

RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES 1999 - Éléments de solutions

1 Un peu plié ! (5 points)

Les plis proposés donnaient un pliage unique, ce qui n'est pas toujours le cas.
Les deux lettres restant apparentes étaient D et J.

2 Parents d'élèves. (10 points)

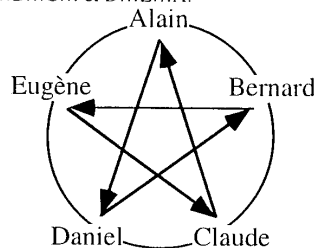
A a voté pour qui a voté pour B, le voisin de gauche d'Alain. On écrit pour simplifier : A...B. On aura de même : B...C, C...D, D...E et E...A.

Si on "condense" ces "expressions", on a : A...B...C...D...E...A.

On coupe l'expression précédente en deux parties : A...B...C... et D...E...A.

On déplace la seconde vers la première de façon à ce que les lettres D, E et A et les lettres B et C viennent occuper la place des pointillés. On aboutit ainsi à la nouvelle expression A D B E C A, qui indique les votes : A a voté pour D, D pour B, B pour E, E pour C et C pour A.

Remarque : avec un nombre impair de votants et les mêmes caractéristiques de vote, la méthode ci-dessus s'applique.



3 La comptine. (15 points)

Laurent commence sa comptine par le camarade situé à sa droite et veut éliminer le camarade situé à sa gauche. S'il y a n camarades en jeu : en k tours avec une comptine de k x n syllabes, il arriverait à lui-même ; avec une comptine de k x n - 1, par contre, il arrivera au camarade sur sa gauche et ainsi l'éliminera.

Donc, le nombre de syllabes sera de la forme K - 1, K étant un multiple de 6, de 5, de 4, de 3 et de 2, puisqu'il y aura successivement en jeu 6, 5, 4, 3 et 2 camarades (Laurent compris). Le plus petit multiple de ces cinq nombres étant 60, la plus petite valeur possible de K est alors 60 et le nombre de syllabes de la comptine est 59.

Remarque : Laurent peut obtenir le même résultat en enlevant la contrainte : "éliminer son camarade de gauche", mais plus rapidement !, avec une comptine de 7 syllabes, en commençant toujours par le camarade situé à sa droite, (respectivement à sa gauche).

7 Sécurité. (5 points)

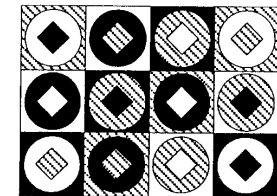
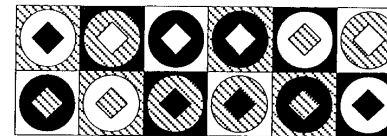
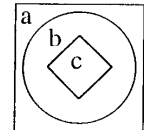
Le reste de la division du nombre de la carte de Germaine par 97 étant 11, la clé est égale à $97 - 11 = 86$.

Le nombre N de la carte d'Edgar sera de la forme 1 46 08 79 191 07X. Il commence en effet par 1 (codage pour les hommes) et finit par un treizième chiffre X que l'on doit déterminer. La clé du numéro étant 71 le reste de la division de N par 97 sera nécessairement 26 [$97 - 26 = 71$]. La division du nombre 146087919107 par 97 étant 70, le reste de la division de 70X par 97 doit être 26. Par suite, le chiffre X est un 5.

Le numéro de sécurité sociale cherché est donc 1 46 08 79 191 075.

6 Patchwork. (10 points)

Il y a 3 couleurs possibles pour la zone a ; Il n'y en a plus que 2 pour la zone b et encore 2 pour la zone c. Il y a donc $3 \times 2 \times 2 = 12$ carrés de tissu différents. On peut donc les disposer suivant un rectangle de 3×4 ou 2×6 . Pour que deux zones adjacentes ne soient pas de la même couleur, 3 étant premier avec 2 et 4, il suffit de disposer les carrés en permutant régulièrement les trois couleurs de fond sur les bandes de longueur 4 ou 2, comme le montrent les deux exemples suivants.



8 Un nombre remarquable ? (10 points)

Le nombre n est soit pair soit impair ; on ne peut le savoir à priori !

