Nous vous faisions part, dans le numéro précédent de Corol'aire, d'une grande affluence à la conférence de ***Jean HOUDEBINE*** *à Niort le 29 mars dernier. Voici quelques notes recueillies auprès de collègues (nous remercions particulièrement Claude Robin) et rassemblées dans le texte suivant.*

LA DÉMONSTRATION

Des idées fausses.

Jean Houdebine commence par nous mettre en garde contre certaines idées fausses comme : une démonstration ne comporte que des choses vraies, ou bien une démonstration est une résolution de problèmes, ou encore le raisonnement est synonyme de démonstration.

Comprendre les structures de la démonstration

Il faut bien comprendre les diverses structures d'une démonstration. Dans une démonstration, il y a des **pas** ; et un pas, c'est appliquer un théorème de la forme : «Quelque soit x, si x possède la propriété P, alors x possède la propriété Q». Un pas a quatre composantes : la conclusion, le théorème, l'endroit où l'on applique le théorème et les hypothèses (ou données). Il arrive parfois au lycée, et même en collège, qu'une de ces composantes soit seulement suggérée.

Les quatre composantes d'un pas peuvent être complètement dispersées et pas nécessairement dans le «bon» ordre. De plus, un pas n'est pas obligatoirement complet. Dans l'exemple de pas suivant : *«Comme nous avons montré que le triangle ABC est rectangle, on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$»*, le théorème ne figure pas ; il est seulement suggéré par l'ensemble de la phrase. Pour les élèves il ne faut pas de démonstrations stéréotypées ; il faut au contraire leur montrer différentes façons de les exprimer.

Pour reconnaître que telle partie est un pas, il faut considérer le statut des propositions. C'est en effet leur statut qui compte. Voici une liste des différents statuts possibles : donnée de l'énoncé, proposition déjà démontrée, proposition issue d'une règle avec adjonction d'hypothèse, théorème, définition, conclusion intermédiaire, conclusion finale, endroit où le théorème est appliqué, objet sur lequel on travaille. Le sens ne joue pratiquement aucun rôle dans la structure même de la démonstration.

Mais il n'y a pas que des pas. Par exemple, dans une démonstration avec valeur absolue, on ajoute une hypothèse : $x > 0$ ou $x < 0$; de même dans un raisonnement par l'absurde : «supposons que ...» ; on donne parfois un nom à un objet qui n'est pas nommé ou on fait un tracé supplémentaire.

Beaucoup de démonstrations complexes commencent par des propositions qui ne sont pas des pas ; c'est par exemple la règle des cas : si on sait qu'il y a 2 cas, c'est-à dire A ou B est vrai, alors on admet A et on démontre C puis on admet B et on démontre C. C'est aussi la règle du raisonnement par l'absurde : on veut démontrer A, on ajoute la négation de A et on démontre que cela conduit à une contradiction. C'est encore la règle du choix d'un objet : On sait qu'il existe un objet possédant la proporiété P, «Soit x tel que ...».

Il faut se rendre compte que l'on peut rencontrer dès le collège des démonstrations qui ne soient pas stéréotypées avec uniquement des pas ; et il faut leur en montrer. Au lycée, il faut savoir que les élèves de collège n'ont rencontré pratiquement que des pas.

On ne peut pas parler des structures d'une démonstration sans parler du déductogramme.

Pour nous, professeurs de mathématiques, le déductogramme est une représentation très performante d'une démonstration ; et nous pouvons avoir la tentation de l'enseigner au collège. Mais les déductogrammes ne doivent pas être des objets d'apprentissage, et de plus, ils sont beaucoup moins compréhensibles qu'un texte. Pour comprendre la structure d'un texte, les représentations non textuelles sont très utiles mais chacun doit être libre de ses représentations. On veut apprendre aux élèves à écrire des démonstrations, pas des déductogrammes. Lire un texte, c'est ce que les élèves savent le mieux faire ; mais le texte n'a qu'un défaut, c'est qu'il est linéaire. Pour comprendre un texte, le déductogramme peut être une représentation car il permet de prendre de la distance ; mais la représentation peut être autre ; on peut demander aux élèves de faire des dessins, ils écriront des choses proches des déductogrammes, et ce sera à nous de les prendre à notre compte et de les mettre en valeur, sans aller jusqu'à son institutionnalisation.

