Edito

Math en scène

C'est le thème des Journées de Rouen, du 23 au 26 octobre prochain. Pour François Dusson, responsable de ces Journées et nouveau président national de l'APMEP, il s'agit de montrer que les math " ne sont pas enfermées dans le monde scolaire ".

Il est vrai que pour beaucoup de gens, les math se résument à des souvenirs scolaires, parfois douloureux. Certains les ressentent même comme une violence[1].

Rendant compte[2] du livre « Le théorème du perroquet »[3], une journaliste présente cette « initiation aux math » comme un livre « très gai ». « Un comble pour des math ! », ne peut-elle s'empêcher d'ajouter ! " Pour un peu, on se passionnerait pour la résolution d'une équation comme on avale un polar ! ".

Bien sûr, les math peuvent être très gaies ! Mais oui, on peut se passionner pour la résolution d'une équation !

Mais savons-nous toujours faire partager cette passion à nos élèves ?

Bien sûr, comme tout apprentissage, celui des math demande des efforts. Mais apprécierait-on la musique si on ne faisait que du solfège ?

A nous d'imaginer des ouvertures. Les idées ne manquent pas, depuis les revues comme Tangente ou Hypercube jusqu'à la semaine de la Science, en passant par le Cédérom " Descartes " ou le livre cité plus haut. Eugène Guillevic a mis les math en poésie[4]. Un film[5] est même sorti cet été, dans lequel une adolescente hésite (pas trop longtemps, je crois ...) entre ses amours et les mathématiques !

A notre niveau (régional), le Rallye et le Challenge représentent une remarquable façon de faire des math « non-scolaires ». Et pour l'an 2000, pour lequel nous préparons une manifestation « grand public », vos idées nous intéressent : tous en scène pour les math !

Louis-Marie BONNEVAL

[1] cf Bulletin de l'APMEP n°414
[2] dans Télérama du 16 septembre 98
[3] de Denis Guedj, Edition du Seuil
[4] Euclidiennes, chez Gallimard (cf bulletin APMEP n°417)
[5] " C'est la tangente que je préfère ", de Chantal Silvera.

SOMMAIRE

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

79 86 17 16

Régionale de Poitou-Charentes

APMEP

Octobre 1998 n° 34

COROL' AIRE

IREM, Fac. des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pinea~
86022 POITIERS CEDEX

ROUTAGE 206 | DISPENSE DU TIMBRAGE POITIERS CENTRE DE TRI

APMEP : http://wallis.univ-poitiers.fr/~apmep

Le numéro : 6 F.
Abonnement 1 an (4 numéros) : 20 F.
ISSN : 1145 - 0266

Directeur	Louis-Marie BONNEVAL
Comité de rédaction	Colette BLOCH, Serge PARPAY, Jean FROMENTIN.
Imprimerie	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur PINEAU 86022 POITIERS - CEDEX
Editeur	APMEP Régionale de Poitiers
Siège social	IREM, Faculté des Sciences 40, Avenue du Recteur PINEAU 86022 POITIERS - CEDEX
C.P.P.A.P.	n° 73 802
Dépôt légal	Octobre 1998

Compte rendu de la réunion du comité régional du 30 septembre 1998

Le comité régional s'est réuni le 30 septembre à 14h30 à l'IREM de Poitiers.

1 - Au niveau national.

Notre nouveau représentant au Comité national, Jacky Citron, a fait un bref compte rendu de la réunion de ce comité, les 20 et 21 juin 1998. Les versions différentes du rapport Meyrieu y ont largement alimenté les débats, dans l'attente, d'ailleurs, d'un rapport global.
La diminution des effectifs de l'association a aussi été évoquée (notre Régionale maintient, pour sa part, un nombre stable d'adhérents) et la question de fond :»Comment réagir ?» se pose évidemment/.
Il est fait état d'une intervention de Jean Souville sur la formation continue à partir des IREM et d'une volonté de renforcer les liens entre le CNP et l'APMEP.

2- Au niveau régional,

de nombreux points sont proposés à l'ordre du jour.

