RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc de faire des erreurs de transcription, et économisera beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation .

☞ Solutions d'exercices

1) Pour matheux superstitieux :

Dans une année civile, combien y-a-t-il de "vendredi 13" au plus ? Combien y en a-t-il au moins ? Combien y en a-t-il en moyenne ? (on supposera pour simplifier que toutes les années dont le millésime est divisible par 4 sont bissextiles).

Jean-Christophe LAUGIER (Rochefort)

Solution de Jean-Christophe LAUGIER

Numérotons les jours de la semaine de 0 (lundi) à 6 (dimanche).
Considérons une année quelconque et soit x ($0 \leq x \leq 6$) le numéro du jour du 13 janvier. Le tableau ci-dessous indique (modulo 7) les numéros des jours du 13 de chaque mois.

Année	13 janv	13 fev	13 mar	13 avri	13 mai	13 juin	13 juil	13 aou	13 sept	13 oct	13 nov	13 déc
- non bissextile	x	x + 3	x + 3	x + 6	x + 1	x + 4	x + 6	x + 2	x + 5	x	x + 3	x + 5
- bissextile	x	x + 3	x + 4	x	x + 2	x + 5	x	x + 3	x + 6	x + 1	x + 4	x + 6

On voit donc qu'une année quelconque, bissextile ou non, peut comporter au maximum 3 "vendredis 13" et au minimum 1 "vendredi 13".

Plus précisément :
- les années non bissextiles comportant 3 "vendredis 13" exactement sont les années telles que x + 3 = 4 (modulo 7), soit x = 1. Ce sont donc les années telles que le 13 janvier tombe un mardi,
- les années non bissextiles comportant 2 "vendredis 13" exactement sont les années telles que x = 4 (modulo 7) ou x + 6 = 4 (modulo 7) ou x + 5 = 4 (modulo 7) soit x = 4 (modulo 7) ou x = 5 (modulo 7) ou x = 6 (modulo 7). Ce sont donc les années telles que le 13 janvier tombe un vendredi, un samedi ou un dimanche,
- les années non bissextiles comportant 1"vendredi 13" exactement sont les années telles que x + 1 = 4 (modulo 7) ou x + 2 = 4 (modulo 7) ou x + 4 = 4 (modulo 7) soit x = 3 (modulo 7) ou x = 2 (modulo 7) ou x = 0 (modulo 7). Ce sont donc les années telles que le 13 janvier tombe un jeudi, un mercredi ou un lundi.

On peut résumer ce qui précède dans le tableau ci-dessous.

jour du 13 janvier (année non bissextile)	nombre de "vendredi 13"
lundi, mercredi, jeudi	1
vendredi, samedi, dimanche	2
mardi	3

Dans le cas d'une année bissextile, une étude analogue à la précédente conduit au tableau ci-dessous

jour du 13 janvier (année bissextile)	nombre de "vendredi 13"
mercredi, jeudi , dimancher	1
lundi, mardi, samedi	2
vendredi	3

Considérons à présent la variable aléatoire X égale au nombre de "vendredis 13" d'une année choisie au hasard. D'après ce qui précède, X prend les valeurs 1, 2, 3. Déterminons la loi de X. On remarque tout d'abord que pour une année bissextile, de même que pour une année non bissextile, le 13 janvier peut être chacun des jours de la semaine avec une probabilité 1/7. Ce résultat qui peut paraître évident mérite d'être démontré (vois annexe).
Ce fait étant admis, l'examen des deux tableaux précédents fournit immédiatement :
P(X = 1) = 3/7 , P(X = 2) = 3/7, P(X = 3) = 1/7. D'où E(X) = 3/7 x 1 + 3/7 x 2 + 1/7 x 3 = **12/7 ≈ 1,7**
Si l'on est très superstitieux, il faut donc prévoir de rester calfeutré chez soi en moyennne 1,7 jour par an !

