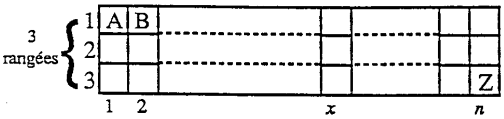
Solution au problème du Facteur

Ce problème, dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous, avait été proposé dans le Corol' aire n° 15 de décembre 1993. Les collègues ayant avoué l'avoir résolu se comptent sur les doigts d'une main... de menuisier ! A la demande du journal, l'auteur du problème nous transmet sa solution.

Vous devez déposer quelque chose dans un casier de la salle des profs du lycée de Jonzac. Vous connaissez le nom du collègue, mais pas l'emplacement. Le classement alphabétique utilisé est : gauche à droite, haut en bas. Et il y a tant de casiers que vous ne pouvez pas tous les embrasser d'un seul regard.



Plus précisément, vous ne pouvez voir que les 3 noms inscrits sur les 3 casiers de la colonne à laquelle vous faites face (il faut bien faire des hypothèses !). Et il faut se déplacer pour voir les autres noms.

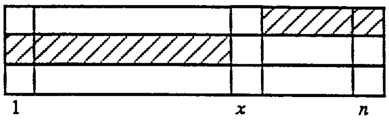
1) Si le casier cherché est dans la colonne qui est devant vous, vous avez 0 pas à faire.

2) Si ce n'est pas le cas mais que vous vous trouvez devant la colonne 1 ou la colonne n, vous déterminez aisément la rangée où se trouve le casier cherché et vous partez sans hésiter à sa rencontre : Heureux facteur !

3) Si étant devant une colonne intermédiaire x, $1 < x < n$, le casier cherché est dans la rangée du haut, avant celui qui vous fait face

ou bien dans la rangée du bas, après celui qui vous fait face. Là encore, vous partez directement vers lui : Heureux facteur !

4) Sinon, dernier cas, objet du problème : vous êtes en face d'une colonne x et le casier cherché se trouve dans l'un des 2 bouts de rangées, comme par exemple ceux qui sont hachurés ici.



Vous pouvez commencer la recherche en partant vers la droite ou vers la gauche : ANGOISSE POUR LE FACTEUR !

Est-il plus avantageux en nombre de pas de partir vers la gauche ou vers la droite ?

Le facteur est face à la colonne x. A sa gauche, se trouvent a casiers susceptibles d'être le bon ; à sa droite, il s'en trouve b. Bien sûr $a = x - 1$ et $b = n - x$.

En émettant l'hypothèse que tous les casiers sont équiprobables, on peut calculer le nombre moyen de pas à faire pour trouver le bon casier. (On dira que le facteur fait 1 «pas» quand il passe d'une colonne à une colonne voisine.)

S'il part vers la gauche, il doit faire :

1	pas pour atteindre le casier de la colonne	x - 1
2	....	x - 2
.....	....	.....
a	....	1
2a + 1	....	x + 1
2a + 2	....	x + 2
.....	....	.....
2a + b	....	n

Le nombre moyen de pas est donc :

$$m = [(1 + 2 + ... + a) + b \times 2a + (1 + 2 + ... + b)]/(n - 1)$$

$$\text{soit } m = \left[\frac{a(a+1)}{2} + 2ab + \frac{b(b+1)}{2}\right]/(n - 1).$$

On voit que cette expression est conservée si on permute a et b. On peut donc partir indifféremment vers la droite ou la gauche puisque, en moyenne, la distance à parcourir est la même. (Certains disent que «l'espérance mathématique» est la même.)

* Remarque 1.

$$m = \frac{a^2 + a + 4ab + b^2 + b}{4(n - 1)} = \frac{(a + b)^2 + (a + b) + 2ab}{4(n-1)}$$

$$= \frac{(n - 1)^2 + (n - 1) + 2ab}{4(n - 1)} = \frac{n}{4} + \frac{ab}{2(n - 1)}.$$

m est donc maximum quand ab l'est. Et comme a + b est constant, cela se produit quand a = b ou, à défaut, quand a et b sont consécutifs, c'est-à-dire quand le facteur (celui à la casquette !) est le plus proche possible du milieu.

* Remarque 2.

Une solution pratique pour éviter ce genre de tracas consiste à classer les casiers de la façon suivante :

A	D	------------------------------	X
B	E	------------------------------	Y
C	F		Z

Nous l'avons mise en œuvre avec succès au lycée de Jonzac.

Daniel Daviaud.

Rallye mathématique Poitou-Charentes 1996 - Classes primées

Classes de Troisième

Prix Académique

3ᵉA, collège Alfred de Vigny, Blanzac. (M. Lefeuvre)

Prix Départementaux

3ᵉA, collège Alfred de Vigny, Blanzac. (M. Lefeuvre)

Charente Maritime

3ᵉC, collège Agrippa d'Aubigné, Saintes. (M. Huort)

Deux-Sèvres

3ᵉA, collège Saint André, Saint-Maixent. (M. Lepetit)

Vienne

3ᵉC, collège André Brouillet, Couhé-Vérac. (Mme Bourchenin)

Prix Spécial du Jury

3ᵉD, collège François Rabelais, Niort. (M. Fromentin)

Classes de Seconde

Prix Académique

S^de^1, lycée Bellevue, Saintes. (M. Harry)

Prix Départementaux

Charente

S^de^6, lycée Marguerite de Valois, Angoulême. (Mme Téron)

Charente Maritime

S^de^B, lycée Saint Louis, Pont-l'Abbé d'Arnoult. (Mme Louradour)

Deux-Sèvres

S^de^7, lycée Paul Guérin, Niort. (M. Bacle)

Vienne

S^de^3, Lycée Pilote Innovant, Jaunay-Clan. (M. Boucher)

Prix Spécial du Jury

S^de^2, Lycée Pilote Innovant, Jaunay-Clan. (Mme Maréchal)

S^de^5, Lycée Léonce Vieljeux, La Rochelle. (Mme Chastenet)