

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Rappelons le problème posé par Jean Fromentin dans le Supplément au Corollaire n° 23. Nous avons reçu pour ce problème une solution de Jean-Yves Hély de Rennes, proche de la solution de Collette Gripon, et une solution d'Alain Pichereau d'Angoulême que nous publierons dans le prochain Corollaire.

Existe-t-il un triangle ABC tel que la hauteur issue de A, la bissectrice de l'angle BAC et la médiane relative au côté [BC] partagent l'angle BAC en 4 angles de même mesure ?

Solution de Collette Gripon (Buxerolles)

Soit le triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit, H le pied de la hauteur issue de A sur le côté [BC], A' l'intersection de la médiatrice de [BC] avec l'arc BC. A' est le milieu de l'arc BC.

(AA') est la bissectrice de l'angle BAC, donc $\angle BAA' = \angle A'AC$.

(AH) // (OA') car ces deux droites sont perpendiculaires à (BC).

$\angle HAA' = \angle AA'O$ (angles alternes-internes) et $\angle AA'O = \angle A'AO$ (angles à la base du triangle isocèle AOA').

Par transitivité : $\angle HAA' = \angle A'AO$, d'où (AA') est bissectrice de l'angle HAO.

Pour répondre au problème posé, il faut donc que [AO] soit la médiane relative au côté [BC], donc que O soit le milieu de [BC] tout en étant centre du cercle circonscrit au triangle. Il faut donc que le triangle ABC soit rectangle en A. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

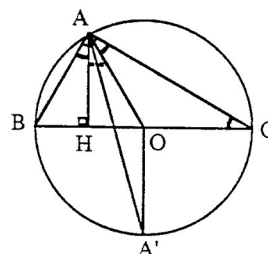
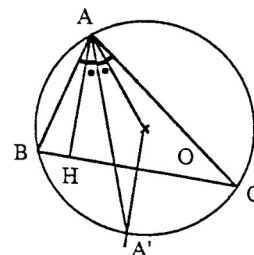
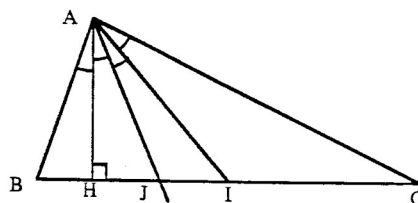
Angle HAO = angle B - angle C (dans tous les cas, triangle rectangle ou non)

Avec un triangle rectangle : angle HAO = 45° et angle C = angle AOC = $22,5^\circ$.

(Dans le cas de la figure ci-contre, ce n'est pas vrai.)

Conclusion : il existe un triangle ABC tel que la hauteur issue de A, la bissectrice de l'angle BAC et la médiane relative au côté [BC] partagent l'angle BAC en quatre angles de même mesure.

C'est un triangle rectangle en A et tel que l'angle C mesure $22,5^\circ$



Solution de Jean Fromentin.

La résolution de ce problème repose sur l'idée que les quatre angles égaux intercepteront quatre arcs de même mesure sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Partant de cette idée, considérons un cercle (C) de centre O, une corde [BC] de ce cercle et son milieu I. (Fig. 1)

Partageons l'arc BC en quatre arcs de même mesure : BM, MN, NP et PC. La bissectrice de l'angle ABC coupera le cercle au point N. La hauteur et la médiane issues de A étant de part et d'autre de la bissectrice, la médiane coupera le cercle (C) en P.

Construisons alors le point A, deuxième point d'intersection de la droite (PI) avec le cercle (C). Pour tout triangle ABC construit de la sorte à partir de la corde [BC], la médiane (AP) issue de A, la bissectrice (AN) de l'angle ABC et la droite (AM) partagent l'angle ABC en quatre angles de même mesure.

Il reste donc à construire la corde [BC] telle que (AM) soit la hauteur du triangle ABC.

(AM) est hauteur si et seulement si (AM) est parallèle à (ON). Les angles alternes-internes MAN et ANO ont donc même mesure. (Fig. 2) Par ailleurs, les angles MAN et NAO ont même mesure. Le triangle ANI doit donc être isocèle de sommet I. Or le triangle ANQ est isocèle de même angle à la base que le triangle ANI. Donc le point I est en O, et [BC] est un diamètre du cercle (C). (Fig. 3)

Le triangle ABC solution du problème est un triangle rectangle en A tel que $\angle ACB = \pi/8$ et $\angle ABC = 3\pi/8$.

