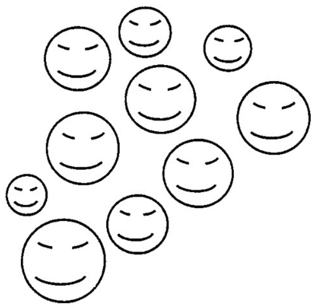
# MATHS 2000

## EXERCICES ET PROBLEMES POUR LA CLASSE.

*2000 : année des mathématiques. Notre régionale de l'APMEP travaille depuis un an à concrétiser ce label. Ainsi au début de l'année vous pourrez, avec vos élèves, aller visiter à Poitiers et à La Rochelle une exposition : MATHS 2000. Nous vous proposons donc, pendant un an, une nouvelle rubrique consacrée à des exercices et problèmes directement branchés sur les thèmes de l'exposition.*
***La Rubrique "Histoire des symboles" est seulement mise entre parenthèses !***



## La plus petite aire (Jean-Paul Guichard)

*Le thème 9 de l'exposition vous permettra de découvrir le monde merveilleux des mathématiques savonneuses.*
*Vous êtes-vous demandé un jour pourquoi les bulles de savon ont la forme de sphères ? Eh bien c'est parce que, parmi toutes les surfaces qui emprisonnent un même volume d'air, la sphère est celle d'aire minimale. Pourquoi ? Parce que le film de savon, doué d'élasticité, emmagasine une énergie d'autant plus grande que son aire est grande. La bulle flottant dans l'air est en équilibre, donc son énergie est minimum, donc son aire également.*
*Mais parmi toutes les surfaces enfermant le même volume, la sphère est-elle bien celle qui possède la plus petite aire ?*

**Problème** : *on cherche parmi tous les solides qui ont un volume de 48 cm$^3$ celui qui a la plus petite aire.*

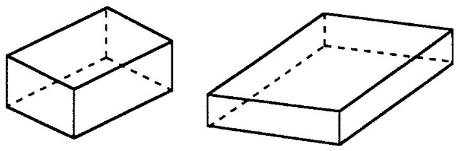
### 1. Les pavés

☞ À partir de la **6ème**

1) Trouve tous les pavés qui ont un volume de 48 cm$^3$, et dont les arêtes ont pour longueur un nombre entier de cm.
Classe-les de la plus grande aire à la plus petite.
Quelle remarque peux-tu faire sur le pavé qui a la plus petite aire.
2) Trouvez un cube dont le volume soit le plus près possible de 48 cm$^3$.
*Défi à la classe avec affichage des résultats, amélioration...*
3) Pourquoi n'y a-t-il qu'un cube de 48 cm$^3$ de volume ?
Donne un encadrement de la longueur de son arête qui assure que son volume soit égal à 48 cm$^3$ au millième près. Donne alors le meilleur encadrement de son aire.

☞ À partir de la **3ème**

**Pavés de 48 cm$^3$ de volume dont la base a une aire donnée.**



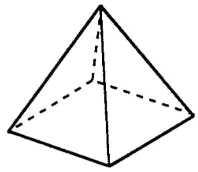
a) Exprimer la hauteur h des pavés de volume 48 cm$^3$ en fonction de l'aire de la base B.
Etudier comment varie cette hauteur à l'aide d'un tableau ou d'un graphique. Faire des remarques sur cette variation.
b) On fixe l'aire de la base à 20 cm$^2$. Que dire de sa hauteur ?
On voudrait savoir, parmi tous les pavés dont la base a pour aire 20 cm$^2$, celui qui a la plus petite aire. Pour cela on appelle x et y la largeur et la longueur du rectangle de base.
Exprimer l'aire A des pavés en fonction de x et y.
Expliquer pourquoi l'aire de cette famille de pavés est la plus petite possible quand x + y est le plus petit possible, c'est-à-dire quand le rectangle de base a le plus petit périmètre possible.
Etudier comment varie le périmètre de la base en fonction des valeurs données à x, et trouver la valeur de x pour laquelle ce périmètre est minimum.
Que peut-on dire du pavé dont l'aire est la plus petite ? Calculer cette aire.
Cette remarque est-elle vraie pour n'importe quelle valeur donnée à B ? Exprimer cette aire minimale en fonction de B.
*(Variante : on peut faire exprimer d'emblée l'aire A en fonction de x, et étudier A(x).)*

**Pavés de 48 cm$^3$ de volume dont la base est un carré**

Exprimer l'aire A des pavés en fonction du côté a de la base.
Etudier comment varie l'aire A en fonction de la longueur a.
En déduire que, parmi tous les pavés de volume 48 cm$^3$, il en existe un d'aire minimale : le décrire.

## 2. Les pyramides régulières à base carrée.

☞ À partir de la 4$^{\text{ème}}$

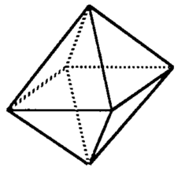


1) Combien y a-t-il de pyramides régulières de volume 48 cm$^3$, à base carrée, la longueur du côté de la base étant un nombre entier ?
2) Calcule l'aire de la pyramide dans les 3 cas suivants : quand l'aire de la base vaut 36 cm$^2$, puis 16 cm$^2$, puis 9 cm$^2$. Puis classe-les par aire décroissante : quelle remarque peux-tu faire ?

☞ À partir de la 3$^{\text{ème}}$

3) Parmi toutes les pyramides de base carrée et de volume 48 cm$^3$, celle qui a toutes ses arêtes de même longueur est-elle celle qui a la surface la plus petite ?

☞ À partir de la **1ère**



4) Etudier comment varie l'aire A d'une pyramide à base carrée de 48 cm$^3$ de volume en fonction du côté a de la base. En déduire que, parmi toutes ces pyramides, il en existe une d'aire minimale : la décrire. *(On peut faire une étude analogue avec les octaèdres réguliers : c'est plus simple!)*

**La sphère**

☞ À partir de la 3$^{\text{ème}}$

Pourquoi n'y a-t-il qu'une sphère de 48 cm$^3$ de volume ?
Donne un encadrement de son aire à 0,1 cm$^2$ près.
Compare pour 3 solides de formes différentes et de volume 48 cm$^3$ leur aire avec celle de la sphère que tu viens de calculer.

**Remarque**

On peut faire une étude analogue avec les figures planes qui enferment une aire de 48 cm$^2$, en cherchant celles de plus petit périmètre : rectangles, carré, cercle, hexagone, octogone, triangles (base donnée, puis isocèles : par le calcul littéral cela fait de belles dérivées, de belles équations, on voit l'intérêt des fonctions racines...).