* **Journées Nationales** : On compte déjà une vingtaine d'inscrits. Louis-Marie Bonneval rappelle que l'autorisation d'absence pour le 23/10 sera facilitée, mais sans ordre de mission.
* l'**Assemblée générale** de la Régionale aura lieu le 25/11/98, à 14h30, au lycée Guez de Balzac à Angoulême. Le conférencier invité sera R. Giraud, ancien Président de l'Université de Poitiers, et interviendra sur la notion de modèle en économie.
* **Journée académique de mathématiques**, fin mars 1999. Cette initiative rectorale, soutenue par la communauté mathématique régionale, doit permettre de réunir les coordonnateurs de mathématiques de tous les établissements de la Région, sur le site du Futuroscope (date à confirmer) sur la base d'une journée entière avec autorisation d'absence sans remboursement des frais de déplacement. Au menu, une conférence «prestigieuse» (J-C Yoccoz, médaille Fields, a été pressenti) et l'après-midi des ateliers animés par l'APMEP, l'IREM... sur des thèmes et des témoignages divers ; par exemple, pour l'APMEP, pourraient être proposés «Rallyes et jeux», «Serveur», «Math et radio», «Permanence-conseil», «Modules en lycée». En parallèle, fonctionneraient stands et démonstration de CDROM. Le comité propose de négocier des invitations supplémentaires pour que ses membres et intervenants ne prennent pas la place d'autres collègues de leur établissement.
* **Conférences.** Le projet d'inviter P. Bernat sur le thème «Vieille géométrie - nouveaux problèmes» est unanimement retenu. Dominique Gaud souligne l'intérêt de réactiver des connaissances qui furent si bien maîtrisées par les générations précédentes. Contact sera pris avec P. Bernat pour une éventuelle intervention le 3 février 1998.
L'idée de donner une suite à la conférence de Guy Robin (cryptographie et arithmétique) est évoquée, par exemple sur le thème des codes correcteurs d'erreurs (explicitement au programme et peu traité dans les manuels).
* **Recrutement d'adhérents** : étale ! Est reprise la proposition du précédent comité de contacter systématiquement les nouveaux venus dans l'académie ; les anciens adhérents seront invités à retrouver le chemin de la régionale.
* **Relations IREM/IUFM.** Au 30/09, le PAF désormais disponible sur Internet ne propose aucun stage de maths, alors que la formation continue est désormais complètement rattachée aux IUFM. L'IREM ne sera sollicité que sur des stages à public désigné (voir l'article : "**Du côté de l'IREM**").
* **Rallye.** Le travail redémarre le 7/10, et son équipe est à la recherche de problèmes, de bonnes volontés et de récompenses... pour les classes.
* **Allumath.** L'été est passé par là, les voilà prêts à phosphorer de nouveau.
* **Site Internet.** Samuel Dussubieux fait le point sur les différentes pages (conférences, actualités, Corol'aire, dates de réunions...). La phase de mise en place étant terminée, le site rentre dans la phase d'évaluation/amélioration. Il s'agit surtout d'assurer fourniture et renouvellement des informations disponibles sur le site. Il est rappelé que même si celui-ci est encore peu consulté, il a aussi vocation de «vitrine» (régionale, voire nationale). A la suite de la conférence MAIF à Niort, Pierre-Jean Robin dit avoir été relancé sur la question d'un lien internet entre les sites MAIF et APMEP. Le Comité ne souhaitant aucune publicité accepte le principe d'un lien «minimal» (Mot MAIF actif sur la page conférence).
* **Projet «Math 2 000».** La machine est lancée. Les premiers contacts sont pris pour une grande manifestation au premier trimestre 2 000 (coordonnateur : Espace Mendès France, partenaires : Université, IUFM, IPR, IREM, APMEP...). L'idée est de travailler l'image des mathématiques auprès du grand public, avec des conférenciers de niveau national (ou plus) et une exposition «Math 2 000» visible à Rouen pendant les Journées Nationales.
* **Corol'aire.** Le numéro que vous avez entre les mains vous prouve que sa publication a bien redémarré... avec un peu de retard et beaucoup de courrier reçu depuis Juin.
Sur ces bonnes nouvelles, la séance est levée à 17h30.

F. Michaud

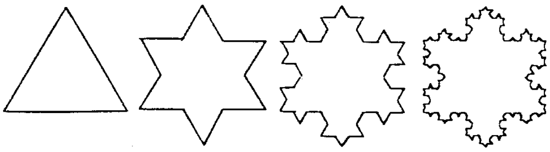
Deux brochures APMEP pour le collège.
«JEUX 5» : 15 activités mathématiques à partir de jeux, sur fiches photocopiables (132 pages au formatA4) directement utilisables en classe. Prix adhérent, port non compris : 50 F.
EVAPM6/97, Fascicule 2 : Résultats et analyses de l'évaluation APMEP en fin de Sixième 1997 (166 pages au formatA4). Contexte et opinion des professeurs, savoir des élèves, analyses par thème... Prix adhérent, port non compris : 60 F

Journées Nationales de l'APMEP :
Maths en scène.
ROUEN, du 23 au 26 octobre 1998

A.P.M.E.P. de Poitou-Charentes sur INTERNET

nom	**Régionale de Poitou-Charentes.**
adresse	**http://wallis.univ-poitiers.fr/~apmep**
Mél	**apmep@wallis.univ-poitiers.fr.**

Rallye Mathématique Poitou-Charentes 1999



Vous trouverez en pages centrales les éléments de solutions à l'épreuve du Rallye de juin dernier épreuve qui figurait dans le Corol'aire n° 33 et qui vous a certainement permis de maintenir la forme mathématique pendant les vacances d'été.
Nous sommes conscients que nous avons visé un peu trop haut au niveau de la dificulté des problèmes ; nous ferons en sorte que la prochaine épreuve soit plus abordable.

La prochaine édition du Rallye aura lieu le mardi 30 mars 1999.

La date limite d'inscription des classes deTroisièmes et de Secondes est fixée au 5 février 1999. Vous recevrez début janvier dans votre établissement le dossier d'inscription et l'épreuve d'entraînement.
Comme les années précédentes, les éditions Belin, par l'intermédiaire du CIJM (Comité International des Jeux Mathématiques) offriront des livres aux classes lauréates.