ANNEXE :

Appelons J(n) le numéro du jour du 13 janvier de l'année n. L'examen du calendrier de l'année 1996 nous apprend que le 13 janvier était un samedi donc J(1996) = 5. J(n) vérifie la relation de récurrence suivante :
J(n + 1) = J(n) + 1 si n ≠ 0 (modulo 4), J(n + 1) = J(n) + 2 si n = 0 (modulo 4).
On a donc J(n + 4) = J(n) + 5 pour tout n et par suite J(n + 4k) = J(n) + 5k pour tous n, k.
k étant donné, 4k est une période de la suite (J(n)) si et seulement si 5k = 0 modulo 7, soit k = 0 modulo 7.
On a donc J(n + 28) = J(n). 28 est donc une période de la suite (J(n)) et il n'est pas difficile de prouver que c'est la plus petite.
Le tableau ci dessous donne les valeurs de J(n) sur l'intervalle période [1996 ; 2023] :

n	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
J(n)	5	0	1	2	3	5	6	0	1	3	4	5	6	1
n	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
J(n)	2	3	4	6	0	1	2	4	5	6	0	2	3	4

Il apparaît que sur cet intervalle période, J(n) prend exactement 4 fois chacune des valeurs 0, 1, ... 6 et sur l'ensemble {1996 ; 2000 ; 2004 ; 2008 ; 2012 ; 2016 ; 2020} elle prend exactment 1 fois chacune des valeurs 0, 1, ... 6.
Cela prouve bien que pour une année bissextile, de même que pour une année non bissextile, le 13 janvier peut être chacun des jours de la semaine avec une probabilité 1/7.

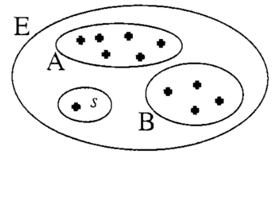
2) p et q étant supérieurs ou égaux à 3, démontrer l'égalité :
$C^3_{p+q-1} - (C^3_p + C^3_q) = (q-1)\, C^2_p + (p-1)\, C^2_q - (p-1)(q-1)$ (si possible "sans faire de calculs".).

N.D.L.R. : nous donnons ci-dessous les trois solutions reçues, qui montrent comment approcher le problème de différentes façons, et qui contiennent des résultats pouvant être exploités "à part" comme thèmes d'exercices.

Solution de Jacques DROUGLAZET (Surgères)

1) Lemme : $C^2_{p+q-1} = C^2_p + C^2_q + (p-1)(q-1)$.

Démonstration : (il sera fait usage de la relation $C^{p+1}_{n+1} = C^{p+1}_n + C^p_n$ liée au triangle de Pascal.)
Un ensemble E de p+q-1 éléments peut être décomposé en 3 sous-ensembles disjoints, respectivment A de p-1 éléments, B de q-1 éléments, et le singleton {s}.



C^2_{p+q-1} représente le nombre de possibilités de prendre une paire d'éléments dans E ; pour cela on peut :
- prendre 2 éléments dans A : C^2_{p-1} possibilités,

- prendre 2 éléments dans B : C^2_{q-1} possibilités,

- prendre 1 élément dans A et le singleton {s} ou 1 élément dans B et le singleton {s} : $C^1_{p-1} + C^1_{q-1}$ possibilités,
- prendre 1 élément dans A et 1 élément dans B : (p-1)(q-1) possibilités.

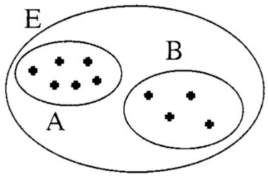
On a donc : $C^2_{p+q-1} = C^2_{p-1} + C^2_{q-1} + C^1_{p-1} + C^1_{q-1} + (p-1)(q-1) = C^2_p + C^2_q + (p-1)(q-1)$ c.q.f.d.

2) Théorème :

Pour p et q supérieurs ou égaux à 3, on a $C^3_{p+q-1} - (C^3_p + C^3_q) = (q-1)\, C^2_p + (p-1)\, C^2_q - (p-1)(q-1)$.

