RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation.

Serge Parpay.

☞ Exercices

1) Un jardinier doit faire un massif en forme d'ellipse. Il connaît l'emplacement et la longueur du grand axe AB. Le massif doit border le regard P d'une canalisation, c'est-à-dire que l'ellipse devra passer par le point P - ce point est situé à l'intérieur du cercle de diamètre AB et ne se trouve pas sur AB ni sur la médiatrice de AB.
Le jardinier dispose d'un cordeau de longueur AB terminé par deux piquets et de deux autres piquets. Dites comment il tracera son ellipse, sachant qu'il s'impose de ne pas planter de piquet à l'extérieur de la future ellipse.

Ann O'NYM

2) Tracer avec la règle et le compas un angle de 1° 30'

S. SIMPLE

3) Proposés par Jacques DROUGLAZET (Surgères) :

1- Trouver trois entiers relatifs x, y, z tels que : $x \operatorname{Arc}\tan\frac{2}{3} + y \operatorname{Arc}\tan\frac{2}{11} + z \operatorname{Arc}\tan\frac{2}{29} = \pi$

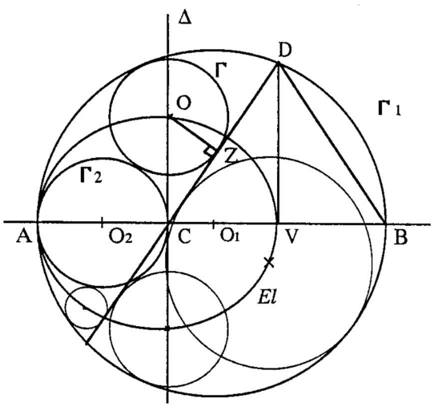
2- Montrer qu'il est impossible de trouver trois entiers relatifs x, y, z tels que : $x \operatorname{Arc}\tan\frac{1}{3} + y \operatorname{Arc}\tan\frac{1}{4} + z \operatorname{Arc}\tan\frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$.

☞ Solutions d'exercices

Problème proposé dans le Corol'aire N° 36 *(Alain Pichereau d'Angoulême)*

Enoncé

Les points A,B,C sont alignés avec C entre A et B. Les cercles Γ_1 et Γ_2 de rayons r_1 et r_2 et de centres O_1 et O_2, milieux respectifs des segments [AB] et [AC] sont donc tangents en A. On choisit D sur Γ_1 tel que le triangle (CDB) soit isocèle en D et on note V le milieu de [CB]. Enfin on note Γ le cercle de centre O tangent intérieurement à Γ_1, extérieurement à Γ_2, tangent au segment [CD] et O du même côté de (CD) que A. Montrer que O est sur la perpendiculaire Δ à (AB) passant par C.



Solution

1) Tout d'abord remarquons que le lieu des centres O des cercles tangents intérieurement à Γ_1 et tangents extérieurement à Γ_2 est une ellipse *El* de foyers O_1 et O_2 et passant par A et V : en effet si r est le rayon d'un tel cercle on a $OO_2 = r_2 + r$ et $OO_1 = r_1 - r$ soit $OO_1 + OO_2 = r_1 + r_2$. O est bien sur une ellipse de foyers O_1 et O_2.
Cette ellipse passe par A (évident) et par V car $VO_1 + VO_2 = r_1 + VO_2 - VB = r_1 + r_2$ (V est toujours à droite de O_1).
Elle est entièrement située à l'intérieur du cercle Γ_1 car si M est à l'extérieur de Γ_1 (donc de Γ_2) on a $MO_1 > r_1$ et $MO_2 > r_2$ et M ne peut être sur l'ellipse ; elle contient entièrement le cercle Γ_2 car si $M \in El$ on a $MO_2 \geq r_2$ (sinon $MO_2 < r_2$ et comme $MO_1 \leq r_1$ M ne serait pas sur *El*). Réciproquement si $O \in El$ on a $OO_2 - r_2 = r_1 - OO_1 \geq 0$ et donc le cercle Γ de centre O et de rayon cette valeur commune répond à la question.

2) Soit O le point d'intersection de l'ellipse *El* avec la droite Δ, O étant du même côté de (CD) que A. Ce point O est donc le centre d'un cercle Γ de rayon $r = OO_2 - r_2 = r_1 - OO_1$ tangent intérieurement à Γ_1 et extérieurement à Γ_2.
Par ailleurs $OO_1^2 - O_1C^2 = OO_2^2 - O_2C^2$ d'où $(r_1 - r)^2 - O_1C^2 = (r + r_2)^2 - r_2^2$.
Mais $O_1C^2 = (r_1 - 2r_2)^2$, cela que C soit à gauche ou à droite de O_1 ce qui donne $r = \dfrac{2r_2(r_1 - r_2)}{r_1 + r_2}$.

3) On va montrer maintenant que d(O,(CD)) = r. Il est clair que O se projette en un point Z situé sur [CD].
Les triangles rectangles (OZC) et (CVD) étant semblables, car angle (OCZ) = angle (CDV), on a
$\dfrac{OZ}{CV} = \dfrac{OC}{CD}$ soit $\dfrac{OZ^2}{(r_1 - r_2)^2} = \dfrac{(r_2 + r)^2 - r_2^2}{CD^2}$ puisque $2CV + 2r_2 = 2r_1$ donne $CV = r_1 - r_2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle (O_2CO). Reste à calculer $CD^2 = CV^2 + VD^2$; [VD] étant une hauteur du triangle rectangle (ADB) on a : $VD^2 = AV \times VB = (2r_1 - (r_1 - r_2))(r_1 - r_2) = r_1^2 - r_2^2$ et $CD^2 = 2r_1(r_1 - r_2)$. Finalement $OZ^2 = \dfrac{r(r + 2r_2)(r_1 - r_2)}{2r_1}$.

Mais en utilisant la valeur qui vient d'être trouvée pour r on obtient

$$r\,(r + 2r_2) = \frac{2r_2(r_1 + r_2)}{r_1 + r_2}\,2r_2\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} + 1\right) = \frac{8r_2^2 r_1(r_1 - r_2)}{(r_1 + r_2)^2} \text{ et } d^2(O, (CD)) = OZ^2 = \frac{4r_2^2(r_1 - r_2)^2}{(r_1 + r_2)^2} = r^2 .$$

Le cercle Γ défini au 2) ci-dessus est donc aussi tangent au segment [CD] .

Conclusion : il existe effectivement un cercle tangent intérieurement à Γ_1, extérieurement à Γ_2 et tangent au segment [CD] et dont le centre est du même côté de (CD) que A et sur Δ.

Remarque : Il existe uniquement quatre cercles tangents intérieurement à Γ_1, extérieurement à Γ_2 et tangents à la droite (CD) : voici les éléments d'une preuve. Si O est le centre d'un cercle vérifiant ces trois conditions et si O est du même côté de (CD) que A, alors O est non seulement sur l'ellipse *El* mais il est aussi sur deux paraboles de foyers O_1 et O_2, ayant des axes parallèles : elles se coupent donc en au plus deux points, et effectivement elles se coupent exactememt en deux points. Même raisonnement si O est du même côté de (CD) que B, d'où les quatre cercles annoncés. Parmi eux deux ont leurs centres sur Δ et sont symétriques par rapport à [AB], l'un étant le cercle Γ dont il a été question plus haut. Enfin, toujours parmi ces quatre cercles, il y en a deux qui sont tangents en fait au segment [CD], le cercle Γ et le cercle dont le centre est du même côté de (CD) que B et pas sur Δ : voir figure.