Du côté de l'IREM

Recherche sur l'enseignement des mathématiques : comme leur nom l'indique, c'est là la mission des IREM. Ce travail débouche d'une part sur la formation, d'autre part sur la production de brochures, les deux types d'activité étant bien entendu fortement imbriqués.

En ce qui concerne les **brochures**, l'IREM de Poitiers est remarquablement fécond, puisque ce ne sont pas moins de dix brochures qui vont s'ajouter au catalogue. L'une d'entre elles, " Des tangentes aux infiniment petits " est disponible depuis un mois. Une autre est sous presse : " Les chantiers du chaos ". D'autres vont sortir dans les semaines ou les mois à venir : " Enseigner les mathématiques - fascicule 2 ", " Décimaux en Sixième ", " Histoire des math en Quatrième ", " Aires et périmètres ", " Calcul littéral au collège ", " Devoir à la maison ", Histoire des transformations - article 7 ", " Arithmétique ".

La **formation** quant à elle se décline sur quatre modes :
* Préparation au CAPES externe en première année d'IUFM.
* Formation des professeurs-stagiaires en deuxième année d'IUFM.
* Animation de stages pour les collègues en exercice.
* Préparation aux CAPES interne et réservé.

Pour les deux premières tâches (formation initiale), l'IREM est prestataire de service pour l'IUFM. Pour les deux dernières (formation continue), il l'était jusqu'ici pour la MAFPEN. Or la nouveauté de la rentrée, c'est que désormais les deux dernières tâches relèvent également de l'IUFM (même si une cellule Formation Continue subsiste auprès du recteur, pour permettre notamment aux IPR d'intervenir sur les contenus de formation).

L'APMEP considère que cette évolution est intéressante sur le fond, car elle devrait permettre une meilleure liaison entre formation initiale et continue. C'est d'ailleurs la même personne, Laurence BONNEAU, directrice-adjointe de l'IUFM, qui a la responsabilité globale des stagiaires 2e année et de la formation continue.

L'IUFM a donc mis en place pour la formation continue une structure qui a sa cohérence, mais dans laquelle l'IREM a quelques difficultés à se couler, principalement pour deux raisons :
* Alors que l'IUFM souhaiterait des " professeurs associés " spécialisés, l'IREM défend le principe d'un travail collectif, permettant un plus grand nombre de formateurs et des interventions diversifiées.
* La recherche pédagogique et didactique réclame du temps et des moyens que l'IUFM ne peut accorder à l'IREM.

Quoi qu'il en soit, l'année 98-99 est une année de transition : à partir de l'année prochaine, la formation continue sera planifiée sur trois ans, ce qui devrait permettre notamment d'envisager, au lieu de stages d'un ou deux jours, des formations plus consistantes.

L'APMEP souhaite que dans la mise en place de ce dispositif global,
* les contenus de formation soient discutés par tous les intéressés : IPR, IUFM, IREM, APMEP ...
* soit préservé ce qui fait l'originalité et la richesse de l'IREM, à savoir le travail collectif de recherche pédagogique et de formation.

Louis-Marie BONNEVAL

Stages mathématiques du PAF

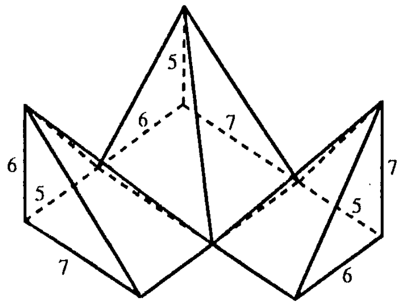
Pas de stages en mathématiques ? C'est ce que laisserait croire le serveur académique. Explication : les stages à public désigné n'y figurent pas !
Mais la liste des stages est visible sur le serveur de l'IREM : http://wallis.univ-poitiers.fr/~irem

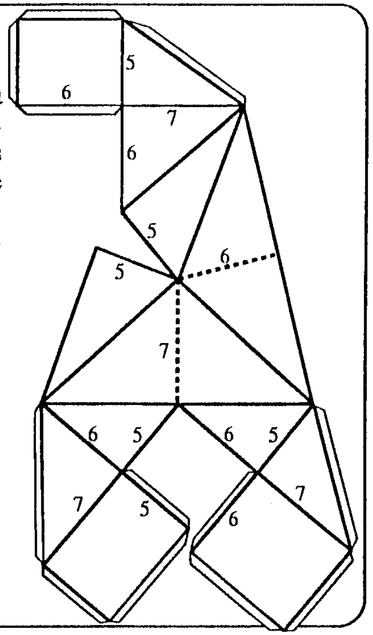
RALLYE MATHÉMATIQUE POITOU-CHARENTES 1998 - Éléments de solutions

1 Le mystère des trois pyramides. (15 points)

Les élèves pouvaient utiliser le dessin en perspective et le patron du cube pour les adapter au parallélépipède comme nous le faisons ici, en mettant les cotes sur les arêtes du dessin en perspective, et les faire correspondre au patron. Le découpage du patron proposé pour la constitution des trois pyramides était aussi une aide précieuse pour la réussite de ce problème.

En pointillés, la séparation des 3 patrons des pyramides.





2 Dans la galaxie ZZ 7/77. (5 points)

Numérotons (1), (2), (3), (4) et (5) les affirmations dans l'ordre où elles apparaissent dans le texte, et désignons les prénoms par leurs initiales.

