

UN PUZZLE : du triangle équilatéral au carré

(exercice n°9 du Rallye mathématique Poitou-Charentes 1999)

Les pièces doivent seulement être déplacées dans le plan (dans le cas d'un retournement le découpage peut être réduit à cinq pièces). Voici les différentes étapes du découpage. Les constructions peuvent se faire à la règle et au compas (construction de la médiatrice d'un segment, construction d'un angle droit connaissant un de ses côtés).

Soit le triangle équilatéral ABC de côté $2c$, le milieu B' de $[AB]$ et le milieu C' de $[AC]$ (figure 1).

Première étape : soit D le pied de la perpendiculaire abaissée de B' sur $[BC]$ et E le pied de la perpendiculaire abaissée de C' sur $[BC]$. On coupe le triangle suivant les segments $[B'D]$ et $[C'E]$.

Première "transformation" : La rotation de 180° autour de B' du triangle $B'D$ et la rotation de 180° autour de C' du triangle $C'E$ permettent de "transformer" le triangle ABC en le rectangle DEFG (figure 2).

Détermination du côté n du carré de même aire :

On doit avoir $l \times m = n^2$. On porte sur une même droite deux segments, $[IH]$ et $[HJ]$, de longueurs respectives $l = DE$ et $m = EF$. On trace le demi-cercle de diamètre $[IJ]$. La perpendiculaire à $[IJ]$ en H coupe le demi-cercle en K ; alors $HK = n$ (propriété dans

un triangle rectangle), (figure 3). Remarque : $n = c \sqrt[4]{3}$.

Deuxième étape : On trace sur le côté $[GD]$ du rectangle le point M tel que $GM = n$ et sur le côté $[EF]$ le point N tel que $EN = n$. (figure 4). La perpendiculaire en M à $[GD]$ coupe le segment $[DN]$ en P. Le rectangle DEFG se trouve ainsi partagé en six "pièces".

Deuxième "transformation" : la translation de vecteur \overrightarrow{DN} amène le triangle DMP en le triangle FNQ et la translation de vecteur \overrightarrow{DP} amène le triangle DEN en le triangle PQR (figure 5). Le quadrilatère GQRM est le carré cherché.

Serge PARPAY.

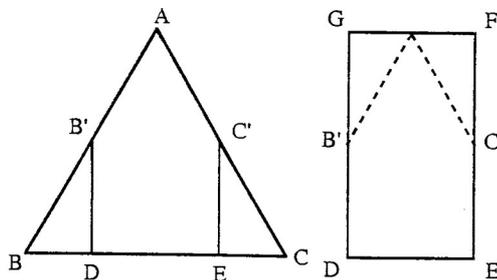


Figure 1

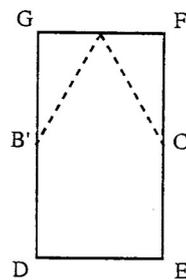


Figure 2

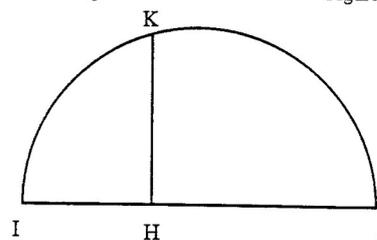


Figure 3

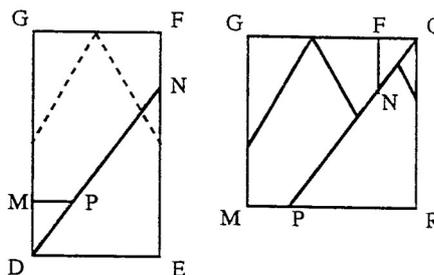


Figure 4

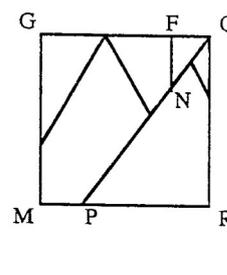


Figure 5