentes, pour accompagner l'exposition "Maths 2000".

Les pétales des fleurs

Pourquoi le nombre de pétales des fleurs est-il souvent un des nombres suivants : 3, 5, 8, 13, 21, 34 ou 55 ? Par exemple, les lis ont 3 pétales, les boutons d'or en ont 5, les chicorées en ont 21, les mar-

pommes de pin : pourquoi ont-elles 8 spirales d'un côté et 13 de l'autre ? Et finalement, pourquoi le nombre de spirales d'un ananas est-il aussi 8 dans une direction et 13 dans l'autre ? (Sauf aux Antilles où vous pourrez en trouver qui en ont 13 et 21 : ce sont les ananas bouteilles).

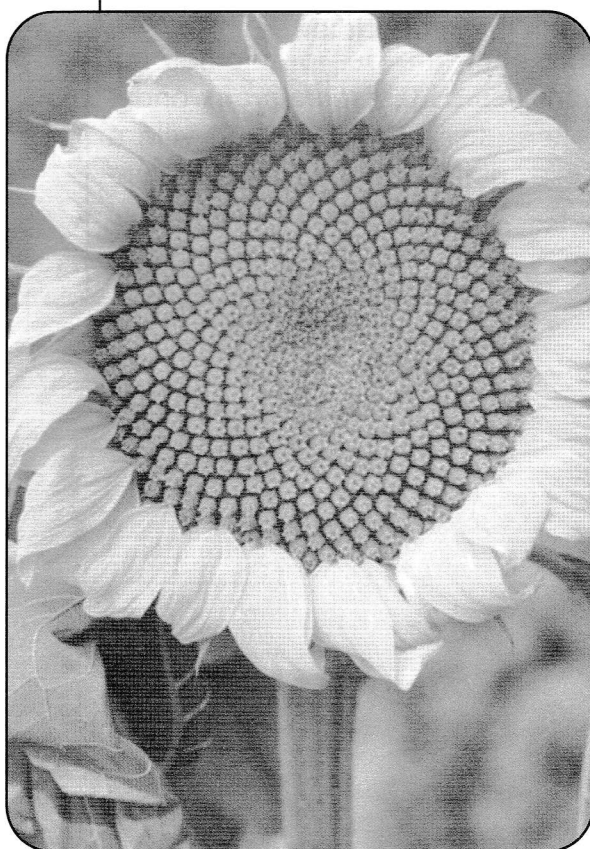
Ces nombres sont-ils le ... fruit du hasard ? Non ! Ils font tous partie de la suite de Fibonacci : 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc., où chaque nombre s'obtient à partir de la somme des deux précédents. Depuis longtemps on avait remarqué que ces nombres étaient importants dans la nature, mais c'est seulement depuis peu qu'on comprend pourquoi.

C'est une question d'efficacité dans le processus de croissance des plantes. L'explication est néanmoins un peu compliquée et on ne la présentera pas ici.

Contentons-nous de mentionner qu'elle est reliée à un autre nombre fameux, le nombre d'or, lui-même intimement lié à la forme spirale de certains coquillages.

Mentionnons aussi que, dans le cas du tournesol, de l'ananas et de la pomme de pin, la correspondance avec les nombres de Fibonacci est très exacte, tandis que dans le cas du nombre de pétales des fleurs, elle est plutôt vérifiée en moyenne ; et dans certains cas le nombre est doublé, car les pétales sont disposés sur deux rangées.

Stéphane Durand
in *Math2000*, supplément à la
Revue *QuébecSciences*
de Mai 2000



guerites ont souvent 34 ou 55 pétales, etc.

Par ailleurs, lorsqu'on observe le cœur des tournesols on remarque deux séries de courbes, une enroulée dans un sens et une dans l'autre ; le nombre de spirales n'étant pas le même dans chaque sens. Pourquoi le nombre de spirales est-il en général soit 21 et 34, soit 34 et 55, soit 55 et 89, ou soit 89 et 144 ? Même chose pour les

Les nombres de Fibonacci

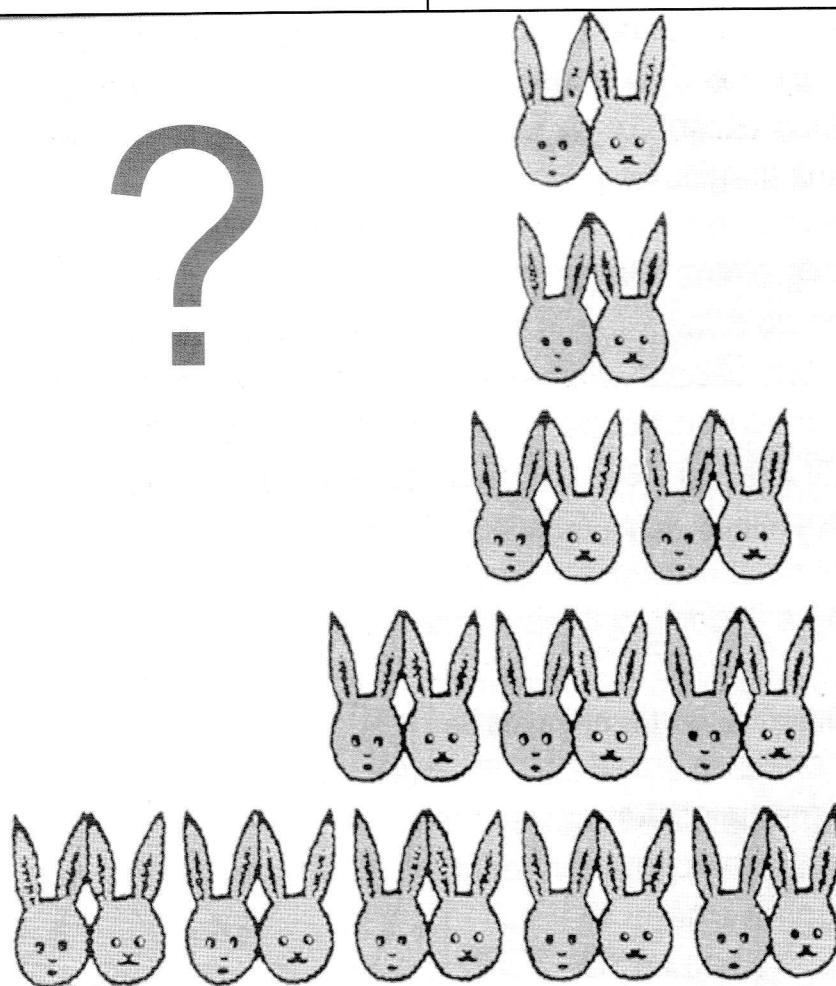
Dans son ouvrage, Liber Abaci (livre de l'abaque), paru en 1202, Fibonacci ou Léonard de Pise, a étudié un problème qui a inspiré