Considérons les affirmations dans l'ordre suivant (1), (4), (2), (5), (3) et supposons que A est Zado. D'après (1), B est Zado ; donc, d'après (4) C est Zadult et d'après (2) D est Zado ; donc d'après (5) E est Zadult et ainsi d'après (3) A est Zadult, ce qui est contradictoire avec notre hypothèse.

Donc A est Zadult, B est Zadult (1), C est Zado (4), D est Zadult (2), E est Zadult (5) et la proposition (3) n'est pas contradictoire avec notre hypothèse.

Il y a donc un seul Zado (Christophe) parmi les cinq.

3 Un gros cube, un p'tit cube, c'est l'heure... (10 points) [2 solutions]

1) Soit a l'arête d'un petit cube. Le nombre n de petits cubes en hauteur est un diviseur de 30. Donc nxa = 30. On obtient ainsi les possibilités : 30 x 1 cm, 15 x 2 cm, 10 x 3 cm, 6 x 5 cm, 5 x 6 cm ... La contrainte sur le nombre total de petits cubes réduit les investigations à 10 cubes de 3 cm, et on trouve par essais à la calculatrice: $4^3 + 6^3 = 280$.

Le volume d'un petit cube est donc de 27 cm^3.

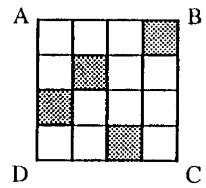
2) Si on établit d'abord que $4^3 + 6^3 = 280$, on obtient alors $4a + 6a = 30$; d'où $a = 3$ cm. Et on en déduit le volume demandé.

7 Bleib nicht auf der Strecke !

! No se queden sobre el cuadro !

Don't stay behind on the (square) field !

Ne restez pas sur le carreau. (5 points)

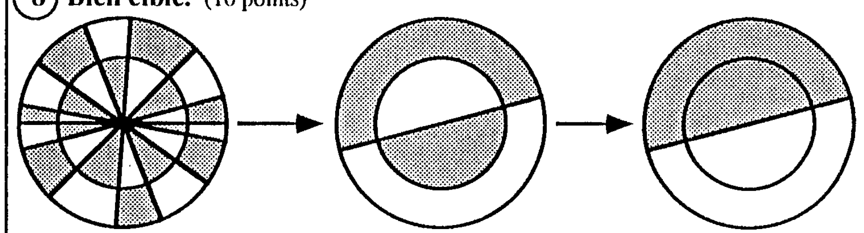


Trouver de combien de façons différentes on peut noicir 4 cases du carré ABCD de telle sorte qu'il n'y en ait qu'une par ligne et par colonne.

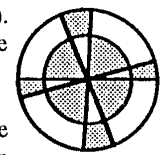
En considérant les colonnes de gauche à droite, il y a 4 façons de noircir une case dans la première colonne, il n'y a plus que 3 façons dans la deuxième colonne, seulement 2 façons dans la troisième colonne et plus qu'une seule façon pour la quatrième colonne.

Il y a donc 4 x 3 x 2 x 1 = 24 solutions.

8 Bien ciblé. (10 points)



S'il y avait un nombre pair de diamètres, les zones en grisées seraient disposées symétriquement par rapport au centre (voir dessin ci-contre).



Avec un nombre impair de diamètres (peu importe le nombre), chaque zone en grisé a pour symétrique une zone blanche.

On peut regrouper alors les zones comme sur le dessin ci-dessus.

Soit R le rayon du disque intérieur. L'aire du demi-disque en grisé de rayon 10 vaut $100\pi / 2$. L'aire du disque intérieur doit être égale à la moitié de l'aire totale. L'aire du demi-disque intérieur vaut donc :

$$\frac{\pi R^2}{2} = \frac{100\pi}{4}, \text{ d'où } R = 5\sqrt{2} \approx 7{,}1 \text{ cm.}$$

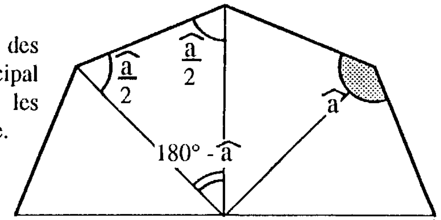
9 Mon oncle. (5 points)

Le polygone étant régulier, les angles des triangles isocèles dont le sommet principal est le centre du polygone possèdent les propriétés décrites sur la figure ci-contre.

$\widehat{a} = 175°$; $180 - \widehat{a} = 5$; $360 : 5 = 72$

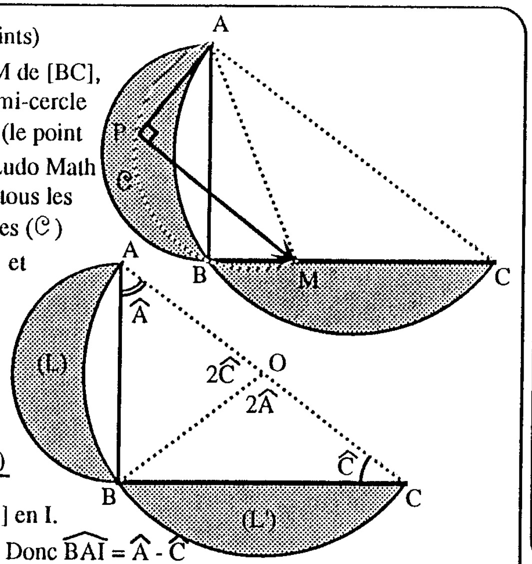
Le polygone a donc 72 côtés.

