RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ...
Cette rubrique est à vous. *Serge PARPAY*

La suite des exercices proposés par notre collègue Henry PLANE sera publiée dans le prochain numéro de Corol'aire.

Utilité de la moyenne !

Dans son livre, «*La fin du travail*», Editions La Découverte, 1996, Jeremy Rifkin écrit : *«En 1932, les organisations de travailleurs étaient passées de préoccupations quant à la qualité de la vie à des revendications de justice économique [.......]. Si les nouvelles technologies augmentaient la productivité et débouchaient sur des effectifs réduits et de la surproduction, l'unique antidote véritable résiderait dans une réduction des heures travaillées, de sorte que chacun eût un gagne-pain, des revenus et un pouvoir d'achat suffisants pour absorber les hausses de production.»* Le célèbre mathématicien et philosophe britannique **Bertrand Russell** résuma l'affaire en ces termes : ***«Il ne faut pas huit heures de travail pour certains et zéro pour d'autres, mais quatre heures de travail pour tous».*** *

*In *Praise of Idleness and Other Essays*, Londres 1935.

Exercice 1 du Concours Général 1997.

On a placé un jeton sur chaque sommet d'un polygone régulier de 1997 côtés. Sur chacun des jetons est inscrit un entier relatif, la somme de ces entiers relatifs étant égale à 1. On choisit un sommet de départ et on parcourt le polygone dans le sens trigonométrique en ramassant les jetons au fur et à mesure tant que la somme des entiers inscrits sur les jetons ramassés est strictement positive.
Peut-on choisir le sommet de départ de façon à ramasser tous les jetons ? Si oui combien y-a-t-il de choix possibles ?

Solution d'Alain Pichereau (Lycée Marguerite de Valois, Angoulème) :

Notons $v_1, v_2, \dots, v_{1997}$ les valeurs (entiers relatifs) des jetons situés sur les sommets successifs du polygône et $E = \{1, 2, \dots, 1997\}$. Pour tout $(i,j) \in E^2$. On notera $\Sigma(i,j)$ la somme des valeurs inscrites sur les jetons rencontrés lorsqu'on parcourt (au plus une fois) le polygône dans le sens trigonométrique à partir de v_i (compris) jusqu'à v_j (compris) :

$\forall i \in E$, $\Sigma(i,i) = v_i$, si $1 \le i < j \le 1997$, $\Sigma(i,j) = v_i + v_{i+1} + \dots + v_j$;

si $1997 \ge i > j \ge 1$, $\Sigma(i,j) = v_i + v_{i+1} + \dots + v_{1997} + v_1 + v_2 + \dots + v_j$. En particulier $\Sigma(1,1997) = 1$ et si $i \ne 1$ $\Sigma(i, i-1) = 1$.

<u>On conviendra</u> que $\forall i \in E$, $\Sigma(1998,i) = \Sigma(1,i)$ et $\Sigma(i,0) = \Sigma(i,1997)$ et donc $\Sigma(1998,1997) = \Sigma(1,0) = 1$.

<u>La question posée</u> revient à chercher s'il existe au moins un sommet de valeur v_i tel que $\forall i \in E$, $\Sigma(i,j) > 0$: <u>un tel sommet sera dit départ possible</u>. (cela implique $v_i > 0$).

<u>Preuve de l'existence d'au moins un départ possible :</u>

S'il n'existe pas de départ possible alors $\exists i_1 \in E$ tel que $\Sigma_1(1,i_1) \le 0$ ($i_1 \ne 1997$ car $\Sigma(1,1997) = 1$), $\exists i_2 \in E$ tel que $\Sigma_2(1,i_2) \le 0$, $\exists i_3 \in E$ tel que $\Sigma_3(1,i_3) \le 0$,..., etc, ($i_k \ne i_{k+1}$) car $\Sigma(i_k+1, i_k) = 1$).
E étant un ensemble fini, il existe k et j tels que $1 \le k < j$ et $i_k = i_j$: c'est le principe des "tiroirs". (En fait $k+1 < j$ puisque $i_k \ne i_{k+1}$). Considérons $S = \Sigma k+1 + \Sigma k+2 + \dots + \Sigma j$: on a évidemment $S \le 0$, mais S est la somme des valeurs inscrites sur les jetons rencontrés lorsqu'on parcourt le polygône dans le sens trigonométrique à partir de $v_{i_{k+1}}$ (compris ; $v_{1998} = v_1$ jusqu'à $v_{i_j} = v_{i_k}$ (compris) : forcément on a fait le tour du polygône exactement un nombre entier de fois et donc $S = l \times 1 = l$ avec $l \in \mathbb{N}^*$. D'où la contradiction avec $S \le 0$; il existe donc au moins un départ possible.
Remarque : ce résultat ne nécessite pas que les v_i soient des entiers relatifs.