de nombres 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13.... u_n ,

.. : dite suite de Fibonacci. Cette suite s'obtient par une récurrence : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$. Chaque terme de la suite est égal à la somme des deux termes précédents à partir du rang 2.

Les deux premiers termes de la suite

Ces textes et ceux des prochains numéros du Plot, sont là pour accompagner les affiches réalisées par Centre•Sciences et diffusées par la Réunion des CCSTI dans toutes les régions et dans tous les pays francophones avec le concours du Ministère des Affaires Etrangères.



de nombreux mathématiciens :

1 lapin + 1 lapin = ???

"Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin d'une année, si, commençant avec un couple de nouveau-nés, chacun des couples produit chaque mois un nouveau couple, lequel devient productif au second de son existence ?".

Ce problème célèbre utilise la suite

sont 1 et les autres sont :

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 2 = 3$$

$$2 + 3 = 5$$

$$3 + 5 = 8$$

$$5 + 8 = 13$$

$$8 + 13 = 21 \dots$$

Cette suite particulière possède de nombreuses propriétés, entre autres :

2	circée
3	iris, lis tulipe plantain
5	anémone églantine
8	ficaire anémone
13	camomille marguerite
21	aster chicorée
34	paquerette
55	aster
89	aster

• pour tout $n > 0$, les nombres U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux. Ils n'ont que 1 comme diviseur commun.

• la limite de U_{n+1} / U_n quand n tend vers l'infini est égale au nombre d'or Φ que nous étudierons plus loin.

• en considérant deux suites (v_n) et (w_n) définies par :

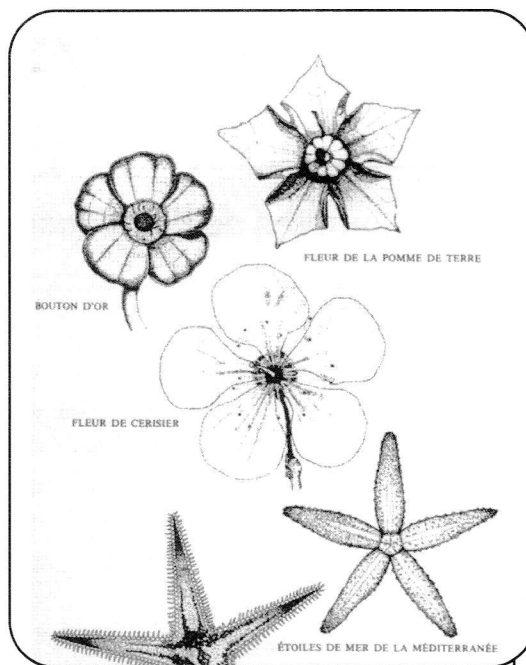
$$v_n = \Phi^n \text{ et } w_n = (-1/\Phi)^n,$$

on démontre que $u_n = (v_n - w_n) / \sqrt{5}$,
C'est la formule de Binet.

Quelques particularités des plantes

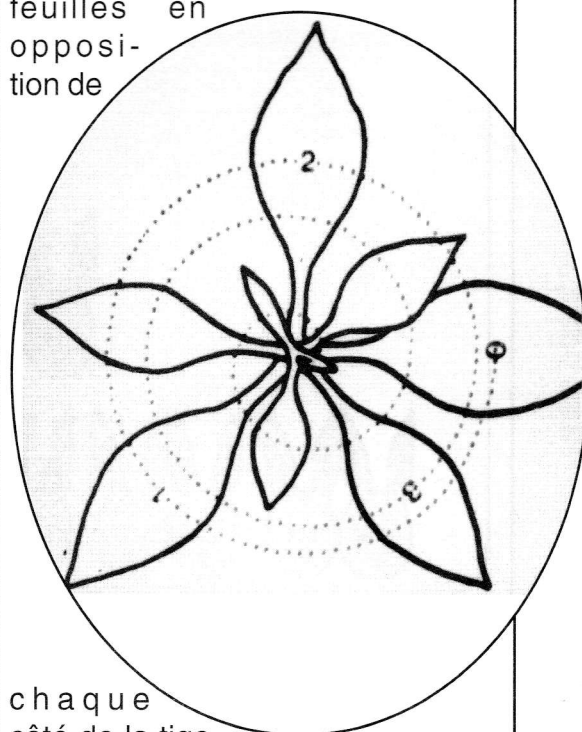
Le tableau ci-contre présente une répartition de fleurs courantes selon le nombre de leurs pétales.