Pour démontrer cette relation on peut l'écrire : $C^3_{p+q-1} + C^2_p + C^2_q + (p-1)(q-1) = q\, C^2_p + p\, C^2_q + C^3_p + C^3_q$ (1)

Démonstration :



Un ensemble E de p+q éléments peut être décomposé en 2 sous-ensembles disjoints, respectivement A de p éléments et B de q éléments. D'après le lemme, le premier membre de la relation (1) est égal à $C^3_{p+q-1} + C^2_{p+q-1}$, c'est-à-dire C^3_{p+q}, donc égal au nombre de possibilités de prendre 3 éléments distincts dans E, ce que l'on peut faire

- en prenant 2 éléments distincts dans A que l'on associe à un élément de B : $q\, C^2_p$ possibilités,
- en prenant 2 éléments distincts dans B que l'on associe à un élément de A : $p\, C^2_q$ possibilités,
- en prenant 3 éléments distincts dans A et dans B : $C^3_p + C^3_q$ possibilités.

On peut donc écrire : $C^3_{p+q} = q\, C^2_p + p\, C^2_q + C^3_p + C^3_q$, ce qui démontre le théorème.

Solution d'Alain PICHEREAU (Angoulême)

Quels que soient les entiers p et q supérieurs ou égaux à 3 on a :

(1) $C^3_{p+q-1} = C^3_{p-1} + C^3_{q-1} + C^2_{p-1} + (q-1)\, C^2_{p-1} + C^2_{q-1} + (p-1)\, C^2_{q-1} + (p-1)(q-1)$.

(2) $C^3_{p+q-1} - (C^3_p + C^3_q) = (q-1)\, C^2_{p-1} + (p-1)\, C^2_{q-1} + (p-1)(q-1)$.

(3) $C^3_{p+q-1} - (C^3_p + C^3_q) = (q-1)\, C^2_p + (p-1)\, C^2_q - (p-1)(q-1)$.

Preuve : On considère une urne contenant p-1 boules Vertes, 1 boule Blanche, q - 1 boules Rouges. Les C^3_{p+q-1} tirages de 3 boules dans cette urne se répartissent en 7 familles disjointes : 3V, 3R, 2V et 1B, 2V et 1R, 2R et 1B, 2R et 1V, 1V et 1B et 1R, ce qui donne la formule (1). En utilisant deux fois la relation $C^{p-1}_n + C^p_n = C^p_{n+1}$ on obtient la relation (2), laquelle peut être aussi obtenue par un raisonnement combinatoire.

Pour cela intéressons nous au nombre N de tirages de 3 boules dans cette même urne, mais en excluant les tirages constitués de 3 boules vertes ou blanche et ceux constitués de 3 boules rouges ou blanche ; ces deux familles de tirages défavorables sont évidemmment disjointes, d'effectifs respectifs C^3_p, C^3_q et donc $N = C^3_{p+q-1} - (C^3_p + C^3_q)$.

Mais on peut évaluer N en remarquant que parmi les 7 familles constituant tous les tirages possibles (voir plus haut) seules les 3 suivantes sont favorables : 2V et 1R, 2R et 1V, 1V et 1B et 1R, d'où (puisque ces familles sont disjointes)

$N = (q-1)C^2_{p-1} + (p-1)\, C^2_{q-1} + (p-1)(q-1)$ et compte tenu de la valeur précédente de N on obtient (2).

Une troisième façon d'évaluer N consiste à remarquer que ces trois familles disjointes de cas favorables sont en fait la réunion de seulement deux familles : 2 boules vertes ou blanche et 1 rouge, 2 boules rouges ou blanche et 1 verte, ces deux familles ayant pour intersection les tirages constitués de 1V et 1B et 1R ce qui donne $N = (q-1)\, C^2_p + (p-1)\, C^2_q - (p-1)(q-1)$, et compte tenu de la première écriture de N on obtient (3).

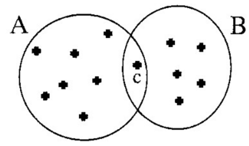
Solution de Pierre CHEVRIER (Niort)

Des démonstrations :

1) Par le calcul : en utilisant $C^3_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ et $C^2_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Pour obtenir cette égalité "sans faire de calculs", on essaie, bien sûr, d'utiliser deux méthodes permettant de dénombrer certains éléments correspondant à une situation.

2) <u>Première situation</u> (situation analogue à celle qui permet d'obtenir la formule de Pascal : $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$).



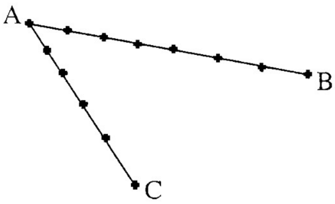
On considère l'ensemble E réunion de deux ensembles A et B tels que Card A = p , Card B = q, et A ∩ B est un singleton {c}.

