RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lecture, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur... Cette rubrique est à vous.

Serge Parpay

Rectificatifs pour le Corollaire n° 32 :

1) Page 5, haut de la colonne de droite, 4ème ligne : lire C(-a, b, 0).

2) Page 6, 3ème ligne du bas : le dénominateur de la fraction n'a pas été imprimé : ce dénominateur est le nombre π ; avant dernière ligne : lire « à la page 100».

Solutions d'exercices :

Corol'aire a reçu des solutions aux exercices d'arithmétique proposés dans le n°32. En particulier notre collègue Pierre Mineau (Lycée de la Venise Verte à Niort) a proposé des solutions pour tous les exercices : Bravo ! Compte-tenu de la place disponible dans ce numéro, toutes les réponses ne peuvent être données. En voici quelques-unes choisies un peu arbitrairement. Il est toujours temps pour nos fidèles lecteurs de poursuivre la recherche de tous les exercices proposés !

Exercice 2 : *Montrer que tout entier impair non divisible par 5 a un multiple dont l'écriture ne comporte que des 1.*

Solution de Pierre Chevrier, Lycée Jean Macé, Niort :

Des exemples pour voir :

3 x 37 = 111 ; 7 x 15 873 = 111 111 ; 13 x 8 547 = 111 111 ; 17 x 6 535 947 714 183 = 11 111 111 111 111; 11 x 1 = 11 ; 9 x 12 345 679 = 111 111 111.

Reformulation du problème :

Dire qu'un nombre est impair et non divisible par 5 équivaut à dire qu'il est premier avec 10.

Dire que l'écriture décimale d'un nombre ne comporte que des 1 signifie que ce nombre est de la forme $(10^{n+1} - 1) / 9$ (n entier naturel). $[1 + 10 + ... + 10^n = (10^{n+1} - 1) / 9]$.

Il s'agit donc d'établir que, pour tout nombre x premier avec 10, 9x a un multiple de la forme $10^{n+1} - 1$.

Une démonstration au niveau de terminale S :

Soit x un entier premier avec 10, alors 9x est aussi premier avec 10 ; pour tout entier p, désignons par r_p le reste obtenu dans la division euclidienne de 10^p par 9x ; tous les restes r_p vérifient $1 \leq r_p < 9x$.

Parmi les restes $r_1, r_2, ..., r_{9x}$, il y en a donc au moins deux égaux, r_s et r_t avec $s < t$.

On a donc des égalités de la forme $10^t = k \times 9x + r_t$; $10^s = k' \times 9x + r_s$, avec $r_s = r_t$, d'où, en retranchant membre à membre, $10^t - 10^s = (k - k') \times 9x$, $10^s (10^{t-s} - 1) = (k - k') \times 9x$.

9x est premier avec 10^s ; il divise par conséquent $10^{t-s} - 1$, d'après le théorème de Gauss. CQFD.

Remarque :

* La méthode utilisée dans cette démonstration peut faire l'objet d'un algorithme pour trouver effectivement un multiple du nombre x ne comportant que des 1 dans son écriture dans le système décimal ;

(exemple : x = 3 ; les deux premières puissances de 10 donnant le même reste dans la division par 27 = 3x 9 sont 10^2 et 10^5; $10^3 - 1 = 999 = 9 \times 111$; on trouve 111).

* Au niveau terminale + ? , le résultat repose sur le théorème d'Euler : en effet, on peut reformuler le problème ainsi : il s'agit de trouver un entier n tel que $10^{n+1} \equiv 1 \pmod{9x}$; or 9x étant premier avec 10, le théorème d'Euler nous dit que $10^{\varphi(9x)} \equiv 1 \pmod{9x}$.

Exercice 4 : (Solution de P. Mineau). *Si 7 divise $a^2 + b^2$, monter que a et b sont des multiples de 7 (Sierpinski). (N.D.L.R. : pour simplifier la composition du texte imprimé, les classes d'équivalence sont notés en caractères gras).*

En raisonnant dans $\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z}$, dire que $a^2 + b^2$ est multiple de 7 équivaut à dire que $(a^2 + b^2) = 0$, soit $a^2 + b^2 = 0$.

On s'aperçoit que $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 2$, $4^2 = 2$, $5^2 = 4$, $6^2 = 1$.

Pour avoir $a^2 + b^2 = 0$, on voit qu'il est nécessaire que $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$ (soit donc a multiple de 7 et b multiple de 7).

En effet , ni 1 + 1, ni 1 + 2, ni 1 + 4, ni 1 + 0, ni 2 + 2, ni 2 + 4, ni 4 + 4, ni 2 + 0, ni 4 + 0 ne valent 0.

Exercice 5 : *Si n est premier, $n \geq 5$, montrer que $n^2 - 1$ est multiple de 24.*

Tout nombre entier n peut s'écrire sous la forme n = 6m + p, avec m entier et $p \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Si $p \in \{0, 2, 4\}$, n est alors multiple de 2 ; si p = 3, n est multiple de 3. Donc un nombre premier n supérieur ou égal à 5 est de la forme $n = 6m + u$ avec $u \in \{-1, +1\}$, alors $n^2 = 36m^2 + 12um + 1$, soit $n^2 - 1 = 12m(3m + u)$, m et 3m + u sont de parités différentes; m (3m + u) est donc pair et, par conséquent , $n^2 - 1$ est multiple de 24. CQFD.

Exercice 7 : (Solution de P. Mineau). *On veut démontrer que si n est un entier non premier supérieur ou égal à 5, alors il divise (n-1)! $(n-1)! = (n-1)(n-2) .... x\,2 \times 1$*

n n'étant pas premier, il existe deux entiers p et q tels que n = pq avec p et q tels que $1 < p < n$ et $1 < q < n$.

Si $p \neq q$, on retrouve bien p et q dans les facteurs 1, 2 ...., n -1 de (n-1)!

Si p = q, c'est-à-dire dans le cas où n est un carré parfait, on retrouvera le facteur p dans 1, 2, ..., n -1 à condition que $2p < n$, soit $2p < p^2$, soit donc si $p > 2$.

Remarque : n = 4 est donc le seul nombre entier non premier pour lequel n ne divise pas (n-1)!, (n -1)! = 6.

Exercice 13 : *On considère deux nombres entiers positifs a et b tels que $a^2 + 2b$ soit un carré parfait. Mettre $a^2 + b$ sous la forme d'une somme de carrés.*

Compte tenu de l'énoncé, il existe un entier positif c tel que $a^2 + 2b = c^2$. Donc $c^2 - a^2 = 2b$, soit (c + a) (c - a) = 2b.

c + a et c - a étant de même parité, c + a et c - a sont pairs.

En posant c + a = 2k, c - a = 2k', on a c = k + k', a = k - k' et b = 2kk'.

En conséquence $a^2 + b = (k - k')^2 + 2kk'$, soit $a^2 = k^2 + k'^2$, avec k = (c + a)/2 et k'= (c - a)/2.

Exemple : $5^2 + 2 \times 72 = 13^2$ donne k = 4, k' = 9, d'où $5^2 + 72 = 4^2 + 9^2$.

Suite éventuelle au prochain numéro...