

Histoire des symboles. Le saviez-vous ? Proposée par Jean-Paul GUICHARD

(VIII) Limites

Le symbole "lim" que nous utilisons actuellement pour désigner une limite est le premier qui soit apparu, à la fin du 18^e siècle. Il s'agit en fait de l'abréviation du mot latin "limes" qui signifie limite. On le trouve pour la première fois, en 1786, chez le mathématicien français L'Huilier qui écrit "lim. q:Q". On trouve $\text{Lim. } \frac{\Delta y}{\Delta x}$ chez Garçaõ Stockler (Lisbonne 1794), Carnot (1897), Brinckley (Dublin 1818). On notera la présence d'un point après lim.

Carnot utilise aussi l'écriture " $L \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ ", pour laquelle il précise : "en désignant par L l'expression de limite ou de dernière valeur".

Cauchy, dans son Cours d'Analyse (1821), utilise "lim.". Mais il emploie un double parenthésage pour les cas où la limite n'est pas unique. Ainsi, quand x tend vers 0, il note différemment $\text{lim.}(\sin x)$ qui a une valeur unique 0, et $\text{lim.}(\frac{1}{x})$ qui a deux valeurs ou $\text{lim.}((\sin \frac{1}{x}))$ qui a une infinité de valeurs. Le point après lim dans "lim." a été progressivement abandonné.

Au 19^e siècle se fait sentir le besoin d'un symbolisme indiquant la limite de la variable. La notation la plus répandue en Europe est : $\text{Lim.}_{x=a}$. On la trouve par exemple chez Weierstrass : $\text{Lim.}_{x=\infty} p_n = \infty$ (1854).

A la fin du 19^e siècle, une tout autre notation " $\stackrel{\circ}{=}$ ", due à J.E. Oliver, est très utilisée aux Etats Unis. Il s'agit, en fait, de la réutilisation d'un signe existant signifiant "à peu près égal".

Voici ce qu'il en dit : "Utilisant = dans le sens de «approche la valeur de, comme limite», $U \stackrel{\circ}{=} C$ voudra dire de façon naturelle «U approche de C comme limite, quand Δx approche sa limite (c.-à-d. 0)». Entre son utilisation pour dire «à peu près égal à» et «approche comme limite» le contexte sera suffisamment déterminant".

D'autres signes ont été utilisés, tels $\mathfrak{L}$, $\sim$.

Mais revenons au symbolisme $\lim_{x=a}$ le plus couramment utilisé au 19^e siècle. Il est proche des deux notations au choix dans les programmes de Terminale de 1971 :

"On pourra utiliser l'une ou l'autre des notations :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l, \quad \lim_a f = l."$$

La notation avec une flèche, que nous utilisons actuellement, est due à l'anglais J.G. Leathem (1905) et a été rapidement adoptée. Le célèbre mathématicien anglais Hardy (1877-1947) note $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) = 0$, et dit : "J'ai suivi M.J.G. Leathem et M. T.J. l'A Brouwich en écrivant toujours $\lim_{n \rightarrow \infty}$, $\lim_{x \rightarrow \infty}$, $\lim_{x \rightarrow a}$, et non $\lim_{n=\infty}$, $\lim_{x=\infty}$, $\lim_{x=a}$."

Ce changement me semble d'une grande importance, en particulier quand la limite est ∞ . Je crois que d'écrire $n = \infty$, $x = \infty$ (comme si quelque chose pouvait être «égal à l'infini»), aussi commode que cela puisse être à un certain niveau, est à écarter, en début d'apprentissage, car cela favorise l'incohérence et la confusion de pensée à propos des idées fondamentales de l'analyse."

Se répand alors la notation avec une flèche pour la valeur de la fonction, comme dans $\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u'$, le symbole "lim" disparaissant. On retrouve abondamment cette notation dans les manuels des années 60, cohabitant éventuellement avec d'autres notations. Par exemple dans le tome d'algèbre (eh ! oui, il n'y avait pas à l'époque de tome d'analyse) du Lespinard et Pernet (classe de mathématiques élémentaires 1965) on peut lire :

"Fonction : $y = x\sqrt{3-2x}$ Quand $x \rightarrow \frac{3}{2}$, $y \rightarrow 0$. Quand $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$... $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{3-2x}}{x}$ quand $x \rightarrow -\infty$.

Or, $\sqrt{3-2x} \rightarrow +\infty$, donc il n'y a pas d'asymptote oblique...". On peut noter la présence du point à côté de lim.

Dans le même esprit que Cauchy, Peano introduit, en 1903, le signe "Lm" à la place de "lim" quand il y a plusieurs valeurs limites : Lm x signifie "les valeurs limites de x ", Lm (f,u,x) signifie "les valeurs limites de la fonction f , lorsque la variable, en variant dans la classe u , tend vers x ".

W.H. Young, en 1910, utilise Lt $f(x)$ pour désigner l'ensemble de toutes les limites de f au point a , et Lt $f(x)$ si l'on sait qu'il n'y a qu'une limite.

Pour terminer signalons que c'est à Lejeune Dirichlet (1837) que l'on doit l'idée de la notation $\lim_{x=a+0}$ et $\lim_{x=a-0}$ pour "limite quand x tend vers a par valeurs supérieures, respectivement par valeurs inférieures".

Quant aux notations pour les limites supérieures et inférieures, Pasch (Giessen 1887) a introduit l'écriture $\limsup y$ et $\liminf y$, et Pringsheim (Munich 1898) a

introduit $\overline{\lim}_{v \rightarrow +\infty} a_v = A$ et $\underline{\lim}_{v \rightarrow +\infty} a_v = \alpha$.