Sur la difficulté de prévoir ou vérifier un résultat théorique à partir de courbes obtenues sur calculatrices graphiques.

A. PICHEREAU Lycée Marguerite de Valois , Angoulême

De nombreux exemples ont déjà été publiés : en particulier dans Repère n°14 (janvier 1994) et Bulletin APMEP n° 394 (juin 1994). En voici deux autres.

1- On demande aux élèves de déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ où $f(x) = x\,(\ln x)^8$.

Tous ceux ayant une calculatrice graphique font la courbe et affirment que cette limite est $+\infty$ car ... f(x) devient très grand pour x proche de zéro. Quel n'est pas leur étonnement lorsqu'ils s'aperçoivent qu'une bonne utilisation de $\lim\limits_{x\to 0} x^{\alpha} \ln x = 0$, $(\alpha > 0)$, les conduit à $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$!

Le tableau de variation de f et le mode de fonctionnement des calculatrices graphiques apportent l'explication sur cette apparente contradiction entre résultat théorique et résultat "donné" par la calculatrice :

a) f présente un maximum pour $x = e^{-8} \approx 3{,}35.10^{-4}$ de valeur $e^{-8}\,8^{-8} \approx 5628$.

b) Un XMIN et un XMAX étant choisis pour la fenêtre d'affichage de la courbe, la machine en fait ne représente que 96 points : ceux d'abscisses XMIN + i PAS pour i = 0,1,...95

avec $\text{PAS} = \dfrac{\text{XMAX - XMIN}}{95}$ (c'est l'intervalle entre deux pixels consécutifs, parallèlement à l'axe des abscisses, cas de la TI81) et évidemment à condition que l'abscisse soit dans le domaine de définition.

Dans notre cas, en prenant XMIN = 0, XMAX = 1, aucun point d'abscisse inférieure à e^{-8} n'est représenté puisque le point de plus petite abscisse représenté a pour abscisse 1/95 et donc pour ordonnée environ 1946, ce qui effectivement peut donner aux élèves l'impression que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ (YMIN = 0 , YMAX = 3000).

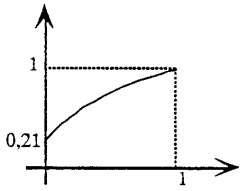
Par contre, en prenant $\text{XMAX} = 10^{-12}$, on vérifie bien à l'écran le résultat théorique. (YMIN = 0, YMAX = 1).

Cet exemple permet donc non seulement de sensibiliser les élèves au problème de l'analyse des résultats graphiques des calculatrices mais aussi au fait que devenir grand ne signifie pas devenir aussi grand que l'on veut !

2- Cette fois on considère $f(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$ (Bac 1989 Polynésie) et on demande $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

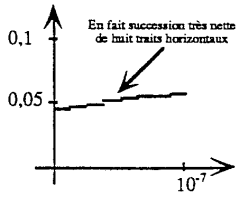
Par le calcul c'est évident ; mais que donne une calculatrice graphique ?

XMIN étant toujours pris égal à 0, si XMAX = 1 le point de plus petite abscisse représenté a pour ordonnée $f(1/95) \approx 0{,}21$ ce qui explique que l'on obtienne à l'écran (YMAX = 1) [Voir dessin ci-contre], et on n'a pas du tout l'impression que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, mais on vérifie tout de même que $\lim\limits_{x\to 1, x<1} f(x) = 1$.



Si $\text{XMAX} = 10^{-7}$, le point de plus petite abscisse représenté a cette fois pour ordonnée $f(10^{-7}/95) \approx 0{,}048$, certes plus proche de 0 que 0,21, mais le point de plus grande abscisse représenté a pour ordonnée $f(10^{-7}) \approx 0{,}062$ et donc en prenant YMIN = 0,1, la calculatrice donne une image comme indiquée ci-contre.

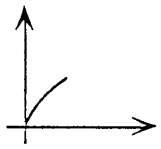
Là encore on n'a pas l'impression que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.



Pour cet exemple la calculatrice ne donne jamais quelque chose de "satisfaisant" pour les élèves, à savoir un dessin du style de la figure ci-contre.

Ceci est évidemment dû au fait que f(x) tend très lentement vers 0

$[\, f(10^{-n}) \approx \dfrac{1}{n \ln 10}$, $n \geq 1]$.



En conclusion, ces deux exemples permettent de montrer aux élèves qu'il est dangereux de vouloir obtenir des résultats théoriques à partir uniquement d'une représentation graphique donnée par une calculatrice et qu'il est préférable de savoir manipuler les propriétés du cours !