Mon oncle Jérémie a donc 72 ans.



(4) L'aire de Lucky Luke. (15 points)

Si Ludo Math veut atteindre un point M de [BC], il doit se placer en un des points du demi-cercle ($\mathcal{C}$) de diamètre [AM] et contenant B, (le point M est exclu et la longueur du bras de Ludo Math est considérée comme négligeable). A tous les points P correspondent des demi-cercles ($\mathcal{C}$) intérieurs à la zone grisée sur le dessin et réciproquement (étude un peu délicate que l'on n'exigera pas des élèves).

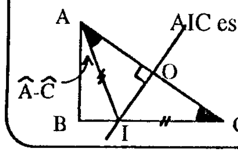


aire (L) = $\frac{9\pi}{2} - (25\pi \times \frac{2\widehat{C}}{360} - 12)$

aire (L') = $25\pi \times \frac{2\widehat{A}}{360} - 12$

aire de (L + L') = $\frac{9\pi}{2} + 25\pi \times \frac{2(\widehat{A} - \widehat{C})}{360}$

La médiatrice de [AC] coupe [BC] en I.



AIC est un triangle isocèle. Donc $\widehat{BAI} = \widehat{A} - \widehat{C}$

$\cos\widehat{C} = \frac{OC}{IC} = \frac{BC}{AC}$. Donc IC = $\frac{25}{4}$ et BI = $\frac{7}{4}$. $\tan(\widehat{BAI}) = \frac{BI}{BA} = \frac{7}{24}$.

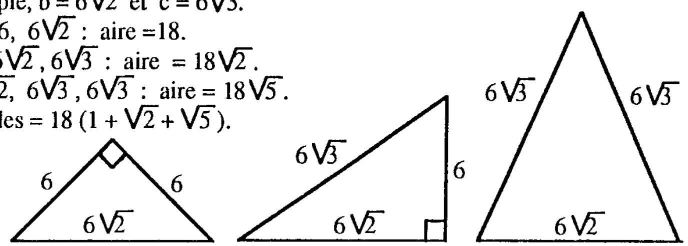
$\widehat{A} - \widehat{C} \approx 16{,}26°$, et $\boxed{\text{Aire (L + L')} \approx 21{,}23 \text{ cm}^2}$

(5) Devinette. (5 points)

Soit x le nombre cherché. x = 222y où y est un carré. Mais x = 74 x 3 x y ; donc 3y est un cube. Donc y contient 3^2. Ainsi x = 74 x 27 x a = 1998 x a, où a est à la fois un carré et un cube. Les deux premiers nombres entiers qui sont à la fois carré et cube sont 1 et 64.
Or 1998 x 64 = 127 872 > 125 000. Donc a = 1 et **le nombre cherché est 1998.**

(6) Des bâtons pour se faire math. (15 points)

Il ne peut y avoir que trois triangles, donc un triangle rectangle isocèle, un triangle rectangle non isocèle et un triangle isocèle non rectangle. Le triangle rectangle isocèle de côté x aura pour hypoténuse $x\sqrt{2}$; compte tenu des données on ne peut avoir que x = a = 6 ; d'où, après un raisonnement simple, b = $6\sqrt{2}$ et c = $6\sqrt{3}$.
Triangle de côtés 6, 6, $6\sqrt{2}$: aire = 18.
Triangle de côtés 6, $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$: aire = $18\sqrt{2}$.
Triangle de côtés $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$, $6\sqrt{3}$: aire = $18\sqrt{5}$.
Aire totale des triangles = $18(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$.



(10) Hommage. (5 points)

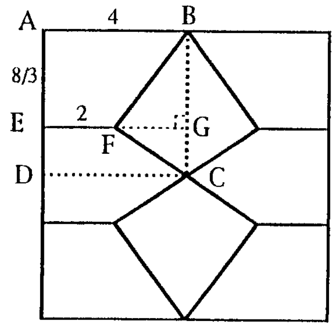
$$\begin{array}{r} \text{M A R I E} \\ +\ \text{C U R I E} \\ \hline \text{R A D I U M} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{M A 1 2 E} \\ +\ \text{C U 1 2 E} \\ \hline \text{1 A D 2 U M} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{6 A 1 2 3} \\ +\ \text{C 4 1 2 3} \\ \hline \text{1 A D 2 4 6} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{M A 1 2 E} \\ +\ \text{C 5 1 2 E} \\ \hline \text{1 A D 2 5 M} \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{6 A 1 2 8} \\ +\ \text{C 5 1 2 8} \\ \hline \text{1 A D 2 5 6} \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{r} \text{4 3 1 2 7} \\ +\ \text{9 5 1 2 7} \\ \hline \text{1 3 8 2 5 4} \end{array}}$$

