RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc lde faire des erreurs de transcription et économisera beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation .

Daniel DAVIAUD, Jacques DROUGLAZET, Alain PICHEREAU et Pierre CHEVRIER ont envoyé des énoncés et des corrigés qui seront publiés dans le prochain Corol'aire, celui-ci étant très chargé. *S. Parpay.*

☞ Exercices

Voici deux exercices proposés par deux collègues que nous avons eu le plaisir de rencontrer lors des Assises Académiques des Mathématiques du 2 avril dans l'Atelier "Allumaths" :

1) Pour matheux superstitieux :
Dans une année civile, combien y-a-t-il de vendredis 13 au plus ? Combien y en a-t-il au moins ? Combien y en a-t-il en moyenne ? (on supposera pour simplifier que toutes les années dont le millésime est divisible par 4 sont bissextiles).
Jean-Christophe LAUGIER (Rochefort)

N.D.L.R. : ce problème avait été proposé dans un précédent Corol'aire ; nous publierons dans le prochain numéro la solution de notre collègue.

2) Un beau calcul de volume :
On se place dans l'espace muni d'un repère habituel ...
(B_0) est une surface (bornée) dans le plan d'équation $Z = 0$. H est un réel strictement positif. a et b sont deux réels.
r est la rotation d'axe (z z') et d'angle θ (dans $[-\pi ; \pi]$). h est la translation de vecteur (0,0,H). d est la translation de vecteur (a,b,0) .
A tout point M_0 de (B_0) on associe $M_H = d(h(r(M_0)))$ et, pour tout t de $[0 ; H]$, M_t l'intersection de $[M_0 ; M_H]$ avec le plan d'équation $Z = t$.
(B_t) est l'ensemble des M_t pour M_0 décrivant (B_0).
(S) est le solide formé des M_t... (S est donc un prisme auquel on a fait subir une torsion...)
A_0 est l'aire de (B_0) et de (B_H) et A_t celle de (B_t). V_θ est le volume de (S) (V_0 est donc le volume avant la torsion).
Calculer V_θ en fonction de V_0 et de θ.
Hubert BAYET (Rochefort)

Rectificatif : Corol'aire n° 36 page 9 : dans la solution du "Problème des religieuses", il fallait lire bien entendu : "Le total des personnes dans les **8** cellules..." "... le total des présents dans les **8** cellules ..."

☞ De notre collègue Jacques MAROT (Melle) :

Une propriété étonnante de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d.$

Appliquons la formule de Taylor en $x_0 = \frac{-b}{3a}$, là où f" s'annule et où f' admet pour valeur extrémale : $-\frac{b^2 - 3ac}{3a}$ obtenue en examinant la forme canonique de f' : $f'(x) = 3a\,x^2 + 2\,bx + c = 3a\,(x^2 + \frac{b}{3a})^2 - \frac{\Delta}{3a}$, où l'on a posé $\Delta = b^2 - 3\,ac$.

Si Δ est positif

$$f\left(\frac{-b + 2\cos\alpha\sqrt{\Delta}}{3a}\right) = f\left(\frac{-b}{3a}\right) - \frac{\Delta}{3a} \times \frac{2\cos\alpha\sqrt{\Delta}}{3a} + a\left(\frac{2\cos\alpha\sqrt{\Delta}}{3a}\right)^3 ;$$

$$f\left(\frac{-b + 2\cos\alpha\sqrt{\Delta}}{3a}\right) = f\left(\frac{-b}{3a}\right) + \frac{2\sqrt{\Delta}^3}{27a^2}\,(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$$

$$f\left(\frac{-b + 2\cos\alpha\sqrt{\Delta}}{3a}\right) = f\left(\frac{-b}{3a}\right) + \frac{2\sqrt{\Delta}^3}{27a^2}\,\cos 3\alpha$$