Les nombres 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... sont les nombres de pétales les plus fréquemment rencontrés, ce sont les nombres de

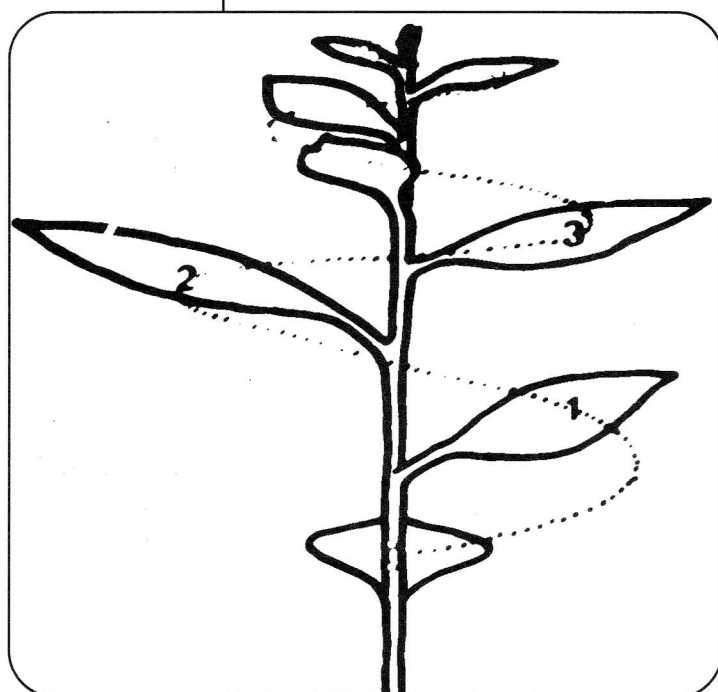


la suite de Fibonacci.

Le long de la tige des plantes, les feuilles sont disposées de façons différentes. Certaines ont leurs feuilles en opposition de



chaque côté de la tige, pour d'autres, les feuilles poussent en décrivant une courbe qui tourne en hélice du bas vers le haut. Concernant la majorité des plantes de cette catégorie, si, à partir de n'importe quelle feuille, on compte



le nombre n_1 de feuilles entre deux feuilles disposées l'une au-dessus de l'autre et le nombre n_2 de tours compris entre ces deux feuilles, on obtient deux nombres de Fibonacci. On peut ainsi associer à chacune de ces plantes une fraction n_1 / n_2 qui mesure en nombre de tours, l'angle entre deux feuilles.

Le même angle est conservé dans la disposition des branches, des bourgeons et des feuilles.

Ainsi, pour un abricotier ou un cerisier, le rapport est de $2/5$, pour un poirier ou un peuplier, il est de $3/8$

Les rapports les plus courants sont

$1/2, 1/3, 2/5, 3/8, 5/13, 8/21$.

Ils sont de la forme

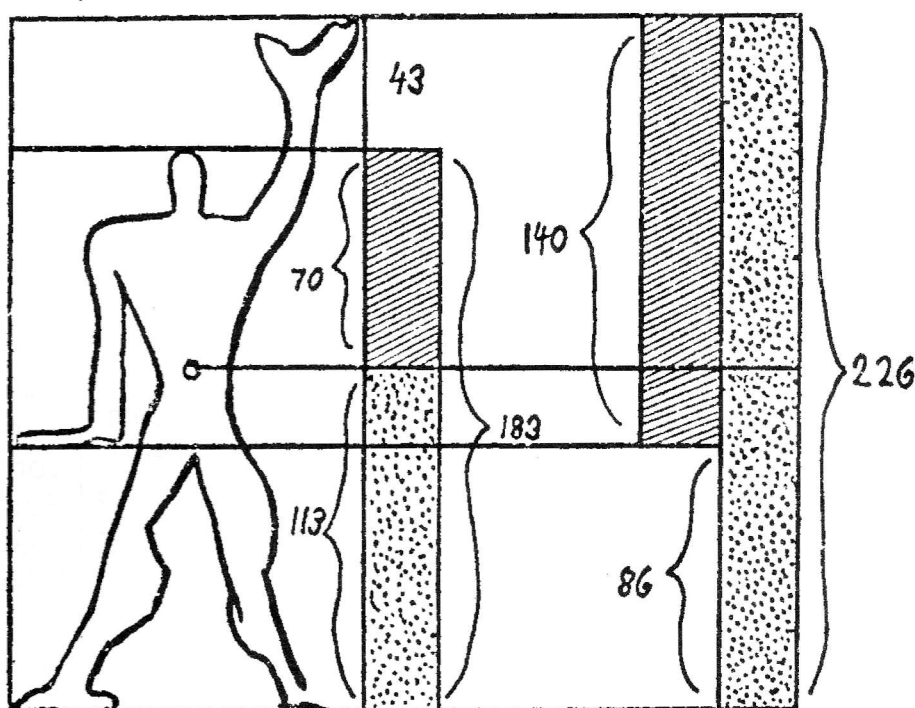
$$U_n / U_{n+2}$$

correspondant à un nombre de tours voisin de $1/\Phi^2$.

Très souvent les branches d'un arbre s'écartent du tronc d'un angle à peu près égal à 69° . C'est l'angle de Wiesner qui correspond à l'angle d'exposition optimale des feuilles de l'arbre à la lumière. Certains font correspondre cette mesure de 69 degrés avec une valeur arrondie, en radians de π/Φ^2 , on peut encore y voir une utilisation mythique du nombre d'or.

Des mesures humaines

Une main humaine peut être utilisée comme unité de mesure. En



effet, un menuisier pour prendre des mesures en valeurs approchées utilise souvent les doigts d'une main en les écartant. La mesure entre le pouce et l'auriculaire s'appelle *l'empan*, la *palme* est la mesure entre l'auriculaire et l'index, la largeur d'une paume de mains est *la paume*. La longueur d'un pied ou entre le coude et l'extrémité du majeur est *la coudée*. Cet ensemble se nomme *la quine* utilisée par les bâtisseurs.