Si le nombre n est pair alors il est de la forme $n = 2m$. Sa moitié est m et le nombre entier précédant m est $m - 1$. On a alors, d'après l'énoncé, $2m - 1000 = m - 1$.

D'où $m = 999$ et, dans ce cas, $n = 1998$.

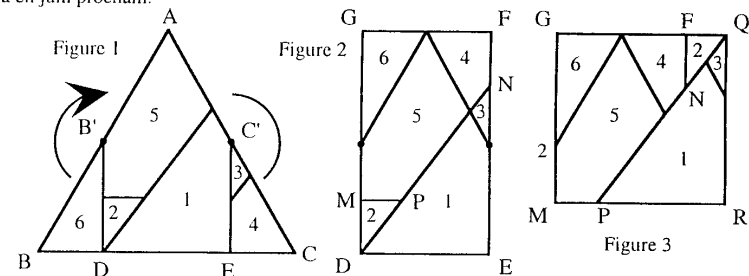
Si le nombre n est impair, il est alors de la forme $2m + 1$. Sa moitié est $m + 1/2$ et le nombre entier précédent est m. Ainsi d'après l'énoncé, $2m + 1 - 1000 = m$.

D'où $m = 999$ et, dans ce cas, $n = 1999$.

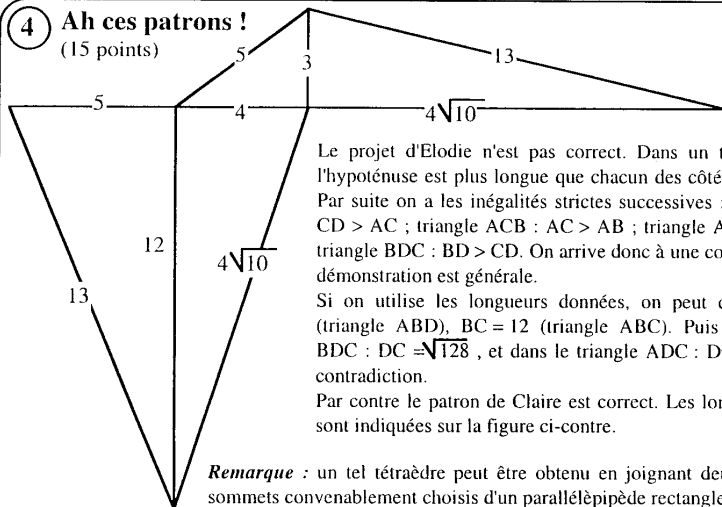
Lequel des deux nombres est le plus remarquable ? 1998 ou 1999 ?

9 Puzzle. (15 points)

Voici la disposition des pièces : un triangle équilatéral, un rectangle (non demandé) et le carré. La construction et la démonstration de l'égalité des aires seront données dans le Corollaire n° 37 qui paraîtra en juin prochain.



4 Ah ces patrons ! (15 points)



Le projet d'Elodie n'est pas correct. Dans un triangle rectangle l'hypoténuse est plus longue que chacun des côtés de l'angle droit. Par suite on a les inégalités strictes successives : triangle ADC : $CD > AC$; triangle ACB : $AC > AB$; triangle ABD : $AB > BD$; triangle BDC : $BD > CD$. On arrive donc à une contradiction. Cette démonstration est générale.

Si on utilise les longueurs données, on peut calculer $AB = 5$ (triangle ABD), $BC = 12$ (triangle ABC). Puis dans le triangle BDC : $DC = \sqrt{128}$, et dans le triangle ADC : $DC = \sqrt{160}$. D'où la contradiction.

Par contre le patron de Claire est correct. Les longueurs des côtés sont indiquées sur la figure ci-contre.

Remarque : un tel tétraèdre peut être obtenu en joignant deux à deux quatre sommets convenablement choisis d'un parallélépipède rectangle.

