RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc les erreurs de transcription et nous ferait économiser beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation .

Serge Parpay.

☞ Exercices

Deux exercices proposés par Jacques Drouglazet (Surgères) :

1) Former une équation algébrique à coefficients entiers admettant le nombre $2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 3\,i\sqrt{7}$ pour racine ($i^2 = -1$).

2) On pose $a = \cos\frac{2\pi}{7}$, puis $b = \dfrac{1 + 2\cos^3\frac{3\pi}{7}}{\left(3 - \cos\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{5\pi}{7}\right)^2}$. Exprimer b sous forme de polynome en a.

☞ Exercices

* Dans son livre **Math'festival** (Bibliothèque Pour la science, Diffusion Belin), Martin Gardner pose le problème : "Est-il possible de construire un polyèdre plein convexe irrégulier qui soit instable sur toutes les faces ?". (Questions ridicules mais amusantes n°2 page 79). La réponse est 'non' et il en donne une raison physique simple (page 82). Pouvez-vous donner à ce problème une forme plus "mathématique" et le résoudre ?

S.P.

* **"Sujet type Bac mathématiques " de M.A. Mouillade donné dans le bulletin APMEP n° 238 (1960).**

1) Démontrer que si deux fractions irréductibles ont pour somme 1 elles ont même dénominateur.

2) Soit $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{d}$ deux fractions irréductibles telles que $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{d}\right)^2 = 1$. Démontrer que l'un des deux nombres a et b est multiple de 4 et que l'un de ces nombres est multiple de 3.

* **Petit exercice :**

Soit un parallélépipède rectangle ABCDA'B'C'D' de faces les rectangles ABCD, A'B'C'D', ABB'A', BCC'B', CDD'C' et DAA'D'.

1) Connaissant les aires p, q et r des faces ABB'A', BCC'B' et ABCD, trouver le volume V du parallèlépipède.

2) Connaissant les longueurs a, b et c des diagonales des faces ABB'A', BCC'B' et ABCD, calculer le volume V du parallélépipède (on examinera les conditions à remplir par a,b,c pour que le problème soit possible).

3) Remarque : Proposer un raisonnement géométrique rapide prouvant que le cas $a = 3$, $b = 4$ et $c = 5$ est exclu.

☞ Citation

"L'intelligence en mathématique. Alain CONNES.

J'éprouve une certaine réticence à parler d'intelligence, car j'ai toujours considéré les mathématiques comme une école quotidienne d'humilité. Je me méfie lorsqu'un mathématicien se vante de ses succès sans mentionner ses échecs. En revanche, je saisis volontiers l'occasion de parler de mathématiques et de la difficulté qu'il y a à décrire de l'extérieur l'activité du mathématicien : l'employée de maison d'un mathématicien célèbre, interrogée sur l'activité de celui-ci, répondit qu'il passait son temps, dans son bureau, à écrire sur des bouts de papier qu'il jetait ensuite consciencieusement à la poubelle. L'activité du mathématicien pose ainsi un problème spécifique qui a trait à la nature de la réalité mathématique..."

(Extrait d'un article de Pour La Science n° 254, décembre 1998, - excellent numéro centré sur le thème "L'intelligence", et dont nous conseillons la lecture).

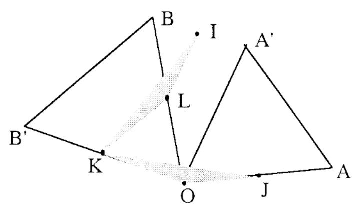
☞ Solutions d'exercices

* Exercice proposé dans le Corol'aire 32

Soit un triangle A'B'C' image d'un triangle ABC dans une rotation d'angle $\pi/3$, M le milieu de [CB'], N le milieu de [AC'] et P le milieu de [BA']. Montrer que le triangle MNP est équilatéral .

Solution de R.BECZKOWSKY de Chalon sur Saône

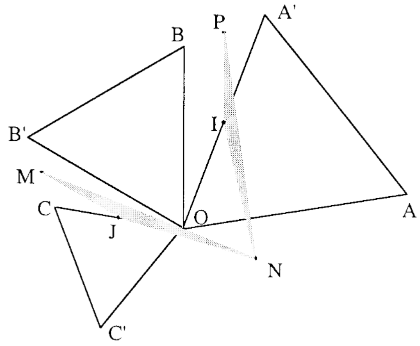
1) Rotation de deux points A et B de $\frac{\pi}{3}$ autour de O.



Les images sont A' et B'. Les points I, J, K et L sont les milieux de [A'B], [OA], [OB'] et [OB]. Par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{3}$ le triangle KOJ devient KLI ; en effet, KOL est équi-latéral et $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OA}$ devient $\overrightarrow{LI} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OA'}$.

Le triangle IJK est donc équilatéral.

2) Rotation de trois points A, B et C de $\frac{\pi}{3}$ autour de O.



Les notations sont celles de l'énoncé. Les points I et J sont les milieux de [OA'] et [OC]. D'après 1), INJ est équilatéral.

$\vec{IP} = \frac{1}{2}\,\vec{OB}$ et $\vec{JM} = \frac{1}{2}\,\vec{OB'}$.

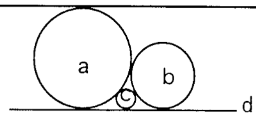
La rotation de centre N et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie NIP sur NJM.

Le triangle MNP est équilatéral.

Beaucoup diront que le deuxième cas d'égalité des triangles aurait fait aussi bien.

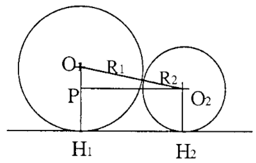
*** 1er exercice japonais proposé dans le Corol'aire n°34**

Les cercles a, b, c sont tangents deux à deux et tangents à la droite d. Trouver une relation entre les rayons des trois cercles.



Solution de Jacques Drouglazet de Surgères.

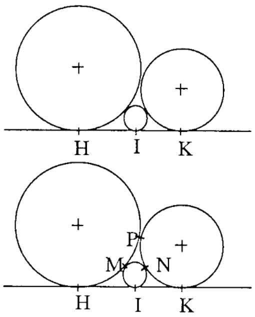
Théorème préliminaire :



Le triangle O_1PO_2 rectangle nous donne :

$$H_1H_2^{\,2} = PO_2^{\,2} = (R_1 + R_2)^2 - (R_1 - R_2)^2 = 4\,R_1R_2\,.$$

Appliquons cela aux cercles de l'énoncé.



H, I et K étant les points de contact des cercles a, c et b avec la droite d,

HK = HI + IK implique $2\sqrt{R_a\,R_b} = 2\sqrt{R_a\,R_c} + 2\sqrt{R_b\,R_c}$

que l'on peut écrire $\sqrt{R_c}\,(\sqrt{R_a} + \sqrt{R_b}) = \sqrt{R_a}\,\sqrt{R_b}$.

Soit P le point de contact des cercles a et b, M celui des cercles a et c et N celui des cercles b et c. On pourrait démontrer assez facilement que les points I,K,P,M sont cocycliques ainsi que les points I,H,P,N et que les deux cercles obtenus sont orthogonaux.