Dans le tableau suivant, on trouve les correspondances entre ces mesures et celles établies en

Paume	palme	empan	pied	coudée
34 lignes	55 lignes	89 lignes	144 lignes	33 lignes

Petit problème fibonacien :

$$1^2 + 1^2 = 1.2$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 = 2.3$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3.5$$

$$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5.8$$

Pouvez-vous continuer ?

prenant comme unité de base une ligne, c'est-à-dire le diamètre d'un grain d'orge, à peu près 0.225 cm.

34, 55, 89, 144, 233, nous retrouvons des nombres de la suite de Fibonacci.

doigts de la main de cet homme ; lorsqu'il lève le bras.

À partir de ces deux nombres, 183 et 226, il construit une suite dite rouge (11, 16, 27, 43, 70, 113, 183, 296, ...) et une suite dite bleue (22, 32, 54, 86, 140, 226, 366 ...). Dans ces deux suites, chaque terme est la somme des deux termes précédents, comme dans la suite de Fibonacci. Le quotient de deux termes consécutifs tend vers le nombre d'or Φ quand le rang tend vers l'infini.

Le système de Le Corbusier

1	2	3	4	5	6	7
11	16	27	43	70	113	183

**Calculez $u_n + u_{n+1}$
et u_{n+1} / u_n**

Plus récemment, Le Corbusier (1887-1965) pensa que le système anglo-saxon,

basé sur le pied (0,324 mètre) et le pouce (un douzième de pied), était mieux adapté aux mesures de l'homme que notre système métrique, même si ce dernier est plus facile à utiliser. Afin de palier les faiblesses des deux systèmes, Le Corbusier va mettre au point une nouvelle gamme de mesures appelée "modulor". L'unité de mesure est celle d'un homme de six pieds soit 183 centimètres. Une autre mesure privilégiée est celle de la distance entre le sol et l'extrémité des

C'est ce système de mesures que Le Corbusier a mis en application dans l'Unité d'Habitation construite à Marseille, la Cité Radieuse, dans les années cinquante. Le Corbusier s'appuie sur l'idée répandue de relations existantes entre le nombre d'or et les arts. En effet, dans les années 1920-1930, plusieurs ouvrages sont parus, développant l'argumentaire d'une utilisation délibérée du nombre d'or dans la statuaire et l'architecture grecque ainsi que dans la construction des tableaux des peintres de la Renaissance.

Autre problème fibonacien :

$$2^3 + 3^3 - 1^3 = 34$$

$$3^3 + 5^3 - 2^3 = ??$$

$$5^3 + 8^3 - 3^3 = ??$$

Pouvez-vous compléter et continuer ?

$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$: le nombre d'or

Φ

Le nombre d'or remonte très loin dans l'histoire. Il est présent dans ce que l'homme construit mais également dans l'univers du vivant. On le trouverait déjà dans la Pyramide de Chéops construite 2800 av. J.-C. : si on considère chaque face triangulaire de la pyramide, le rapport entre sa hauteur et sa demi-base carrée B, serait précisément égal au nombre d'or. On en trouve aussi trace dans les *Éléments* d'Euclide quand il s'agit de partager un segment en extrême et moyenne raison [13].

ture et peinture).

C'est le premier ouvrage consacré au nombre d'or, *Sectia aurea*, comme le nomme Léonard de Vinci illustrateur de la "*Divine proportion*".

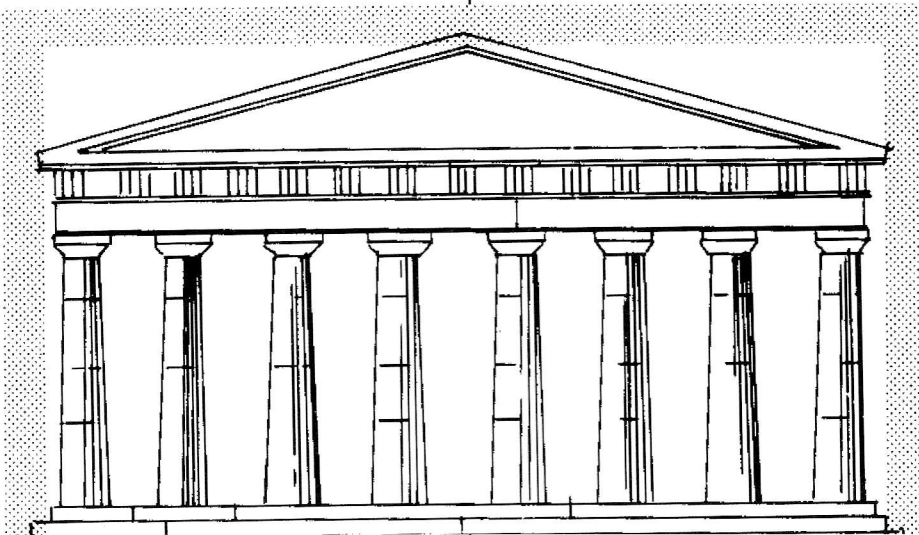
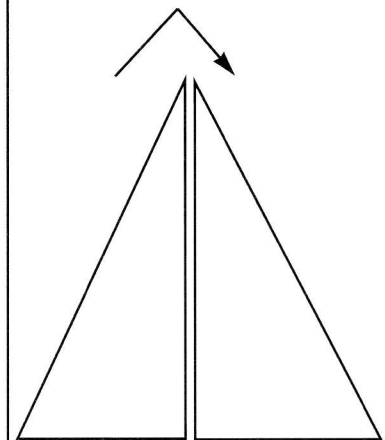
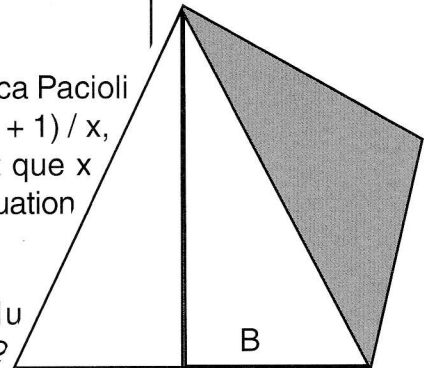
La définition de Luca Pacioli renvoie à l'équation $x = (x + 1) / x$, ou encore, en supposant que x est différent de zéro, à l'équation

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Ce trinôme du second degré admet 2 racines. La solution positive est le nombre d'or noté

$$\Phi = (1 + \sqrt{5}) / 2.$$

Une valeur approchée est 1,618034.



