RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

* Quatre exercices :

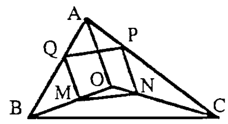
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, le système de quatre équations à quatre inconnues :

$$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ xy+xz+xt+yz+yt+zt = 0 \\ xyz+xyt+xzt+yzt = 0 \\ xyzt = 0. \end{cases}$$

2) Calculer $\int_a^b (x-a)^2(b-x)^2\,dx$.

3) Dans "Mathématiques et mathématiciens" de P. Dedron et J. Itard (Editions Magnard), on lit :
"Les Egyptiens, mis à part quelques rares exceptions comme les fractions 2/3 et 3/4, n'utilisent jamais que les fractions de numérateur 1 ; .... [Ainsi] 2/21 = 1/14 + 1/42 ".
Bien sûr les notations étaient autres (voir le livre).
Montrer que tout nombre rationnel p/q, inférieur à 1, peut se mettre sous la forme d'une somme d'inverses de nombres entiers tous différents. S.P.

4) Une dangereuse "psychomathe" ?
Belinda Fram-Heto s'était déjà signalée à Corol'aire en proposant un plan de piscine un peu bizarre (voir n° 26 : Rallye 96, exercice 11). Elle vient de nous faire parvenir le dessin ci-contre en affirmant que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme dont les côtés MQ et NP sont parallèles à la droite OA. Dialogue imaginaire : Zazie voyant le dessin : *"Kikaféça ?"*. Raymond Queneau : *"Belinda Fram-Heto ; mais je dirais, en parlant comme toi : yakékchozkicloche"*.
C'est sûr, il y a un réel problème ! S.P.



* Deux citations de grands mathématiciens :

"Un mathématicien qui n'est pas aussi quelque peu poète ne sera jamais un mathématicien complet ". Karl Weierstrass (1815-1897)

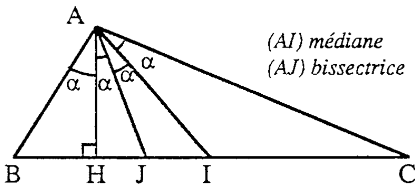
"Un savant digne de ce nom, surtout un mathématicien, éprouve dans son travail la même impression qu'un artiste, son plaisir est aussi grand et de même nature". Henri Poincaré (1854-1912)

* Exercice proposé par J. Fromentin.

Solution d'Alain PICHEREAU. Lycée M. de Valois. Angoulême.

Existe t-il un triangle ABC tel que la hauteur issue de A, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et la médiane relative au côté [BC] partagent l'angle $\widehat{BAC}$ en 4 angles de même mesure ? (le pied de la hauteur issue de A étant entre B et C).

Tout d'abord je ne reviens pas sur le fait que pour tout triangle non isocèle en A la bissectrice de $\widehat{BAC}$ est située entre la hauteur et la médiane issue de A.



<u>Recherche d'une condition nécessaire</u> : on se place d'abord dans le cas de figure où A et B sont du même côté de la médiatrice de [BC] (figure ci-contre).
α étant la mesure commune aux 4 angles, on a :
$3\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{6}\right[$. De BI = IC on tire BH + HI = HC - HI soit 2HI + BH = HC ce qui donne $2\tan 2\alpha + \tan\alpha = \tan 3\alpha$.

En posant $\tan\alpha = x$, $x \in \left]0\,,\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$, on obtient $\frac{4x}{1-x^2} + x = \frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ soit $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$, équation dont les solutions sont $\pm(\sqrt{2}+1)$ et $\pm(\sqrt{2}-1)$; mais $\tan\alpha \in \left]0\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$; la seule possibilité est donc $\tan\alpha = \sqrt{2} - 1$ soit $\alpha = \frac{\pi}{8}$ (sin $\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$, cos $\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ et tan $\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$, cela par utilisation de cos $\frac{\pi}{4}$, sin $\frac{\pi}{4}$). Donc nécessairement ABC est rectangle en A, l'angle en B valant $3\pi/8$ et celui en C $\pi/8$; dans le cas où c'est A et C qui sont du même côté de la médiatrice, on a comme condition nécessaire : ABC rectangle en A, mais l'angle en B valant $\pi/8$ et celui en C $3\pi/8$.

Une condition nécessaire est donc : ABC rectangle en A les 2 autres angles étant $\pi/8$ et $3\pi/8$.

<u>La condition est suffisante</u> car si ABC est rectangle en A avec par exemple un angle B égal à $\frac{3\pi}{8}$, on a $\widehat{BAH} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$ et $\widehat{HAC} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$; mais IB = IC = IA (propriété triangle rectangle) donc AIC isocèle et alors $\widehat{IAC} = \frac{\pi}{8}$.
Donc $\widehat{HAI} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{HAJ}$ et $\widehat{JAI}$ sont égaux à $\frac{\pi}{8}$: on a bien $\widehat{BAH} = \widehat{HAJ} = \widehat{JAI} = \widehat{IAC}$. ***Conclusion*** :

Les seuls triangles répondant à la question sont les triangles ABC rectangles en A, les 2 autres angles étant $\frac{\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}$.