RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc les erreurs de transcription et nous ferait économiser beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation . S. Parpay.

☞ Exercices

1) Un exercice proposé par Jacques Drouglazet (Surgères) :
On désigne par a_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) les racines autres que 1 de l'équation $z^7 - 1 = 0$.

Démontrer la relation : $$\sum_{i=1}^{6} \int_0^{a_i} \frac{z^n}{z^3+1}\, dz = 0. \qquad (n = 0, 1, 2).$$

2) Exercices proposés par l'équipe des professeurs de mathématiques du Lycée Jean Macé de Niort :

a) Peut-on trouver deux nombres m et n tels que : $m^{17} + n^{17} = 232632643127370$ et $m^{13} - n^{13} = 96887416084$
(Analyse et synthèse . Georges Glaeser . APMEP n°76)

b) Démontrer la relation $C^3_{p+q-1} - (C^3_p + C^3_q) = (q-1)C^2_p + (p-1)C^2_q - (p-1)(q-1)$, si possible "sans faire de calculs".

c) Pavage : Soit un "échiquier" (8 x 8) dont une des cases est noire, les 63 autres étant blanches et des "triminos" constitués de trois carrés juxtaposés "en équerre" et pouvant recouvrir exactement trois cases de l'échiquier. Montrer que l'on peut recouvrir les 63 cases blanches de l'échiquier avec 21 de ces triminos quelle que soit la case noire choisie. Peut-on trouver d'autres "échiquiers" (n, n) avec lesquels on peut faire le même type de pavage, une des cases étant noire et les autres blanches ?

☞ Solutions d'exercices

Exercice proposé dans le supplément au n° 34 de novembre 1998 (page 4) :

Des religieuses sont retirées en huit cellules disposées de telle manière qu'il y en a quatre dans les quatre coins du dortoir bâti en carré, et chacune des quatre autres est au milieu due chaque côté. L'Abbesse qu'on suppose aveugle, fait la visite : elle compte le nombre de religieuses qui sont dans les trois cellules d'un rang ; elle trouve que le nombre de religieuses d'un rang est égal à celui de chaque autre rang, en prenant pour rang deux cellules de coin et celle du milieu. Cette abbesse fait une seconde visite et compte dans chaque rang le même nombre de personnes que dans la première visite, quoiqu'il y soit entré quatre hommes. Enfin dans la troisième visite qu'elle fait, elle trouve encore dans chaque rang le même nombre de personnes qu'auparavant, quoique les quatre hommes soient sortis, et qu'ils aient emmené chacun une religieuse.

Les solutions données par M. Ozanam sont symétriques en a, b, c et d.
On peut généraliser le problème.
Soit s le nombre total de personnes comptées dans chacune des quatre rangées, s étant imposé au départ.
Soit a, b, c et d le nombre de personnes dans les cellules de coin. La répartition des personnes se présente ainsi :

d	s - (c + d)	c
s - (d + a)		s - (b + c)
a	s - (a + b)	b

avec les conditions : $a + b \leq s$; $b + c \leq s$; $c + d \leq s$; $a + d \leq s$. (1)

Le total de personnes dans les 9 cellules est : $t = 4s - (a + b + c + d)$. En respectant les conditions (1), on peut donc faire varier le total des présents dans les 9 cellules en modifiant la somme $(a + b + c + d)$.
Le nombre maximum de présents correspond au cas : a, b, c et d tous nuls.
Le nombre minimum de personnes, compte tenu des conditions (1), correspond au cas $a + b + c + d = 2s$ et donc à $t = 2s$. Seules les cellules de coin peuvent être occupées et on a : $a = c$ et $b = d$; par exemple : $a = s$, $b = 0$, $c = s$ et $d = 0$; ou , si s est pair, $a = b = c = d = s/2$.
L. B.