R = 1. Donc I = 2 ou I = 3 suivant qu'il y a ou non une retenue.
I + I ≤ 6, donc U ≤ 7. Il n'y a pas de retenue, et **I = 2.**
D'où U = 4 ou U = 5.
Si U = 4, alors E + E < 10 ; donc E = 3. On obtient l'addition ci-contre, et les seules possibilités pour A sont 5, 7, 8 ou 9.
Si A = 5 alors D = C = 9 : impossible. Les valeurs 7, 8 et 9 pour A donnent pour D : 1, 2 et 3, ce qui est impossible.
Donc U = 5, et pour E, il reste 7, 8 ou 9.
Si E = 9, alors M = 8. Il reste pour A : 3, 4, 6 ou 7, ce qui donne respectivement pour D : 8, 9, 1 ou 2 : impossible.
Si E = 8, alors M = 6 et il reste pour A : 3, 4, 7 ou 9.
Mais 6 + C ≤ 16. Il reste alors pour A : 3 ou 4.
Si A = 3, D = 8 : impossible. Si A = 4, D = 9 et C = 8 : impossible.
Donc **E = 7** et **M = 4.**
Mais 4 + C ≤ 14. Donc **A = 3, D = 8** et **C = 9.**

Compléments pour la classe de Seconde

(11) L'île de Math. (10 points)

L'aire du drapeau est de 8 x 8 dm^2 = 64 dm^2.
Donc le côté du carré mesure 8 dm.
Considérons le dessin du quart supérieur gauche du drapeau. Compte tenu des symétries, on a un carré ABCD. Aire(BCF) = 4 dm^2.
Or BC = 4 dm ; donc FG = 2 dm et EF = 2 dm.
Aire(ABFE) = 8 ; donc AE = 8/3 dm (hauteur du trapèze). D'où le dessin ci-contre (échelle 1/20).



(12) Non, tu n'as pas changé, é, é... (10 points)

A la banque, les 2 000 sous changés donnent 50 000 zetas. Un sou vaut 25 zetas et un zeta vaut 0,04 sou.
Trois menus font 96 sous. Au change proposé par le garçon, les trois menus reviennent à 96 x 22 = 2 112 zetas.
Mais payés directement en zetas, ils reviennent à 3 x 600 = 1 800 zetas. La différence de 312 zetas donne 312 x 0,04 = 12,48 sous.
Au cours du jour, la crêpe "Souzeta" coûte donc 12,50 sous.

RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

les collègues peuvent transmettre, <u>en plus de la copie papier</u>, leur texte sur disquette (en précisant le traitement de texte utilisé). Cela évitera de retaper ces textes, donc les erreurs de transcription et nous ferait économiser beaucoup de temps. Merci ! Naturellement la disquette leur sera retournée après utilisation .

Serge Parpay.

☞ Solutions d'exercices

Exercice proposé dans le Corol'aire 32 : **Tout entier impair non divisible par 5 a un multiple dont l'écriture ne comporte que des 1 .**

Une solution de cet exercice a été donnée dans le Corol'aire n° 33.. Alain Pichereau (Angoulême) nous donne la solution ci-dessous :

Si le résultat est évident pour 1, pour 3 ($3 \times 37 = 111$), pour 7 ($7 \times 15873 = 111111$), pour 9 ($9 \times 12345679 = 111111111$), il l'est beaucoup moins pour un entier à peine plus grand, comme 17.

Tout repose sur la propriété suivante, notée (***P***) : <u>Si $a \in \{1 ; 3 ; 7 ; 9\}$ alors les chiffres des unités des 9 nombres a, 2a, 3a, 4a, 5a, 6a, 7a, 8a, 9a sont (à l'ordre près) exactement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.</u>

Convenons que si a et b sont deux entiers, $\boxed{ab}$ désignera l'entier $10^k a + b$ (où k est le nombre de chiffres de b), c'est-à-dire la "juxtaposition de a et de b". Par ailleurs $\boxed{a21}$ désignera $100\,a + 21$ et $\boxed{021} = 21$.

Soit N un nombre impair non divisible par 5, c'est-à-dire se terminant par 1, 3, 7, 9 et constitué de p chiffres ($p \geq 1$). D'après (***P***) il existe (un seul) $y_1 \in \{1;2;...;9\}$ tel que Ny_1 se termine par 1 :

$Ny_1 = \boxed{b_1 1}$ avec b_1 entier de au plus p chiffres. Soit u le chiffre des unités de N, u_1 le chiffre des unités de b_1. Toujours d'après (***P***), il existe $y_2 \in \{0; 1; 2;...; 9\}$ tel que $uy_2 + u_1$ se termine par 1, d'où $N\boxed{y_2\,y_1} = \boxed{b_2 11}$ avec b_2 entier de au plus p chiffres [en effet $N\boxed{y_2\,y_1} = Ny_1 + 10Ny_2 = 10b_1 + 1 + 10Ny_2 = 10(Ny_2 + b_1) + 1$ et $Ny_2 + b_1$ se termine par 1]. Remarquons que y_2 peut être nul, cela uniquement si b_1 se termine par 1 (c'est-à-dire la multiplication par y_1 a apporté au moins deux 1) et dans ce cas $\boxed{y_2 y_1} = y_1$ mais il faut "garder" y_2 car évidemment y_3 peut être non nul.

