La géométrie d'Henry Plane.

Dans sa conférence du 12 mars dernier au lycée Paul Guérin de Niort Henry Plane nous a parlé entre autres d'un théorème de Frederico Commandino (1509 - 1575). Nous avons décidé de publier les "papiers" d'Henry Plane sous la forme d'un "feuilleton" dont voici le premier élément.

Rapport d'aires et rapports de produits de longueurs : le théorème de Commandino.

Euclide en parle -Livre VI proposition 23- au sujet des parallélogrammes ayant un angle égal. Commandino -fin 16ème siècle- détache ce théorème et l'applique au triangle. Dans son sillage, les commentateurs d'Euclide et les auteurs d'"Éléments de géométrie" en usent plus ou moins. Si, de Lemardele et Roberval -17ème siècle- à Camman -20ème siècle- il n'est pas totalement oublié, il devient peu utilisé en dehors du calcul d'aires.

Théorème de Commandino.

Soient deux droites se coupant en O, sur l'une deux points A et A', et sur l'autre deux points B et B'.

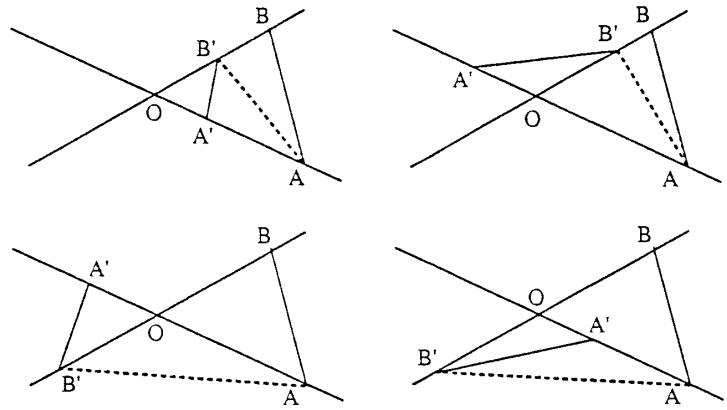
Comparons les aires notées (OAB) et (OA'B') des triangles OAB et OA'B'. Au moins quatre cas de figures, mais une seule démonstration.

Traçons AB'.

$\frac{(OAB)}{(OAB')} = \frac{OB}{OB'}$, triangles de même hauteur ;

De même, $\frac{(OA'B')}{(OAB')} = \frac{OA'}{OA}$.

Donc $\frac{(OAB)}{(OA'B')} = \frac{OA.OB}{OA'.OB'}$.



La propriété demeure pour des triangles égaux à ceux-ci. Alors on énoncera :

Si deux triangles ABC et A'B'C' sont tels que les angles BAC et B'A'C' sont soit égaux, soit supplémentaires,

alors on a $\frac{(ABC)}{(A'B'C')} = \frac{AB.AC}{A'B'.A'C'}$.

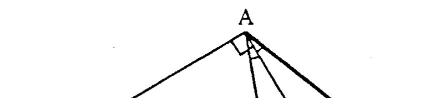
Le rapport des aires égale le rapport des produits des côtés des angles égaux ou supplémentaires.

Henry Plane résout alors les deux problèmes suivants :

* Problème n° 1.

AD et AE étant les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ du triangle ABC, montrer que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ et $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

Henry Plane ajoute : «C'est ici qu'en algébrisant (en orientant) la notion d'aire les choses seraient précisées... $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC}$ et $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = +\frac{AB}{AC}$ ».



* Problème n° 2.

Si les triangles ont deux couples d'angles égaux [«Triangles "équiangles" comme on disait au grand siècle (et encore au 19ème siècle) puisque les trois le sont» précise Henry Plane], montrer que $\frac{(ABC)}{(A'B'C')} = \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{BC^2}{B'C'^2} = \frac{CA^2}{C'A'^2}$.

Nous vous proposons donc de résoudre ces deux problèmes "à la méthode de Commandino". *A suivre...*