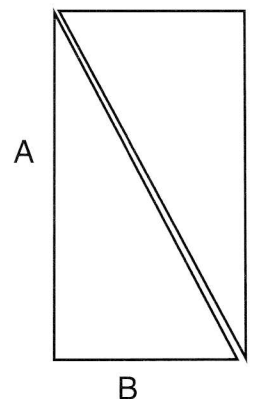
Luca Pacioli, moine et mathématicien, donne une définition du nombre d'or dans son ouvrage la "*Divine proportion*" en 1509: « Le nombre d'or est tel que si on lui ajoute l'unité et qu'on le divise par lui-même, on le retrouve ». Dans ce traité, Pacioli développe les propriétés mathématiques du nombre d'or mais aussi ses conséquences esthétiques dans les arts (architec-

On le retrouverait aussi dans l'architecture grecque. Le Parthénon, sur l'Acropole d'Athènes, aurait été construit selon cette proportion idéale.

Sa façade, fronton y compris, s'inscrit dans un rectangle d'or.

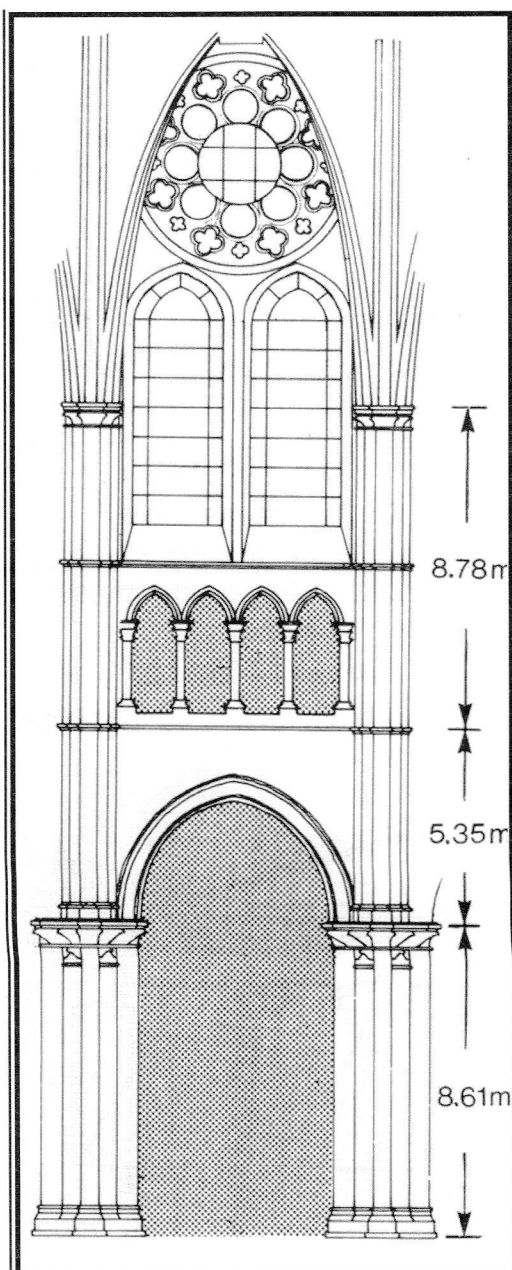
Les constructeurs de cathédrales au Moyen âge auraient aussi exploité cette ... divine proportion.

29



Le rectangle d'or

Le symbole du nombre d'or Φ (qui se prononce phi) aurait été fixé, au début du 20^e siècle, en hommage à Phidias architecte grec qui a décoré le Parthénon.



C'est sans doute **la cathédrale de Chartres** qui en présente la meilleure illustration. On y retrouve le nombre d'or aussi bien dans le plan de base que dans l'élévation de la cathédrale.

Les chapiteaux séparaient les fûts des colonnes suivant une proportion voisine du nombre d'or :

$$8,78 / 5,35 = 1,6411$$

$$8,78 + 5,35 / 8,61 = 1,64111$$

Ces proportions se devinaient

jusque dans le dessin des statues qui ornent le Portail Royal, devant la cathédrale.



Ce nombre possède de nombreuses propriétés algébriques et géométriques.

- Comme $\Phi^2 = \Phi + 1$, on obtient, quel que soit n , l'égalité :

$$\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n$$

- Φ peut aussi s'écrire comme fraction continue. Comme $\Phi = 1 + 1/\Phi$, on peut remplacer Φ par $1 + 1/\Phi$. On obtient :

$\Phi = 1 + 1/\Phi = 1 + 1/(1 + 1/\Phi) = \dots$
soit une écriture illimitée en fraction continue :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

La divine proportion

Problème : trouvez deux segments dont le rapport des longueurs soit égal au rapport des longueurs du plus grand à la somme des deux longueurs.



Soit : $A / B = (A + B) / A$

qui peu aussi s'écrire

$$A/B = A/A + B/A = 1 + B/A$$

Le rapport A/B correspond au nombre d'or, nous avons donc :

$$\Phi = 1 + 1/\Phi.$$

D'où : $\Phi - 1 = 1/\Phi$.

L'inverse du nombre d'or est égal au nombre d'or moins 1 !

On a aussi :

$$\Phi = 1 + 1/\Phi = (\Phi + 1) / \Phi$$

d'où :

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

Augmenté d'une unité, le nombre d'or est égal à son carré.