De même il existe un seul $y_3 \in \{0; 1; 2;...; 9\}$ tel que $uy_3 + u_2$ se termine par 1, u_2 étant le chiffre des unités de b_2 et donc $N\boxed{y_3 y_2 y_1} = \boxed{b_2 111}$, b_3 entier de au plus p chiffres ; etc (ou récurrence, ...).

On définit ainsi deux suites (y_n) et (b_n) pour $n \in \mathbb{N}^*$, telles que $\forall n \geq 1$ $y_n \in \{0; 1; 2; ... ; 9\}$ et $N\boxed{y_n ... y_2 y_1} = \boxed{b_n 11...1}$ (n fois 1) , b_n entier de au plus p chiffres (pouvant être nul).

<u>Exemples</u> :

1) N = 3 ; N x 7 = 21; N x 37 = 111; N x 037 = 1111; N x 7037 = 21111; N x 37037 = 111111
($b_1 = 2$) ($b_2 = 1$) ($b_3 = 0$) ($b_4 = 2$) ($b_5 = 1$)
2) N = 137; N x 3 = 411 ; N x 03 = 411 ; N x 103 = 14111 ; N x 1103 = 151111 ; N x 81103 = 11111111
($b_1 = 41$) ($b_2 = 4$) ($b_3 = 14$) ($b_4 = 15$) ($b_5 = 111$)
3) N = 17 ; N x 3 = 51 ; N x 83 = 1411 ; N x 183 = 3111 ; ensuite... ?
4) N = 67 ; N x 3 = 201 ; N x 33 = 2211 ; N x 733 = 49111 ; voir réponse dans la remarque 2) ci après.

<u>Montrons</u> maintenant que tout entier N, choisi comme indiqué plus haut, admet un multiple dont l'écriture ne comporte que des 1.

$b_1, b_2, \ldots, b_{10^p+1}$ sont 10^p+1 entiers de au plus p chiffres, donc deux sont égaux, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers i et j tels $1 \leq i < j \leq 10^p+1$ et $N\boxed{y_i ... y_2 y_1} = \boxed{b11...1}$ (i fois 1), $N\boxed{y_j ... y_2 y_1} = \boxed{b11...1}$ (j fois 1). On en déduit que $N\boxed{y_j ... y_2 y_1} = \boxed{b11...1} \times 10^{j-i} + 11...1$ [respectivement i fois 1 et (j-i) fois 1], soit $N\boxed{y_j ... y_2 y_1} \times 10^{j-i} + 11...1$ [(j-i) fois 1] et donc <u>N divise un entier dont l'écriture ne comporte que des 1</u>.

C.Q.F.D.

Remarques :

1) On peut vérifier qu'il existe $k \leq j - i \leq 10^p$ tel que $N\boxed{y_k \ldots y_2 y_1} = 11\ldots1$, [(j-1) fois1] c'est-à-dire que la suite (b_n) a au moins un terme b_k constitué seulement de 1 avec $k \leq 10^p$; et si k est le plus petit entier tel que b_k ne comporte que des 1 alors $N\boxed{y_k \ldots y_2 y_1}$ est le plus petit des multiples de N qui ne comporte que des 1.

2) Et pour les curieux : (calcul fait avec DERIVE).

17 x 65359477124183 est le plus petit multiple de 17 ne comportant que des 1 (il y en a 16) ;

67 x 1658374792703150912106135986733 est le plus petit multiple de 67 ne comportant que des 1 (il y en a 33).

Exercice proposé dans le Corol'aire N°32 : **Soit un triangle A'B'C' image d'un triangle ABC dans une rotation d'angle $\pi/3$, M le milieu de [CB'], N le milieu de [AC'] et P le milieu de [BA'] . Montrer que le triangle MNP est équilatéral .**

Solution d'Alain Pichereau :

Prenons comme origine du repère le centre de la rotation r telle que r(A) = A', r(B) = B' et r(C) = C'.
En posant $u = e^{i\pi/3}$, $z_{A'} = z_A\, u$, $z_{B'} = z_B\, u$, $z_{C'} = z_C\, u$.

Il vient $z_M = (z_C + z_B\, u)/2$, $z_N = (z_A + z_C\, u)/2$, $z_P = (z_B + z_A\, u)/2$

$\dfrac{z_M - z_N}{z_P - z_N} = \dfrac{-z_A + z_B u + z_C(1-u)}{z_A(u-1) + z_B - z_C u} = \dfrac{-z_A + z_B u - z_C u^2}{z_A u^2 + z_B - z_C u} = u$ (puisque $u^2 = u-1$ et $u^3 = -1$), ce qui prouve immédiatment le résultat.

Remarque : $z_M + z_N + z_P = \dfrac{\dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} + \dfrac{z_{A'} + z_{B'} + z_{C'}}{3}}{2}$ et donc le centre de gravité du triangle MNP est le milieu des centres de gravité des triangles ABC et A'B'C', cela même si A'B'C' n'est pas l'image de ABC par rotation.