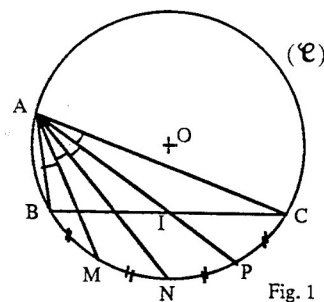


Fig. 1

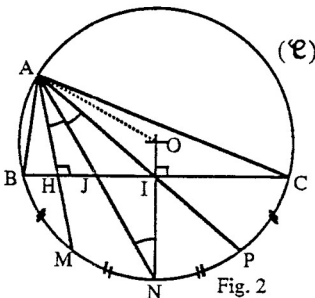


Fig. 2

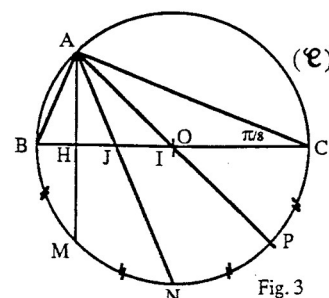


Fig. 3

Réponse à un problème posé dans le supplément au Corollaire n° 23 : "le fil en Y".

Jean -Yves Hély de Rennes.

Remarque préliminaire : Bien que l'énoncé soit écrit en anglais ... je préfère répondre en français ...

Le problème revient à chercher quel est le point M, intérieur à un triangle ABC, telle que la somme $MA+MB+MC$ soit minimale.

Méthode 1 : On connaît, a priori, la position du point M.

Propriété : Le point M qui rend minimale la somme de ses distances à trois points donnés A, B, C est tel que :
angle AMB = angle BMC = angle CMA.

Si on applique cette propriété au triangle isocèle ABC

(figure 1), on a immédiatement angle ABM = 30° car ABM est isocèle.

La position du point M sur la médiatrice de [AB] est alors parfaitement déterminée. Calculons la longueur minimale du fil :

$$l_{\min} = 2 BM + MC = 2(8 \sqrt{3} / 3) + 10 - (4 \sqrt{3} / 3)$$

$$l_{\min} = 10 + 4 \sqrt{3} = 12.93 \text{ m (par excès)}$$

Méthode 2 : On ne connaît pas, a priori, la position du point M.

On peut alors chercher à calculer la mesure α de l'angle géométrique ABM (figure 2).

On a $BM = 4 / \cos \alpha$ et $CM = 10 - 4 \tan \alpha$ ($0 \leq \alpha < \pi/2$). La longueur du fil est alors égale à $8 / \cos \alpha + 10 - 4 \tan \alpha$.

Étudions la fonction f définie sur $[0 ; \pi/2]$ par $f(\alpha) = 8 / \cos \alpha + 10 - 4 \tan \alpha$. On a $f'(\alpha) = 4 (2 \sin \alpha - 1) / \cos^2 \alpha$.

D'où $f'(\alpha) = 0$ pour $\alpha = \pi/6$, $f'(\alpha) < 0$ pour ($0 \leq \alpha < \pi/6$), $f'(\alpha) > 0$ pour ($\pi/6 < \alpha \leq \pi/2$).

Comme f est décroissante sur $[0 ; \pi/6]$ et croissante sur $[\pi/6 ; \pi/2]$, f présente un minimum pour $\alpha = \pi/6$.

On retrouve bien le même résultat que par la méthode 1.

A and B are two points on a horizontal beam 8 meters apart. A weight is suspended by a Y-shaped wire structure 10 m below the beam. Determine the shortest total length of wire that be used. Mathematical Association of South Australia.

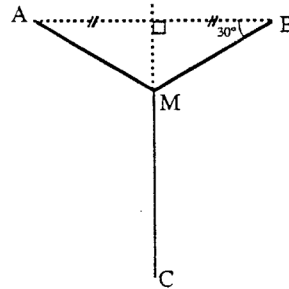
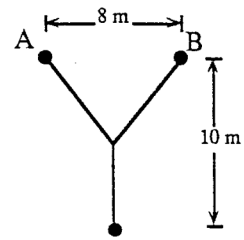


Figure 1

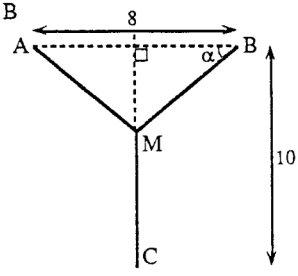


Figure 2