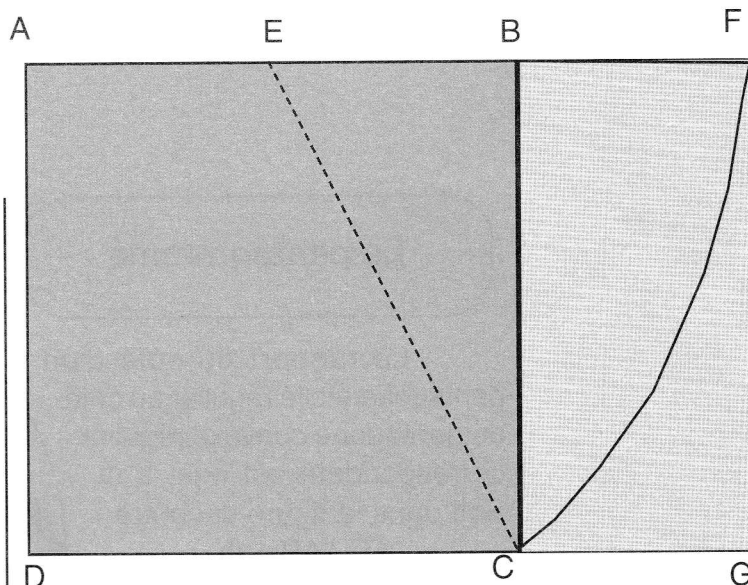
Le rectangle d'or

Problème :

Construire un rectangle qui, diminué de son plus grand carré laisse un rectangle d'or, c'est-à-dire un rectangle dont le rapport longueur/largeur soit égal au nombre d'or.

Solution :

Partez d'un carré ABCD dont le milieu de l'un des côtés soit E. Tracez l'arc de cercle de centre E et de rayon [EC]. Il coupe [AB] en F.



Le rectangle de côtés [AF] et [AD] est un rectangle d'or.

Démonstration : décidons que [AB] ait pour longueur 2 unités. Alors $EC = EF = \sqrt{5}$ unités.

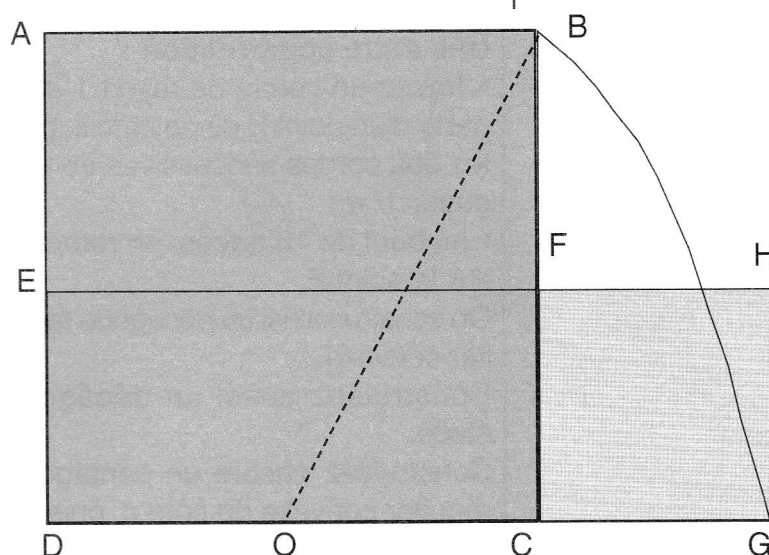
$$\text{Et } AF / GF = (AE + EF) / FG \\ = (1 + \sqrt{5}) / 2 = \Phi.$$

Le rapport AF / AB est égal au nombre d'or.

Il est tel que AB est la moyenne raison entre AF et BF.

$$AF / AB = AB / BF$$

c'est-à-dire : $AB^2 = AF \cdot BF$.



Construction d'Euclide

Soit à construire F sur BC tel que $CB / CF = \Phi$.

O est le milieu d'un côté du carré ABCD. ABFE et le carré CFGH ont même aire.

$$AB \times BF = CF^2 \text{ et } CB \times BF = CF^2.$$

On a donc bien $CB / CF = \Phi$.

Le pentagramme

Le rapport du côté d'un pentagone étoilé régulier au côté du pentagone convexe régulier correspondant est égal à Φ . Soit dans la figure ci-contre : $AC / AB = \Phi$.

Construction du pentagone régulier

- Tracez un cercle de centre O et de rayon égal à 1.
 - Tracez un diamètre [AB] ; H est le milieu de [AO].
 - [OM] est un rayon perpendiculaire à [AB] ;
 - Le cercle de centre H et de rayon HM coupe (OB) en L.
- Démontrez que $AL = \alpha$ et que $OL = 1/\alpha$.

Une autre construction :

- Tracez un cercle de rayon 1 et, à partir d'un point E de ce cercle, portez des cordes successives de longueur $1/\alpha$;
- Au bout de 10 tracés, on retombe sur le point E.