N.D.L.R. : le lecteur est invité à trouver une démonstration de géométrie utilisant les transformations. S.P

☞ **Exercice** proposé par Jacques Drouglazet (Surgères) :

On désigne par a, b, c les racines de l'équation : $20x^3 - 31x^2 + 11x - 1 = 0$ et par P(x) la fonction polynomiale : $41691\, x^3 - 1315\, x^2 + 46\, x + 1$.

Démontrer les formules :

$$\int_0^a \frac{1}{x^3+x+1}dx + \int_0^b \frac{1}{x^3+x+1}dx + \int_0^c \frac{1}{x^3+x+1}dx = \int_0^{0,05} \frac{43-101x}{P(x)}\,dx$$

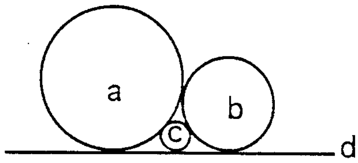
$$\int_0^a \frac{x}{x^3+x+1}dx + \int_0^b \frac{x}{x^3+x+1}dx + \int_0^c \frac{x}{x^3+x+1}dx = \int_0^{0,05} \frac{1321x-12}{P(x)}\,dx$$

$$\int_0^{a\ \cancel{0,05}} \frac{x^2}{x^3+x+1}dx + \int_0^b \frac{x^2}{x^3+x+1}dx + \int_0^c \frac{x^2}{x^3+x+1}dx = \int_0^{0,05} \frac{41691x^2-843x+1}{P(x)}\,dx$$

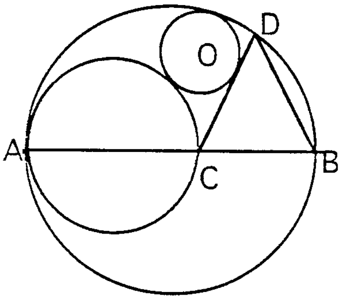
☞ Exercice n°4 du Concours général 1998 :

Cet exercice a fait grand bruit. Son "histoire" a été décrite dans Tangente n° 63 et dans le bulletin APMEP n°417 de juin-juillet (p.494). Une solution est donnée à cette même page du bulletin. Une autre solution est donnée dans Tangente n°64-65 de juin-juillet-août 98. Nous renvoyons nos lecteurs à ces publications pour cet exercice très "spectaculaire"... mais vraiment très difficile pour le commun des mortels ! S.P.

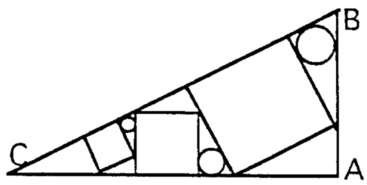
☞ Exercices japonais



Les cercles a, b, c sont tangents deux à deux et tangents à la droite d.
Trouver une relation entre les rayons des trois cercles.



Les points A,B et C sont alignés. Les cercles de diamètres [AB] et [AC] sont tangents en A. Le triangle (CDB) est isocèle (D sur le cercle de diamètre [AB]).
Le cercle de centre O est tangent aux deux autres cercles et au segment [CD].
Montrer que (OC) est perpendiculaire à la droite (AB.)



Le triangle (ABC) est rectangle en A
A l'intérieur de ce triangle sont placés trois carrés et trois cercles comme indiqué dans le figure.
Trouver une relation entre les rayons des trois cercles .

N.D.L.R. : ces trois exercices sont donnés dans un article de Tony Rothman et Hidetoshi Fukagawa Pour La Science (n° 249, Juillet 1998), intitulé "Géométrie et religion au Japon", dont nous conseillons vivement la lecture. D'autres exercices sont aussi proposés ainsi que des indications sur les solutions et les réponses.

Histoire des symboles. Le saviez-vous ? Proposée par Jean-Paul Guichard

(XIV) Intermède...Internet et géométrie

Je n'ai reçu aucune copie à propos du petit devoir de vacances. Faut-il que je persévère ?
En attendant, j'ai mis à profit les miennes pour créer, sur Internet, un site consacré à Viète pour tous ceux qui aiment l'histoire des mathématiques.
Voici son adresse : http://www.district-parthenay.fr/parthenay/creparth/GUICHARDJp/VIETEaccueill.html
Vous pouvez aussi y accéder via le serveur Internet de notre Régionale de Poitiers.
Allez, une petite histoire tout de même.

Qui a introduit le signe $\perp$ pour les perpendiculaires ? Eh bien, c'est Hérigone dans son Cours de Mathématiques de 1634. Et comment notait-il le parallélisme cet Hérigone ? Avec un L ! Mais alors comment notait-il l'égalité ? Ah ça alors, vous l'avez oublié ? Retournez donc à la case départ. Entre nous, en relisant ce premier épisode de notre feuilleton, vous remarquerez sans doute que votre serviteur avait commis un petit oubli à propos du signe L pour désigner des parallèles...
Mais revenons à Hérigone. Lorsque, bien plus tard, le signe = de Recorde s'est imposé sur le Vieux Continent pour désigner l'égalité, il a fallu faire quelque chose. Et à la suite des anglais Kersey, Jones, Wilson... on a fait touner de 90° les parallèles de Recorde et d'Hérigone pour obtenir le symbole ||, qui, comme la tour de Pise, a pris l'air penché // qu'on lui connaît. Et en cette fin de siècle, la fatigue aidant on pourrait bien revenir à la case départ. Inquiétant non!