<u>Montrons maintenant qu'il n'y a qu'un départ possible</u> :
S'il y avait deux départs possibles, les sommets de valeurs v_i et v_j avec $1 \le i < j \le 1997$ alors $\Sigma(i,j-1)$ et $\Sigma(j,i-1)$ seraient strictement positifs (rappel : on a convenu que $\Sigma(j,0) = \Sigma(j,1997)$), mais par hypothèse (capitale ici) les valeurs des jetons sont des entiers relatifs donc $\Sigma(i,j-1) + \Sigma(j,i-1) \ge 2$ et comme évidemment $\Sigma(i,j-1) + \Sigma(j,i-1) = 1$ on obtient une contradiction ; il ne peut y avoir deux départs possibles.
Si $j - 1 = i$ ou si $i = 1$ et $j = 1997$, v_i et v_j sont consécutifs : le raisonnement reste valable.

Conclusion : il existe un et un seul sommet de départ de façon à ramasser tous les jetons.

<u>Remarques</u>: 1) Bien entendu 1997 peut être remplacé par $n \in \mathbb{N}^*$.
2) J'ai trouvé une autre démonstration de l'existence d'au moins un départ possible : c'est une preuve algorithmique qui permet de localiser le seul départ possible, mais elle est plus délicate (et donc plus longue) à exposer.

Alain Pichereau.

Une solution algorithmique du problème (Serge Parpay, Niort).

On prendra l' exemple plus simple d' un polygone de 15 côtés, le cas général étant à traiter de la même façon.

Opération I :

Les nombres sont indexés par un numéro (1 à 15 sur l'exemple) dans le sens trigonométique.

Index	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
Nombres	- 8	22	- 11	- 12	- 2	5	4	8	0	1	- 4	- 7	- 9	17	- 3

Opération P : On supprime les 0 ; on établit (permutation circulaire) le parcours en alternant une suite de nombres positifs et une suite de nombres négatifs, en gardant les index affectés à chacun des nombres.

Index	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*1*
Nombres	22	- 11	- 12	- 2	5	4	8	0	1	- 4	- 7	- 9	17	- 3	- 8

Opération R : On fait la somme d'une suite de nombres positifs (resp. négatifs) en l'affectant de l'index du premier terme de la suite. On a alors une liste indexée de nombres alternativement positifs et négatifs.

Index	*2*	*3*	*6*	*11*	*14*	*15*
Nombres	22	-25	18	- 20	17	- 11

Opération S : On fait la somme du premier nombre avec le second en l'affectant de l'index de ce premier nombre, du troisième et du quatrième en l'affectant de l'index du troisième , etc..On a ainsi une nouvelle suite de nombres indexés qui nous ramène à une situation semblable à la situation initiale.

Index	*2*	*6*	*14*
Nombres	- 3	-2	6

On recommence ainsi autant que de besoin la succession des opérations P, R, S.

Au bout d'un nombre limité d'opérations, il reste le seul nombre 1 affecté d'un index d. C'est de cet index qu'il faut partir autour du polygone pour répondre au problème.

Dans l'exemple choisi :

Opération P :

Index	*14*	*2*	*6*
Nombres	6	- 3	-2

Opération R :

Index	*14*	*2*
Nombres	6	- 5

Opération S :

Index	*14*
Nombres	1

Il faut donc partir du nombre d'index 14, soit le nombre 17.

En reprenant les opérations à partir de ce nombre, on suit bien, évidemment, le déroulement du problème :

Index	*14*	*15*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
Nombres	17	- 3	- 8	22	- 11	- 12	- 2	5	4	8	0	1	- 4	- 7	- 9
	17	- 11		22	- 25			18					- 20		
	6			- 3				- 2							
	6			- 5											
	1														

Unicité de la solution : Supposons deux solutions a,..........e,f, ...,z et f,........,z ,a ,..........,e. Répondant aux exigences du problème on a nécessairement $a + ...+ e \geq 1$ (début de la première solution) et $f +.....+ z \geq 1$ (début de la seconde solution).

Donc $a + ...+ e + f + ... z \geq 2$, ce qui est incompatible avec $a + ...+ e + f +...... z = 1$, somme des jetons par hypothèse. Il y a une et une seule solution au problème.

Exercice : les collègues plus courageux pourront "théoriser" cet algorithme et l'envoyer à la rédaction !

Serge PARPAY

"Les IREM en péril":

Dans une lettre qu'il nous adressée le 15 juillet dernier, M. Xavier Aubert écrit au sujet de l'article de Jean Souville (Corol'aire n°29), "Les IREM en péril" : *«A l'heure où chaque professeur avait tendance à rester dans sa "tour d'ivoire", les IREM ont su provoquer des échanges, des dialogues entre matheux, des contacts avec des collègues du Supérieur sinon avec des psy. Tout cela fut excellent et le reste».* Il donne aussi son point de vue sur l'article de Pierre Dubrulle ; nous le publions dans ce numéro. Nous remercions M. Aubert pour l'intérêt qu'il porte à Corol'aire.