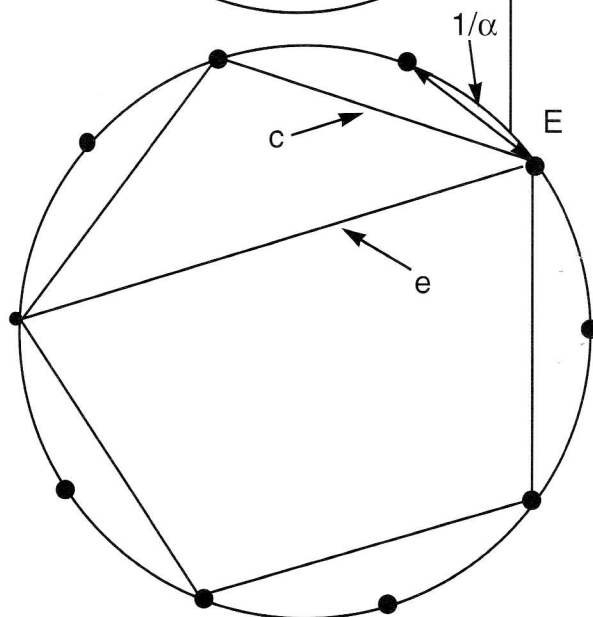
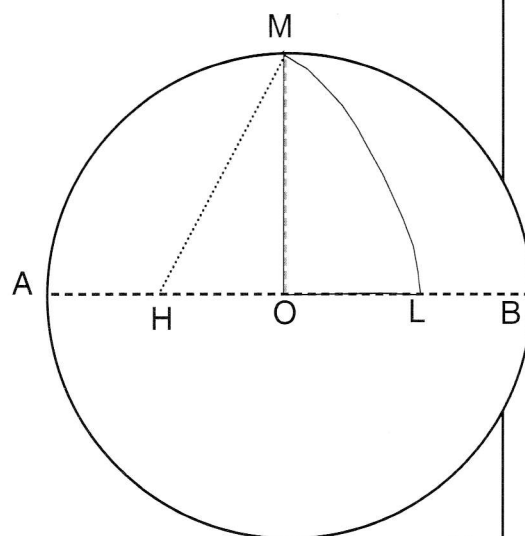
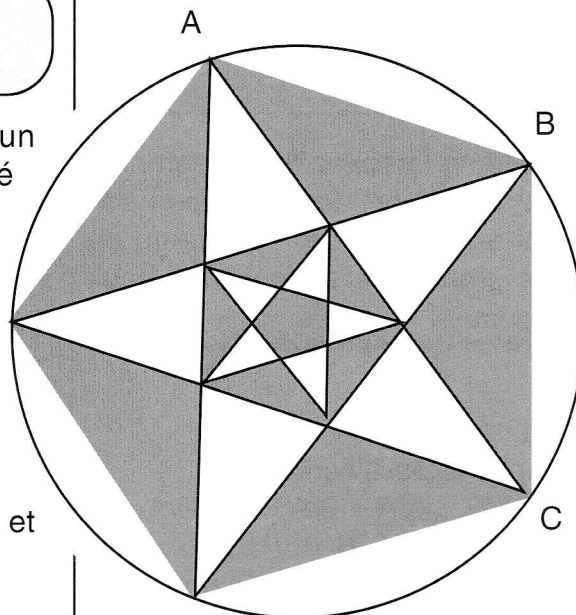
On construit ainsi un décagone régulier convexe.

Construisez aussi un décagone étoilé.

Construisez encore un pentagone régulier convexe de côté c, puis un pentagone régulier étoilé de côté e. Vous apprendrez ainsi que, pour les pentagones réguliers, on a :

$$e/c = \alpha =$$

$$\frac{\text{côté du pentagone étoilé}}{\text{côté du pentagone convexe}}$$



L'escargot d'or

Une spirale est une ligne courbe qui tourne toujours dans le même sens. Très souvent, les spirales sont constituées d'arcs de cercles successifs dont les centres et les rayons changent à chaque passage d'une zone à une autre. La plus simple est la spirale à deux centres, dont les rayons des demi-cercles successifs sont adaptés pour obtenir une ligne continue.

Les spirales d'or

On peut tracer des spirales en utilisant un rectangle ou un triangle d'or, c'est-à-dire un rectangle dont le rapport des mesures de la longueur et de la largeur est égal au nombre d'or ou un triangle isocèle dont un angle mesure 36° .

Voici un exemple de spirale d'or construite à partir de rectangles d'or.

En continuant indéfiniment ce procédé, on obtient une spirale qui converge vers un point.

On peut démontrer que cette spirale possède une longueur finie et que le point de convergence est le point de concours de deux droites perpendiculaires portant les centres des arcs de cercles. Une des deux droites est une des diagonales du premier, troisième, cinquième, ... rectangles d'or et l'autre droite est une des diagonales des autres rectangles.

