RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ...
Cette rubrique est à vous. *Serge Parpay*

* Faut-il des sénateurs géomètres ?

Dominique Gaud nous a transmis un article du Canard Enchaîné (" J'aime bien Badinter, mais je trouve qu'il a une façon bien cavalière de parler de maths, même si le sujet est cavalier " précise notre éminent collègue). Voici l'extrait de l'article qui pose question : «...On arrive au cœur du débat : faut-il, pour protéger les chères têtes blondes, interdire la présence des sex-shops dans un rayon de 100 m, voire 300 m, autour d'une multiplicité d'établissements scolaires susceptibles d'être fréquentés par des mineurs [...] ? "*En commission,* explique Robert Badinter, *nous avons essayé de mesurer ce que représentait un périmètre de 300 m : nous sommes arrivés à 27 hectares, je crois. Si nous prenons la carte d'une ville et que nous traçons un cercle d'un tel rayon autour de chaque établissement, nous couvrons toute la ville !* " . Protestation de Patrice Gélard [sénateur RPR.] qui trouve ce calcul faux et absurde...»

* Un devoir en Terminale S.

Le texte ci-dessous a été proposé l'an dernier aux élèves d'une classe du lycée Jean Macé de Niort (devoir à la maison). Une autre solution, plus concise, a été publiée dans Panoramath 96 ; mais le but recherché n'était pas le même.

On se propose de résoudre un exercice donné au Concours Général (mathématiques classe Terminale S) en 1996.

Soit la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x^x$
Déterminer la valeur minimale prise par cette fonction lorsque x décrit l'ensemble des réels strictement positifs.
Soient x et y deux réels strictement positifs, montrer que $x^y + y^x > 1$

Première partie

1) Soit la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x^x$
Déterminer la valeur minimale prise par cette fonction lorsque x décrit l'ensemble des réels strictement positifs.
Montrer que l'on peut définir une fonction F continue sur $[0\,;+\infty[$ telle que pour $x > 0$ $F(x) = f(x)$; $x = 0$, $F(0) = 0$
On appellera m la valeur minimum prise par $f(x)$.
2) Construire la courbe représentative de F

Deuxième partie

Pour démontrer $x^y + y^x > 1$ on peut toujours supposer (à cause de la symétrie de l'inégalité) $0 < x \leq y$
1) Montrer que si $y \geq 1$ alors $y^x \geq 1$. En déduire que dans ce cas $x^y + y^x > 1$
2) Montrer que si $x = y$, alors $x^y + y^x > 1$
3) Conclusion : que reste-t-il à présent à montrer pour avoir : $x^y + y^x > 1$ pour tous x et y réels strictement positifs ?

Troisième partie

Dans toute cette partie a sera un nombre réel tel que **$0 < a < 1$.**

A) 1) Etudier la fonction φ définie sur $[0\,;a]$ $\varphi(x) = x^a$.
Tracer sa courbe représentative (Φ) (on choisira une valeur de a). On appellera A le point $(a, \varphi(a))$ de la courbe (Φ).
2) Trouver l'équation du segment [OA]
3) Etudier la position relative de (Φ) et du segment [OA]

B) 1) Etudier la fonction ψ définie sur $[0\,;a]$ par $\psi(x) = a^x$. Soit (Ψ) sa courbe représentative. On appellera B le point (0, 1) de (Ψ)
2) Trouver l'équation de la tangente (T) en B à (Ψ)
3) Tracer (Ψ) et la tangente (T) (on choisira la valeur de a choisie précédemment).
4) Etudier la position relative de (Ψ) et de (T) sur l'intervalle $[0\,;a]$.

C) 1) En utilisant A 3 et B 4, montrer que : $x^a + a^x \geq 1 + x\,(a^{a-1} + \ln a)$
2) En utilisant la première question de la première partie, montrer que : $a^a + \ln(a^a) > 0$. En déduire que $a^{a-1} + \ln a > 0$.
3) Montrer alors que pour $0 < x < a$, on a : $x^a + a^x > 1$
4) Conclure.

* Exercice

A l'occasion d'une réunion de travail sur le Rallye Mathématique de Poitou-Charentes, Jean Morin nous a proposé le problème suivant que nous vous soumettons.

Peut-on construire, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, un triangle équilatéral ABC tel que les coordonnées de A, de B et de C soient des nombres entiers ?

* Groupe des Allumaths.

Notre groupe, qui a été présenté dans le Corol'aire n° 30 et à la dernière assemblée générale de la Régionale de Saint-Jean d'Angély, démarre plutôt bien. Il n'est pas trop tard pour venir y travailler, bien au contraire. Vous avez des idées ? Surtout ne les gardez pas pour vous ; elles nous sont utiles ! Merci.

Problème proposé par Marc Blanchard dans le Corol'aire n°29 page 6.

Nous avons reçu outre bien sûr la solution de l'auteur celles de Daniel Daviaud, d'Alain Pichereau et de Serge Parpay.
Ces solutions sont de nature très différentes. Nous les confions au groupe des Allumaths pour "suite à donner". Nous pouvons cependant les transmettre à ceux qui souhaiteraient les avoir (écrire à la rédaction en joignant 12 F en chèque ou en timbres-poste pour couvrir les frais de photocopie et d'envoi).

* Exercice 1 du Concours Général 1997 (Corol'aire n° 30) : Rectificatif.

Alain Pichereau nous a fait parvenir des rectificatifs concernant sa solution au problème du Concours Général présentée dans le Corol'aire n° 30.

Voici la correction du paragraphe concerné avec, cette fois, les indices au bon niveau ! J. F.

Preuve de l'existence d'au moins un départ possible :

S'il n'existe pas de départ possible alors $\exists\, i_1 \in E$ tel que $\Sigma_1 = \Sigma(1,i_1) \le 0$ ($i_1 \neq 1997$ car $\Sigma(1,1997) = 1$), $\exists\, i_2 \in E$ tel que $\Sigma_2 = \Sigma(i_1+1, i_2) \le 0$, $\exists\, i_3 \in E$ tel que $\Sigma_3 = \Sigma(i_2+1, i_3) \le 0$,..., etc,
($i_k \neq i_{k+1}$) car $\Sigma(i_k+1, i_k) = 1$).
E étant un ensemble fini, il existe k et j tels que $1 \le k < j$ et $i_k = i_j$: c'est le principe des "tiroirs". (En fait $k+1 < j$ puisque $i_k \neq i_{k+1}$). Considérons $S = \Sigma_{k+1} + \Sigma_{k+2} + ... + \Sigma_j$: on a évidemment $S \le 0$, mais S est la somme des valeurs inscrites sur les jetons rencontrés lorsqu'on parcourt le polygone dans le sens trigonométrique à partir de v_{i_k+1} (compris ; $v_{1998} = v_1$ jusqu'à $v_{i_j} = v_{i_k}$ (compris) : forcément on a fait le tour du polygone exactement un nombre entier de fois et donc $S = l \times 1 = l$ avec $l \in \mathbb{N}^*$. D'où la contradiction avec $S \le 0$; il existe donc au moins un départ possible.
Remarque : ce résultat ne nécessite pas que les v_i soient des entiers relatifs.