5 Mathieu et Mathias. (15 points)

Voici la fleur très Math(ématique) de Math(ieu) et de Math(ias). La partie rouge (cœur et pétale) est composée de six triangles équilatéraux $\mathcal{C}$ et de six demi-disques $\mathcal{D}$. La surface totale (rouge et verte) est elle-même composée de six triangles équilatéraux $\mathcal{C}'$ et de six demi-disques $\mathcal{D}'$. Il suffit donc de calculer l'aire de chacun de ces éléments de base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. L'aire verte sera obtenue par différence de ces deux aires.

1ère méthode : $\mathcal{B} = \mathcal{C} + \mathcal{D} = 4\sqrt{3} + 2\pi = 2(2\sqrt{3} + \pi)$

On calcule $\mathcal{B}'$ comme précédemment. Les mesures du côté et de la hauteur du triangle équilatéral sont portées sur le dessin.

2ème méthode :

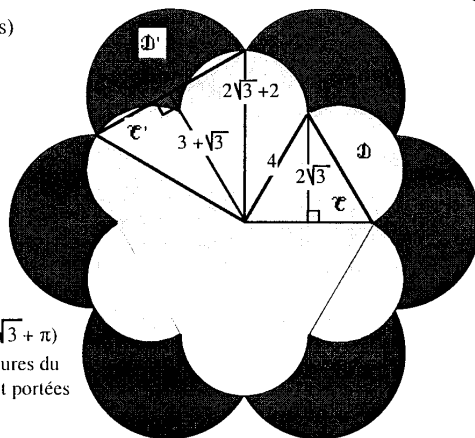
On peut remarquer qu'on obtient $\mathcal{B}'$ en multipliant les dimensions de $\mathcal{B}$ par $k = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

On obtient donc $\mathcal{B}'$ à partir de $\mathcal{B}$ en multipliant par $k^2 = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{4} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a donc $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathcal{B} + \mathcal{B} \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, $\mathcal{B}' - \mathcal{B} = \mathcal{B} \frac{\sqrt{3}}{2}$, et $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

L'aire verte est donc plus petite que l'aire rouge.

L'aire rouge est $12(2\sqrt{3} + \pi)$. L'aire verte est $12(2\sqrt{3} + \pi) \frac{\sqrt{3}}{2} = 6(6 + \pi\sqrt{3})$



10 vacances en famille (10 points)

Family holidays.

Familien in Ferien.

Vacaciones en familia.

Prénoms	Lieu d'habitation	Lieu de vacances
Edward, Louise	London	Brighton
Donald, Dorothy	//	Italy
Andrew, Mary	//	Australia
Günter, Franziska	Berlin	Hambourg
Dieter, Doris	//	Italien
Anton, Marie	//	Australien
Gustav, Paquita	Murcia	Almeria
Domingo, Dolorés	//	Italia
Andrés, María	//	Australia

Compléments pour la classe de Seconde

11 MathAS. (10 points)

Soit n le nombre des candidats de chacun des trois lycées. Le tableau ci-dessous permet de résoudre le problème :

	Lycée Ramic	Lycée Mafor	Lycée Lulose	autres établissements
Candidats	n	n	n	$2\,085 - 3n$
Réussite	65 %	30 %	40 %	8 %
Reçus (300)	$0,65 n$	$0,30 n$	$0,40 n$	$0,08 (2\,085 - 3n)$
soit ($n = 120$)*	78	36	48	138

* Calcul de n : le total des reçus étant 300,

on a : $0,65 n + 0,30 n + 0,40 n + 0,08 (2\,085 - 3n) = 300$.

12 Cochons vendus. (15 points)

Soit n le nombre de cochons à vendre. Appelons $A(p)$ le nombre de cochons vendus au p -ième client et $R(p)$ le nombre de cochons restant après cette p -ième vente.

On aura $R(0) = n$ (par convention) et $R(5) = 0$ (la vente est terminée au cinquième client).

$A(p) = R(p-1) / 2 + p$ et $R(p) = R(p-1) / 2 - p$.

On a successivement : $R(0) = n$; $R(1) = n/2 - 1$; $R(2) = n/4 - 5/2$; $R(3) = n/8 - 17/4$;

$R(4) = n/16 - 49/8$; $R(5) = n/32 - 129/16$.

Comme $R(5) = 0$, $n = 258$. Les ventes successives sont : 130, 66, 34, 18 et 10.