Coquillages et nautilus

L'observation de coquillages ou d'escargots par leur sommet,

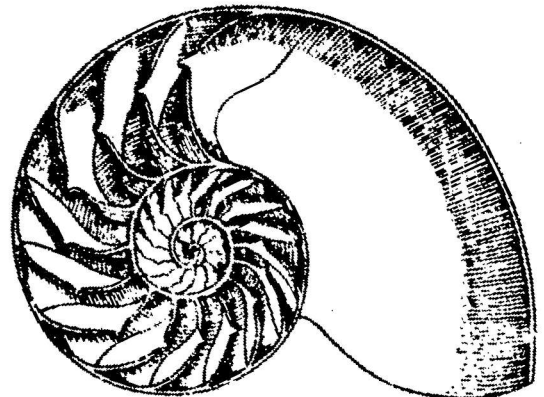
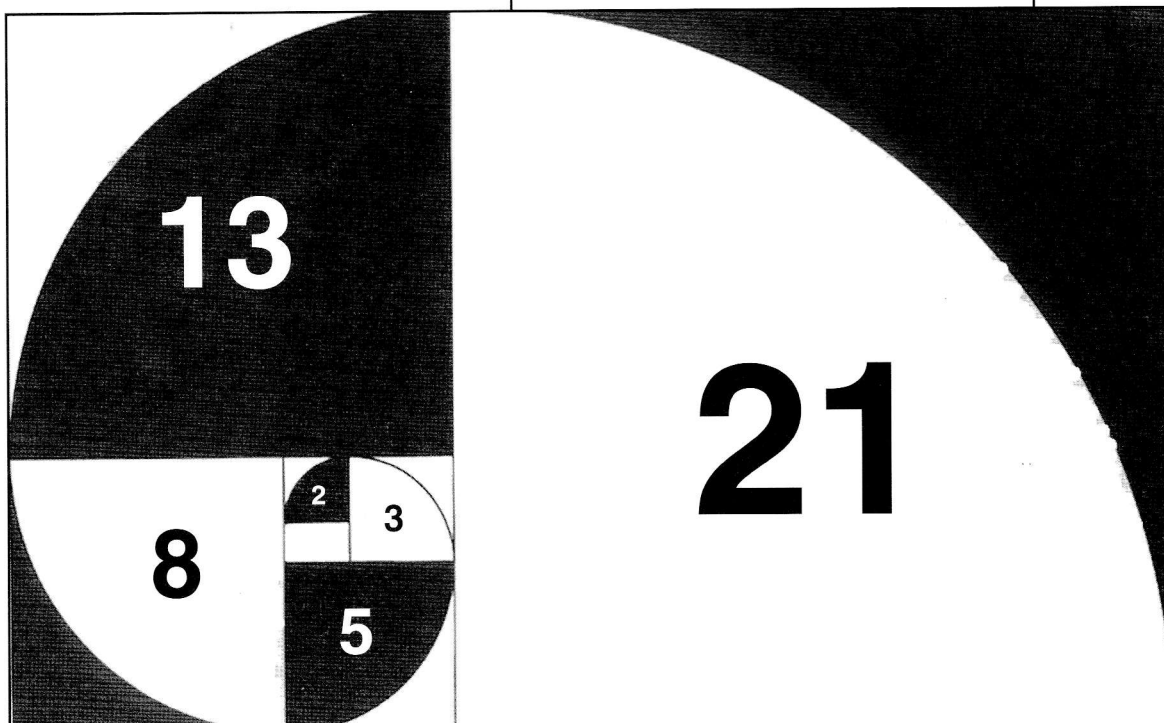
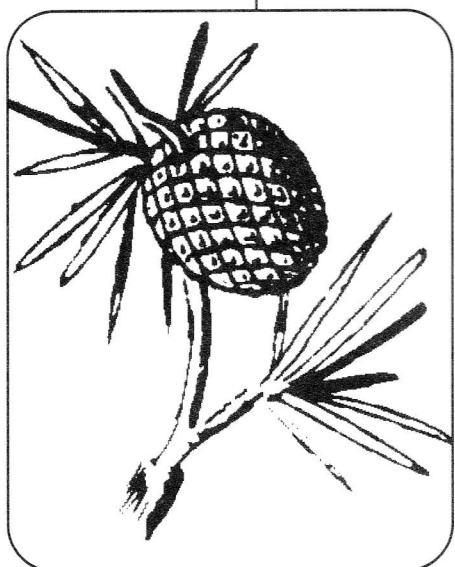


Photo d'un nautilus, coquillage fossilisé existant depuis 500 millions d'années.

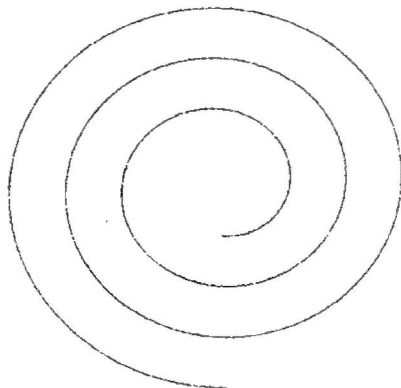


montre un enroulement, sans qu'il n'y ait en général d'axe ou de plan de symétrie. En plaçant le sommet vers le haut et l'ouverture vers soi, à droite, on peut remarquer, pour la plupart des gastéropodes de terre ou de mer, un enroulement qui se fait dans le sens des aiguilles d'une montre, selon une spirale de type logarithmique.



Quelques espèces ou quelques individus dits senestres, échappent à cette règle d'enroulement à droite, ils sont aussi rares que des trèfles à quatre feuilles. Mais on en trouve comme on trouve aussi des pins à gauche et des pins à droite ! Autrement dit, des pins qui font plus de pommes de pins qui ont plus de spirales qui tournent

à gauche et d'autres pins qui ont plus de pommes qui tournent à droite ! Étonnant non ? Et ce phénomène peut changer d'un arbre à l'autre.



D'autres spirales sont formées d'une succession d'arcs de courbes non circulaires qui peuvent avoir un même centre ou plusieurs centres.

Spirale d'Archimède

La spirale d'Archimède est obtenue en faisant varier le rayon, toujours de la même quantité quand on tourne d'un angle constant, on dit qu'il y a croissance linéaire du rayon en fonction de l'angle.

En coordonnées polaires, la spirale est la courbe représentative de la fonction décrite par la formule

$$R = m \cdot \alpha + n,$$

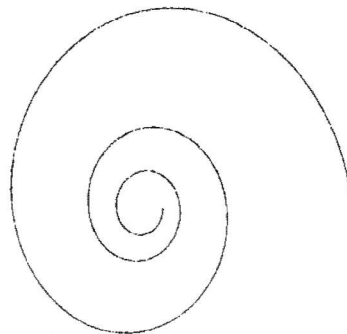
où R est le rayon, α est l'angle de rotation depuis l'origine, m est la quantité dont R augmente quand α augmente d'une unité, et n est la valeur du rayon quand α est égal à zéro.

Une bande magnétique vidéo est un exemple d'une telle spirale.

• Spirale logarithmique

Les spirales "logarithmiques" sont des spirales dont les rayons des arcs de courbes augmentent toujours dans la même proportion quand on tourne selon le même angle de rotation.

La croissance du rayon est alors exponentielle.



Descartes s'est intéressé à la spirale logarithmique ainsi que Jacques Bernoulli qui voulut la faire graver sur sa tombe. Mais le graveur s'est trompé, ce n'est pas une spirale logarithmique, "Spira Mirabilis", c'est une spirale d'Archimède qu'il traça !