RU - BRI - COL L AGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

* Si vous savez additionner des entiers relatifs !

.... alors résolvez vite l'exercice 1 du concours général de mathématiques (classe terminale S) de cette année :

On a placé un jeton sur chaque sommet d'un polygone régulier à 1997 côtés. Sur chacun des jetons est inscrit un entier relatif, la somme de ces entiers relatifs étant égale à 1. On choisit un sommet de départ et on parcourt le polygone dans le sens trigonométrique en ramassant les jetons au fur et à mesure tant que la somme des entiers inscrits sur les jetons ramassés est strictement positive.
Peut-on choisir le sommet de départ de façon à ramasser tous les jetons ? Si oui combien y-a-t-il de choix possibles ?

N.D.L.R. : D'accord nous ne poserons pas ce problème à notre rallye ! Je tiens à rassurer et à aider nos aimables lecteurs : le polygone peut être irrégulier ! Bon courage !

S.P.

* Solutions de quelques exercices proposés dans le précédent Corol'aire.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, le système (S) de quatre équations à quatre inconnues :

$$\begin{aligned} &(1)\ (x+y+z+t) &&= 0\\ &(2)\ (xy+xz+xt+yz+yt+zt) &&= 0\\ &(3)\ (xyz+xyt+xzt+yzt) &&= 0\\ &(4)\ (xyzt) &&= 0 \end{aligned}$$

Solution de Jean-Yves Hély de Rennes (un fidèle lecteur !) :
La solution x = y = z = t = 0 est une solution évidente.
Montrons que c'est la seule solution.
D'après (4), l'un au moins des quatre nombres x, y, z, t est nul. Supposons que ce soit x. On a alors x = 0. L'équation (3) devient alors : y z t = 0. L'un au moins des trois nombres y, z, t est nul. Supposons que ce soit y. On a alors y = 0. L'équation (2) devient alors : z t = 0. L'un au moins des deux nombres z, t est nul. Supposons que ce soit z. On a alors z = 0 . D'après (1) on obtient ainsi t = 0. Comme le système (S) est symétrique, le fait d'avoir choisi d'abord x = 0 ne change rien à la résolution.
La SEULE solution est le quadruplet (0, 0, 0, 0).

Une autre solution : D'après les quatre équations de (S), x, y, z et t sont les solutions de l'équation $X^4 = 0$. (somme des racines, somme des doubles produits, somme des triples produits et produit nuls). Cette équation a évidemment une racine quadruple nulle. Donc la solution de (S) est le quadruplet (0, 0, 0, 0).

Corol'aire

2) Calculer $A = \int_a^b (x-a)^2(b-x)^2 dx$.

Réponse : $A = (b-a)^5 / 30$

Deux méthodes sont proposées par Jean-Yves Hely :
a) Intégrer A par parties.
b) Faire un changement de variable z = x - a.
Nous laissons la suite des calculs à nos lecteurs (le changement de variable z = x - (a+b)/2 est également à envisager).
Notre collègue complète sa solution par une remarque très intéressante (encadré ci-contre).

Considérons la suite $(A)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$A_n = \int_a^b (x-a)^n (b-x)^n \, dx.$$

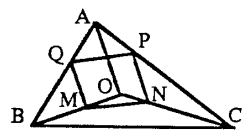
On peut trouver une relation de récurrence entre A_n et A_{n-1}, et trouver ensuite une expression de A_n en fonction de n.

On trouve $A_n = \frac{n(b-a)^2}{2(2n+1)} A_{n-1}$ et $A_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}$.

Pour n = 2, on trouve bien $A_2 = (b-a)^5 / 30$

3) Le dessin truqué de Belinda Fram-Heto (?) . (Solution de Jean-Yves Hély)

Données : MNPQ est un parallélogramme , (MQ) //(OA) et (NP) // (OA).
On va montrer que la figure ci-contre est "fausse" car on doit avoir :
(MN) // (BC) et (QP) // (BC).



Appliquons le théorème de Thalès dans ABO et dans ACO.
On peut écrire : $\frac{BM}{BO} = \frac{MQ}{AO}$ et $\frac{CN}{CO} = \frac{NP}{AO}$ d'où $\frac{BM}{BO} = \frac{CN}{CO}$ car MQ = NP.
La dernière égalité nous permet de dire que : (MN) // (BC).
Comme on le lit dans le texte, "ya donc kékchozkicloche" dans la figure initiale.
Il reste maintenant à savoir si une construction avec MNPQ parallélogramme et (MN) // (BC) est possible. En partant d'un point O et d'un segment [MN] tel que MN) // (BC), il est facile de montrer que le quadrilatère MNPQ obtenu est bien un parallélogramme.