RU - BRI - COL'AGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

les collègues peuvent transmettre, en plus de la copie papier, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc les erreurs de transcription et nous ferait économiser beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation .

Serge Parpay.

☞ Solutions d'exercices

Exercice proposé dans le Corol'aire 32 : **Tout entier impair non divisible par 5 a un multiple dont l'écriture ne comporte que des 1 .**

Une solution de cet exercice a été donnée dans le Corol'aire n° 33.. Alain Pichereau (Angoulême) nous donne la solution ci-dessous :

Si le résultat est évident pour 1, pour 3 (3 x 37 = 111), pour 7 (7 x 15873 = 111111), pour 9 (9 x 12345679 = 111111111), il l'est beaucoup moins pour un entier à peine plus grand, comme 17.

Tout repose sur la propriété suivante, notée (***P***) : Si $a \in \{1 ; 3 ; 7 ; 9\}$ alors les chiffres des unités des 9 nombres a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, 9a sont (à l'ordre près) exactement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Convenons que si a et b sont deux entiers, $\boxed{ab}$ désignera l'entier $10^k a + b$ (où k est le nombre de chiffres de b), c'est-à-dire la "juxtaposition de a et de b". Par ailleurs $\boxed{a21}$ désignera 100 a + 21 et $\boxed{021} = 21$.

Soit N un nombre impair non divisible par 5, c'est-à-dire se terminant par 1, 3, 7, 9 et constitué de p chiffres ($p \geq 1$). D'après (***P***) il existe (un seul) $y_1 \in \{1;2;...;9\}$ tel que Ny_1 se termine par 1 : $Ny_1 = \boxed{b_1 1}$ avec b_1 entier de au plus p chiffres. Soit u le chiffre des unités de N, u_1 le chiffre des unités de b_1. Toujours d'après (***P***), il existe $y_2 \in \{0; 1; 2;...; 9\}$ tel que $uy_2 + u_1$ se termine par 1, d'où $N\boxed{y_2\, y_1} = \boxed{b_2 11}$ avec b_2 entier de au plus p chiffres [en effet $N\boxed{y_2\, y_1} = Ny_1 + 10Ny_2 = 10b_1 + 1 + 10Ny_2 = 10(Ny_2 + b_1) + 1$ et $Ny_2 + b_1$ se termine par 1]. Remarquons que y_2 peut être nul, cela uniquement si b_1 se termine par 1 (c'est-à-dire la multiplication par y_1 a apporté au moins deux 1) et dans ce cas $\boxed{y_2 y_1} = y_1$ mais il faut "garder" y_2 car évidemment y_3 peut être non nul.

De même il existe un seul $y_3 \in \{0; 1; 2;...; 9\}$ tel que $uy_3 + u_2$ se termine par 1, u_2 étant le chiffre des unités de b_2 et donc $N\boxed{y_3 y_2 y_1} = \boxed{b_2 111}$, b_3 entier de au plus p chiffres ; etc (ou récurrence, ...).

On définit ainsi deux suites (y_n) et (b_n) pour $n \in \mathbb{N}^*$, telles que $\forall n \geq 1$ $y_n \in \{0; 1; 2; ... ; 9\}$ et $N\boxed{y_n ... y_2 y_1} = \boxed{b_n 11...1}$ (n fois 1) , b_n entier de au plus p chiffres (pouvant être nul).

Exemples :

1) N = 3 ; N x 7 = 21; N x 37 = 111; N x 037 = 1111; N x 7037 = 21111; N x 37037 = 111111
($b_1 = 2$) ($b_2 = 1$) ($b_3 = 0$) ($b_4 = 2$) ($b_5 = 1$)

2) N = 137; N x 3 = 411 ; N x 03 = 411 ; N x 103 = 14111 ; N x 1103 = 151111 ; N x 81103 = 11111111
($b_1 = 41$) ($b_2 = 4$) ($b_3 = 14$) ($b_4 = 15$) ($b_5 = 111$)

3) N = 17 ; N x 3 = 51 ; N x 83 = 1411 ; N x 183 = 3111 ; ensuite... ?

4) N = 67 ; N x 3 = 201 ; N x 33 = 2211 ; N x 733 = 49111 ; voir réponse dans la remarque 2) ci après.

Montrons maintenant que tout entier N, choisi comme indiqué plus haut, admet un multiple dont l'écriture ne comporte que des 1.

$b_1, b_2, ..., b_{10^p+1}$ sont 10^p+1 entiers de au plus p chiffres, donc deux sont égaux, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers i et j tels $1 \leq i < j \leq 10^p+1$ et $N\boxed{y_i ... y_2 y_1} = \boxed{b11...1}$ (i fois 1), $N\boxed{y_j ... y_2 y_1} = \boxed{b11...1}$ (j fois 1). On en déduit que $N\boxed{y_j ... y_2 y_1} = \boxed{b11...1} \times 10^{j-i} + 11...1$ [respectivement i fois 1 et (j-i) fois 1], soit $N\boxed{y_j ... y_2 y_1} \times 10^{j-i} + 11...1$ [(j-i) fois 1] et donc N divise un entier dont l'écriture ne comporte que des 1.

C.Q.F.D.

Remarques :

1) On peut vérifier qu'il existe $k \leq j - i \leq 10^p$ tel que $N\overline{y_k \ldots y_2 y_1} = 11\ldots1$, [(j-1) fois1] c'est-à-dire que la suite (b_n) a au moins un terme b_k constitué seulement de 1 avec $k \leq 10^p$; et si k est le plus petit entier tel que b_k ne comporte que des 1 alors $N\overline{y_k \ldots y_2 y_1}$ est le plus petit des multiples de N qui ne comporte que des 1.