Le contrat didactique

Suivant le niveau, les **exigences** ne sont pas les mêmes : en Quatrième, il est normal de demander de tout justifier, mais ce n'est pas le cas en Terminale ; la rupture se fait en Seconde. De plus, sur un même niveau, il n'y a pas de consensus chez les enseignants : si l'on leur demande de rédiger une démonstration qu'ils considèrent comme un modèle pour les élèves, leurs textes sont très différents. Il ne faut donc pas être trop sévère et trop strict avec les élèves. Cependant, on ne doit pas transiger sur certains points :

- les données du problème utiles pour la démonstration doivent au moins être suggérées,
- les pas doivent être repérables et avec une conclusion annoncée par une expression adaptée,
- une grande liberté peut être laissée au niveau de l'énoncé du théorème,
- les mots qui indiquent les statuts des propositions ne doivent présenter aucune ambiguïté,
- on doit éviter un aspect stéréotypé,
- les résultats intermédiaires qui ne sont pas utilisés aussitôt après avoir été démontrés doivent être énoncés à nouveau au moment de leur utilisation comme données d'un nouveau pas.

Dans **une démonstration litigieuse**, la difficulté est souvent de reconnaître le vrai et le faux. La meilleure stratégie est alors de considérer d'une part ce qu'il y a de positif pour pouvoir le dire à l'élève et de lui signaler d'autre part les vraies erreurs.

En ce qui concerne la **correction d'une copie**, on peut observer des annotations qui portent sur des niveaux très différents : orthographe, syntaxe, maladresses de style, vraies fautes... Et l'élève a du mal à s'y retrouver. On peut améliorer les choses en corrigeant moins de copies mais en mettant des annotations utiles, en ne corrigeant qu'une espèce de fautes et en disant aux élèves quel type de fautes on corrige, en mettant dans la marge seulement des indications pour rendre l'élève actif dans la correction de son travail.

Des obstacles à surmonter

Parmi les principaux obstacles à surmonter figure la complexité de certains théorèmes comme, par exemple, le théorème des milieux. Il peut être utile alors de proposer aux élèves des expressions différentes de théorèmes et de leurs réciproques, et de leur faire trier ces énoncés.

Une difficulté à surmonter est que l'élève prenne conscience du statut d'une proposition. En effet, il a tendance à faire le récit, la narration de sa solution, et non une démonstration.

Par ailleurs peut-on considérer les mathématiques comme «raisonnables» quand, par exemple, on se permet d'écrire $1 \leqslant 2$?

C'est une difficulté liée aux différences entre le langage courant et celui des mathématiques.

Il existe aussi des difficultés liées à certains types de problèmes, comme par exemple les problèmes d'alignement, qui demandent un traitement spécifique.

Des idées pour une stratégie d'apprentissage

Il est souvent plus facile de considérer ce qu'il ne faut pas faire. Voici quelques «mauvaises idées» :
- Donner de «bons» problèmes. Il vaut mieux rédiger des démonstrations sur des problèmes faciles.
- Donner des démonstrations sous forme d'organigrammes.
- Réduire la démonstration à une argumentation. Il faut, au contraire en maîtriser les différences : la démonstration ne cherche pas à convaincre, à enlever l'adhésion ; dans une argumentation, le sens est essentiel ; si dans une démonstration on donne un argument de trop c'est une faute alors que dans une argumentation il faut le plus d'arguments possible.
- Réduire la liberté d'expression. Si on impose un style stéréotypé, les élèves n'auront jamais une bonne expression.

Il s'agit plutôt d'avoir une nouvelle attitude didactique : comprendre les démarches des élèves ; analyser les copies et mettre des annotations adaptées ; faire rédiger des démonstrations sur des problèmes déjà résolus, (résoudre et rédiger sont deux capacités différentes) ; créer des activités diversifiées (cf : "Rédiger en mathématiques", IREM de Rennes), la démonstration est en effet un texte, il faut donc apprendre à écrire des textes ; réfléchir aux modèles que l'on propose.

La place de la démonstration dans l'enseignement des mathématiques.

La démonstration permet d'écrire des mathématiques ; et l'écriture de mathématiques est indispensable. Mais il ne faut pas oublier qu'il y a d'autres façons d'écrire des mathématiques : programmes de constructions, narrations de recherche ...

Il ne faut pas confondre résolution de problèmes et démonstration ainsi que raisonnement, preuve, et démonstration.