# Histoire des symboles. Le saviez-vous ? Par Jean-Paul Guichard
# (XV) A PROPOS DE FONCTIONS

Les débutants en analyse ont-ils le droit de parler comme Cauchy ? Cauchy serait-il de nos jours un bon élève de second cycle ? Pas si sûr... A vous de juger.

### *La définition d'une fonction.*

"Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles, que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles , qui prend alors le nom de *variable indépendante*; et les autres quantités, exprimées au moyen de la variable indépendante, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de cette variable.

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles, que , les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes les autres , on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, qui prennent alors le nom de *variables indépendantes*; et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des *fonctions* de ces mêmes variables. Les diverses expressions que fournissent l'algèbre et la trigonométrie, lorsqu'elles renferment des variables considérées comme indépendantes, sont autant de fonctions de ces variables.

Ainsi , par exemple , L (x), sin x, &c... sont des fonctions de la variable x; $x + y$, $x^y$, xyz, . . .des fonctions des variables x et y, ou x, y et z; &c. . ."

### *Les extremums*

"Lorsqu'une valeur particulière de la fonction f(x) surpasse toutes les valeurs voisines , c'est-à-dire , toutes celles qu'on obtiendrait en faisant varier x en plus ou en moins d'une quantité très-petite, cette valeur particulière de la fonction est ce qu'on appelle un *maximum*.

Lorsqu'une valeur particulière de la fonction f (x) est inférieure à toutes les valeurs voisines, elle prend le nom de *minimum*."

/.../

"La fonction $x^2+px+q$ , dont la dérivée est 2x + p, obtient, pour $x = -\frac{1}{2}p$, la valeur *minimum* $q-\frac{1}{4}p^2$ ; ce qu'on vérifie aisément, en mettant la fonction donnée sous la forme $\left(x+\frac{1}{2}p\right)^2+q-\frac{1}{4}p^2$ ."

### *Fonction continue*

"Lorsque, la fonction f (x) admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence f (x + i ) - f ( x ), i étant une quantité infiniment petite, est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite , on dit que f (x) est *fonction continue* de la variable x entre les limites dont il s'agit."

/.../

" Lorsque la fonction y = f (x) reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même."

### *Limite*

On nomme quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. On appelle au contraire quantité *constante* toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra , cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones réguliers inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus; et le rayon vecteur, mené du centre d'une hyperbole à un point de la courbe qui s'éloigne de plus en plus de ce centre, forme avec l'axe des x un angle qui a pour limite l'angle formé par l'asymptote avec le même axe; &c... Nous indiquerons la limite vers laquelle converge une variable donnée par l'abréviation lim. placée devant cette variable.

### *Dérivée*

"Lorsque la fonction y = f (x) reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors $\Delta x = i$ , les deux termes du *rapport aux différences* $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite , lorsqu'elle existe , a une valeur déterminée, pour chaque valeur particulière de x ; mais elle varie avec x. Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x) = x^m$ , m désignant un nombre entier, le rapport entre les différences infiniment petites sera $\frac{(x+i)^m-x^m}{i}=mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}i+...+i^{m-1}$ et il aura pour limite la quantité $mx^{m-1}$ , c'est-à-dire, une nouvelle fonction de la variable x. Il en sera de même en général; seulement, la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonction proposée y = f(x). Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée* et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation y' ou f' (x ) ."

Eh oui ! C'est ainsi que s'exprimait Cauchy en 1823 dans ses leçons données à l'Ecole Polytechnique : Monsieur Augustin-Louis Cauchy, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'Ecole royale Polytechnique, Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'honneur...

Une lecture néanmoins vivement recommandée :

CAUCHY. Résumé des leçons sur le Calcul Infinitésimal. Chez Ellipses (1994).