Cette dernière formule explique donc qu'en plaçant l'origine d'un repère orthonormé en $I\,(\frac{-b}{3a} ; f(\frac{-b}{3a}))$, il suffit de tracer deux cercles centrés en I et de rayons : $r_1 = \frac{2\sqrt{\Delta}}{3a}$ et $r_2 = \frac{2\sqrt{\Delta}^3}{27a^2}$ pour obtenir géométriquement des points de la cubique de coordonnées $(r_1\cos\alpha ; r_2\cos 3\alpha)$; r_1 est le double de la valeur absolue des abscisses, dans le repère d'origine I, des sommets de la cubique ; r_2 est la valeur absolue de l'ordonnée de ces sommets. Ceci fournit un procédé de construction à la règle et au compas de tous les points d'une cubique dont l'ordonnée est comprise entre celle des sommets, et ceci rien que par la donnée de son centre de symétrie et d'un de ses sommets. En fait notre cubique est une courbe de Lissajous particulière.

Si Δ est négatif

On a alors la formule : $f\left(\frac{-b + 2\sinh \alpha\sqrt{-\Delta}}{3a}\right) = f\left(\frac{-b}{3a}\right) + 2\,\frac{(\sqrt{|\Delta|})^3}{27a^2}\sinh 3\alpha$.

Ma règle et mon compas ne me sont alors d'aucun secours pour obtenir les points de la courbe représentative de f, mais cette dernière formule m'offre l'unique solution de f(x) = 0. En effet en posant $\alpha = -\frac{1}{3}\,\text{Argsinh}\left(\frac{27a^2 f(\frac{-b}{3a})}{2(\sqrt{|\Delta|})^3}\right)$ la racine réelle unique de notre équation est : $\frac{-b - 2\sinh\left(\frac{1}{3}\,\text{Argsinh}\left(\frac{27a^2 f(\frac{-b}{3a})}{2\sqrt{-\Delta}^3}\right)\right)}{3a}$ *aisément programmable sur les calculatrices ayant les fonctions hyperboliques.* On peut vérifier qu'elle s'exprime à l'aide de radicaux (racine cubique dans $\mathbb{R}$) en tenant compte de : $\text{Argsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$. Cette formule devient très simple lorsque le cœfficient b ou c est nul.

☞ Solutions d'exercices :

Exercice proposé dans le n° 36 :

Peut-on trouver deux nombres m et n (entiers naturels*) tels que : $\begin{cases} m^{17} + n^{17} = 232632643127370 & (1) \\ m^{13} - n^{13} = 96887416084 & (2) \end{cases}$?

*N.D.L.R. : 1) * Il aurait fallu le préciser dans l'énoncé : le contexte n'était pas ambigu dans le fascicule APMEP d'où est tiré l'exercice.*

2)Le nombre donné dans le second membre de l'égalité (1) est bien celui de l'exercice original.

Une solution :

D'après (2), $n < m$, et donc, d'après (1), $m^{17} \leq m^{17} + n^{17} < 10^{17}$. Par suite $n < m < 10$ (3)

On a alors, modulo 10 : $m^{17} \equiv m$; $n^{17} \equiv n$; $m^{13} \equiv m$; $n^{13} \equiv n$. (4)

D'après (1) , (2) et (4) , on a, modulo 10 :

$\begin{cases} m + n \equiv 0 & (1') \\ m - n \equiv 4 & (2') \end{cases}$ Les seuls nombres vérifiant (3), (1') et (2') sont $m = 7$, $n = 3$.

Portons ces valeurs dans (1) et (2) : $7^{17} + 3^{17} = 232630643127370$; $7^{13} - 3^{13} = 96887416084$.

Par suite, avec m = 7 et n = 3, (1) n'est pas vérifiée. Le problème donné n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.

Remarque : par contre il existe bien un couple unique de nombres naturels vérifiant :

$\begin{cases} m^{17} + n^{17} = 232630643127370 \\ m^{13} - n^{13} = 96887416084 \end{cases}$ à savoir : m = 7 , n = 3 .

Autre solution reçue de Jacques DROUGLAZET (Surgères)

L.B.