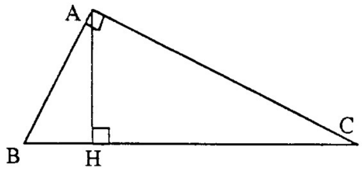
La géométrie d'Henry Plane.

Suite à la conférence d'Henry Plane à Niort le 12 mars dernier, nous avions présenté dans le Corol'aire n° 29 le théorème de Commandino et deux problèmes qu'Henry Plane avait résolus à l'aide de ce théorème. En voici d'autres applications.

1) Triangle ABC rectangle en A et de hauteur AH.



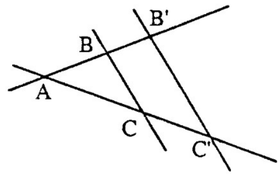
les trois triangles ABC, HBA et HAC sont "équiangles". Leurs aires sont donc proportionnelles aux carrés des côtés correspondants.

$\frac{(ABC)}{BC^2} = \frac{(HBA)}{AB^2} = \frac{(HAC)}{AC^2}$. Or (ABC) = (HBA) + (HAC),

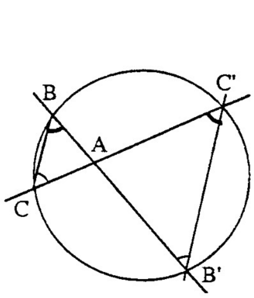
donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Cette démonstration apparaît dans LAMY (1683).

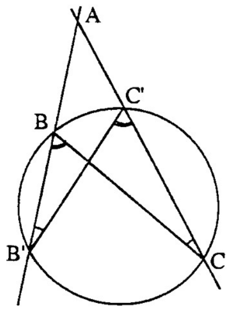
2) Figures remarquables des triangles équiangles.

a) Soit deux droites AB et AC sécantes en A, B' sur (AB) et C' sur (AC) tels que (BC) et (B'C') soient parallèles, on a, d'aprés des résultats précédemment obtenus à partir du théorème de COMMANDINO : $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$.



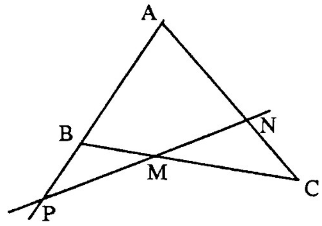
EUCLIDE et ARNAUD ont parlé de cette figure, chacun à sa façon. A la fin du 19ème siècle il lui fut, en France, associé le nom de l'homme de Milet et il fut parlé d'homothétie. On disait que AB et AB' sont "entre-eux" comme AC et AC'. On écrivait AB:AB' :: AC:AC'.





b)Toujours B' sur (AB) et C' sur (AC),
mais angle B'= angle C et angle C' = angle B.
Deux cas de figure :
On associe alors les triangles ABC et AC'B'.
$\frac{AB}{AC'} = \frac{AC}{AB'}$.
On disait avec FERMAT que AB et AB' sont "entre-eux" "réciproquement " comme AC et AC', ou que les "rectangles" AB. AB' et AC.AC' sont égaux.
Après PONCELET on verra les points B, B', C, C' cocycliques et on parlera de puissance de A par rapport au cercle. AB. AB' = AC.AC'.

3) Une propriété mise en avant par ROBERVAL.



$\frac{(PBM)}{(PAN)} = \frac{PB.PM}{PA.PN}$; $\frac{(MNC)}{(MPB)} = \frac{MN.MC}{MB.MP}$; $\frac{(NPA)}{(NCM)} = \frac{NP.NA}{NM.NC}$.

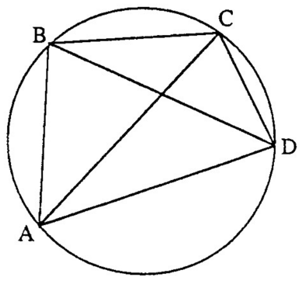
Si on oriente les aires : (PBM) = (MPB), (MNC) = (NCM), (NPA) = (PAN).

En faisant le produit des premières égalités et en simplifiant :

$1 = \frac{@(PB)}{@(PA)} \cdot \frac{@(MC)}{@(MB)} \cdot \frac{@(NA)}{@(NC)}$ Hommage à MENELAUS.

(NDLR : @(XY) voulant dire ici "mesure algébrique" de XY, le surlignage "traditionnel" étant techniquement difficile à obtenir par notre traitement de texte).

4) VIETE -début du 17ème siècle- a dégagé cette propriété qui en rappelle une autre de PTOLEMEE -2ème siècle- :



Un quadrilatère est inscrit dans un cercle. Comparons le triangle BCD au triangle ABD :

les angles BCD et BAD sont supplémentaires $\frac{(BAD)}{(BCD)} = \frac{AB.AD}{CB.CD}$.

Dans le triangle CAD, les angles CBD et CAD sont égaux $\frac{(CAD)}{(BCD)} = \frac{AC.AD}{BC.BD}$.

Dans le triangle CAB, les angles CDB et CAB sont égaux $\frac{(CAB)}{(BCD)} = \frac{AC.AB}{DC.DB}$.

Or (BAD) + (BDC) = (CAD) + (ACB) = (ABCD).

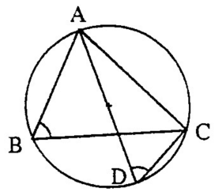
En divisant les deux membres par (BCD), il vient : $\frac{AB.AD}{CB.CD} + 1 = \frac{AC.AD}{BC.BD} + \frac{AC.AB}{DC.DB}$,

puis en multiplant de même par BC.CD.DB : AB.AD.DB. + BC.CD.DB = AC.CD.DA + AC.CB.BA

ou, après mise en facteur : $\frac{DB}{AC} = \frac{DA.DC + BA.BC}{AB.AD + CB.CD}$.

(Suite page 6)

5) Enfin, calculons une aire !



Un triangle ABC et sur son cercle circonscrit de rayon R le point D diamétralement opposé à A : angle ABC = angle ADC ; alors $\frac{(ABC)}{(ADC)} = \frac{BA.BC}{DA.DC}$ ou $(ABC) = (ADC).\frac{BA.BC}{DA.DC}$, mais l'angle ACD est droit, donc $(ADC) = \frac{1}{2}AC.DC$, $(ABC) = \frac{1}{2}AC.DC.\frac{BA.BC}{DA.DC} = \frac{1}{2}\frac{AC.BA.BC}{D\,A}$.

DA = 2R, et selon l'usage AB = c, BC = a , CA = b ; donc $(ABC) = \frac{a.b.c}{4R}$.