2) Et pour les curieux : (calcul fait avec DERIVE).

17 x 65359477124183 est le plus petit multiple de 17 ne comportant que des 1 (il y en a 16) ;

67 x 1658374792703150912106135986733 est le plus petit multiple de 67 ne comportant que des 1 (il y en a 33).

Exercice proposé dans le Corol'aire N°32 : **Soit un triangle A'B'C' image d'un triangle ABC dans une rotation d'angle $\pi/3$, M le milieu de [CB'], N le milieu de [AC'] et P le milieu de [BA']. Montrer que le triangle MNP est équilatéral.**

Solution d'Alain Pichereau :

Prenons comme origine du repère le centre de la rotation r telle que r(A) = A', r(B) = B' et r(C) = C'.

En posant $u = e^{i\pi/3}$, $z_{A'} = z_A\, u$, $z_{B'} = z_B\, u$, $z_{C'} = z_C\, u$.

Il vient $z_M = (z_C + z_B\, u)/2$, $z_N = (z_A + z_C\, u)/2$, $z_P = (z_B + z_A\, u)/2$

$$\frac{z_M - z_N}{z_P - z_N} = \frac{-z_A + z_B u + z_C(1 - u)}{z_A(u - 1) + z_B - z_C u} = \frac{-z_A + z_B u - z_C u^2}{z_A u^2 + z_B - z_C u} = u$$

(puisque $u^2 = u - 1$ et $u^3 = -1$), ce qui prouve immédiatment le résultat.

Remarque : $z_M + z_N + z_P = \dfrac{\frac{z_A + z_B + z_C}{3} + \frac{z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{3}}{2}$ et donc le centre de gravité du triangle MNP est le milieu des centres de gravité des triangles ABC et A'B'C', cela même si A'B'C' n'est pas l'image de ABC par rotation.

N.D.L.R. : le lecteur est invité à trouver une démonstration de géométrie utilisant les transformations. S.P

☞ **Exercice** proposé par Jacques Drouglazet (Surgères) :

On désigne par a, b, c les racines de l'équation : $20x^3 - 31x^2 + 11x - 1 = 0$ et par P(x) la fonction polynomiale : $41691\, x^3 - 1315\, x^2 + 46\, x + 1$.

Démontrer les formules :

$$\int_0^a \frac{1}{x^3+x+1}\,dx + \int_0^b \frac{1}{x^3+x+1}\,dx + \int_0^c \frac{1}{x^3+x+1}\,dx = \int_0^{0,05} \frac{43-101x}{P(x)}\,dx$$

$$\int_0^a \frac{x}{x^3+x+1}\,dx + \int_0^b \frac{x}{x^3+x+1}\,dx + \int_0^c \frac{x}{x^3+x+1}\,dx = \int_0^{0,05} \frac{1321x-12}{P(x)}\,dx$$

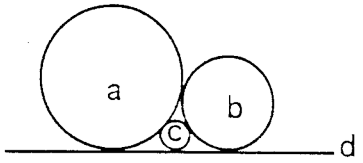
$$\int_0^a \frac{x^2}{x^3+x+1}\,dx + \int_0^b \frac{x^2}{x^3+x+1}\,dx + \int_0^c \frac{x^2}{x^3+x+1}\,dx = \int_0^{0,05} \frac{41691x^2-843x+1}{P(x)}\,dx$$

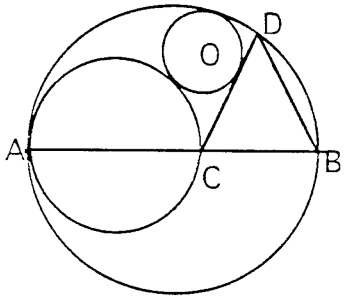
☞Exercice n°4 du Concours général 1998 :

Cet exercice a fait grand bruit. Son "histoire" a été décrite dans Tangente n° 63 et dans le bulletin APMEP n°417 de juin-juillet (p.494). Une solution est donnée à cette même page du bulletin. Une autre solution est donnée dans Tangente n°64-65 de juin-juillet-août 98. Nous renvoyons nos lecteurs à ces publications pour cet exercice très "spectaculaire"... mais vraiment très difficile pour le commun des mortels ! S.P.

☞Exercices japonais

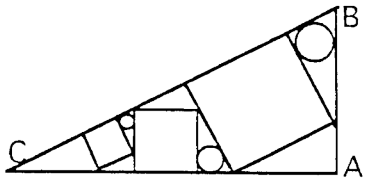
Les cercles a, b, c sont tangents deux à deux et tangents à la droite d.
Trouver une relation entre les rayons des trois cercles.





Les points A,B et C sont alignés. Les cercles de diamètres [AB] et [AC] sont tangents en A. Le triangle (CDB) est isocèle (D sur le cercle de diamètre [AB]).
Le cercle de centre O est tangent aux deux autres cercles et au segment [CD].
Montrer que (OC) est perpendiculaire à la droite (AB.)

Le triangle (ABC) est rectangle en A
A l'intérieur de ce triangle sont placés trois carrés et trois cercles comme indiqué dans le figure.
Trouver une relation entre les rayons des trois cercles .



N.D.L.R. : ces trois exercices sont donnés dans un article de Tony Rothman et Hidetoshi Fukagawa Pour La Science (n° 249,Juillet 1998), intitulé "Géométrie et religion au Japon", dont nous conseillons vivement la lecture. D'autres exercices sont aussi proposés ainsi que des indications sur les solutions et les réponses.