E a (p+q-1) éléments. Il y a, par conséquent, C_{p+q-1}^3 parties formées de 3 éléments de E.

Parmi celles-ci, il y en a C_p^3 qui contiennent 3 éléments de A, C_q^3 qui contiennent 3 éléments de B, $(q-1)\ C_p^2$ qui contiennent 1 élément de B et 2 éléments de A, $(p-1)\ C_q^2$ qui contiennent 1 élément de A et 2 éléments de B, et il n'y en a pas d'autres.

Les parties constituées de l'élément c, d'un autre élément de A et d'un autre élément de B sont comptées deux fois (parmi celles qui contiennent un élément de A , deux de B et parmi celles qui contiennent un élément de B, deux de A) . D'où le résultat.

3) <u>Deuxième situation</u> :

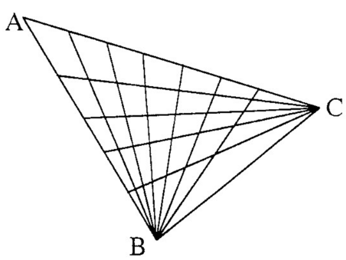


On considère trois points A, B, C non alignés, p points sur le segment [AB] (y compris A et B), q points sur le segment [AC] (y compris A et C). On dénombre de deux manières différentes les "vrais" triangles dont les sommets sont trois de ces points.

<u>1ère manière</u> : on enlève au nombre de parties de trois points (C_{p+q-1}^3), le nombre de parties formées de trois points alignés sur [AB] ou [AC] ($C_p^3 + C_q^3$).

<u>2ème manière</u> : on compte les triangles formés de deux points de [AB] et d'un point de [AC] autre que A : il y en a $C_p^2 \times (q-1)$; ceux formés de deux points de [AC] et d'un point de [AB] autre que A : il y en a ($C_q^2 \times (p-1)$; les $(p-1)(q-1)$ triangles ayant pour sommet A, un point de]AB], un point de]AC] font partie des deux catégories précédentes. D'où le résultat.

4) <u>Troisième situation</u> :



On considère trois points A, B, C non alignés. On trace les segments joignant C à p points de [AB] (y compris A et B) et les segments joignant B à q points de [AC] (y compris A et C). On dénombre de deux manières différentes les "vrais" triangles tracés.

<u>1ère manière</u> : un "vrai" triangle tracé est déterminé par trois segments non concourants en B ou C. Il y a C_{p+q-1}^3 façons de choisir trois segments. Parmi celles-ci, il y en a C_p^3 pour lesquelles les segments sont concourants en C, et C_q^3 pour lesquelles les segments sont concourants en B. Il y a donc ($C_{p+q-1}^3 - C_p^3 - C_q^3$) "vrais" triangles tracés.

<u>2ème manière</u> : Tout triangle a B ou C pour sommet. $C_q^2 \times (p-1)$ "vrais" triangles ont B pour sommet, $C_p^2 \times (q-1)$ ont C pour sommet. Dans chacune de ces deux catégories, on a compté ceux ayant B et C pour sommets, au nombre de (p-1)(q-1). Le nombre de "vrais" triangles tracés est donc $C_q^2 \times (p-1) + C_p^2 \times (q-1) - (p-1)(q-1)$.

☞ Un exercice du baccalauréat (Amérique du SUD, 1991).

Pour chacun des résultats demandés, on donnera une expression exacte et non une valeur approchée.
Le code antivol d'un autoradio est une suite de quatre chiffres choisis parmi : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 (par exemple : 1196 ; 0852).
1° On cherche à trouver ce code en testant successivement des suites de quatre chiffres (ces essais sont supposés indépendants).

a) Quelle est la probabilité pour que le code soit trouvé :
. au premier essai ?
. exactement au quatrième essai ?

b) Quelle est la probabilité pour que le code n'ait pas été trouvé au bout de vingt essais (nombre maximum d'essais prévus par le constructeur) ?

2° Calculer la probabilité pour que le code utilise deux chiffres distincts et deux seulement (par exemple 1311 ; 4224).