SUR UN EXEMPLE DE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

1) Les fonctions continues sans dérivée :

Des renseignements plus complets sur la question pourront être trouvés dans l'Encyclopédie Universelle et dans Historica Mathematica n°17-1990 (*Un demi-siècle de fractales* de Jean-Luc Chabert).

a) En 1872, Weierstrass donne la fonction $f(x) = \sum_{n\geq 0} b^n\cos(\pi a^n x)$ et démontre que cette fonction n'admet pas de dérivée dès lors que a est entier impair ≥ 3, $0<b<1$ et $ab>1+3\frac{\pi}{2}$. Hardy, en 1916, améliore ces conditions : $0<b<1$ et $ab>1$.

En 1860, Riemann avait cité la fonction $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}\sin(n^2x)$ sans démonstration, (cette démonstration n'est, semble-t-il, pas trouvée à ce jour).
Sur le même sujet : un article de Dubois-Raymond (1875), des lettres de Weierstrass (1873,1889), d'autres exemples donnés par Darboux (1875,1879).

b) Deux points de vue : Hermite, dans une lettre à Stieljes en 1893 : *"Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions sans dérivées"*. Et Poincaré en 1899 : *"Autrefois on inventait une fonction nouvelle dans un but pratique ; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela"*.

c) En 1904, von Koch présente sa célèbre *"courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire"*. Il y apporte la même année *"une modification pour que la courbe soit effectivement, à la limite, le graphe d'une fonction"*. Bolzano travaille sur cette fonction. Jean-Luc Chabert, dans l'article cité plus haut, rappelle le mouvement brownien, découvert par Roger Brown en 1827, étudié par la suite sous différents aspects par Einstein (1905), Borel (1912) : "Les trajectoires dans le mouvement brownien suggèrent les notions de fonctions continues sans dérivée", J.Perrin (1906), Wiener (1923), Levy (1930,1960).

d) **Georges William de Rham**, mathématicien suisse, qui fut correspondant de l'Académie des Sciences (cité dans Quid 1991), s'est intéressé aux fonctions sans dérivée et aux courbes sans tangente. M. Raïs, professeur à l'Université de Poitiers, avait présenté en 1988, lors d'un exposé dans le cadre de l'APMEP, un des exemples de G.de Rham.

2) G. de Rham a publié dans la revue *Enseignement Mathématique* de Janvier-mars 1957 un article intitulé :

Sur un exemple de fonction continue sans dérivée.

Cet exemple paraît d'un intérêt indéniable. Relativement simple, il permet une approche de la question par le dessin, soit manuellement soit par programmation informatique.
Voici le problème exposé par G. de Rham :

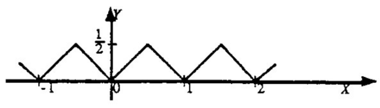
"Soit [y] le plus grand entier ne dépassant pas y et $\phi(x) = | x- [x+\frac{1}{2}] |$ la différence prise en valeur absolue entre x et l'entier le plus voisin de x. La fonction $f(x)= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\,\phi(2^kx)$ est continue et n'admet de dérivée pour aucune valeur de x".

G. de Rham donne une démonstration en dix-huit lignes de texte. On se propose ici de développer la question un peu plus longuement.

3) Etude de la fonction ϕ telle que $\phi(x) = | x- [x+1/2] |$:

$\phi(x)$ exprime tout simplement la distance entre x et l'entier le plus voisin de x, $\phi(x)$ valant 1/2 dans le cas où $x = n+1/2$, n entier relatif. On peut le démontrer facilement.

Exemple : $x = -\sqrt{7}$, $[-\sqrt{7} + 1/2] = -3$, $|-\sqrt{7} -(-3)| = 3 - \sqrt{7}$, soit en écriture décimale : x = - 2,64 ..., [-2,64...+0,5] = - 3, et f (-2,64..) = |-2,64..-(-3)|, ce qui donne bien 0,35 ...



La fonction ϕ est continue, affine par morceaux, périodique de période 1 .
Dans l'intervalle [0;1], on a : si $0\leq x\leq 0,5$, $\phi(x) = x$, et si $0,5<x\leq 1$, $\phi(x) = 1-x$.
D'où la courbe représentative ci-contre.

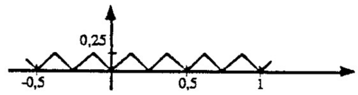
4) Etude de la fonction ϕ_k telle que $\phi_k(x) = 2^{-k}\,\phi(2^kx)$, k entier naturel.

La fonction ϕ étudiée ci-dessus est identique à ϕ_0.

a) La fonction ϕ_k est continue sur $\mathbb{R}$, affine par morceaux, périodique de période 2^{-k}.
On peut le démontrer directement. Le tableau de variation de la fonction dans l'intervalle $[2^{-k}p, 2^{-k}p+2^{-k}]$, avec p entier, mettra ce fait en évidence.

x	$2^{-k}p$		$2^{-k}p+2^{-k-1}$		$2^{-k}p+2^{-k}$
$2^k x$	p	$2^k x$	$p+1/2$		$p+1$
$\phi(2^k x)$	0	$\nearrow$ $2^k x - p$ $\nearrow$	$1/2$	$\searrow$ $p+1-2^k x$ $\searrow$	0
$\phi_k(x)$	0	$\nearrow$ $x - 2^{-k}p$ $\nearrow$	2^{-k-1}	$\searrow$ $2^{-k}(p+1) - x$ $\searrow$	0

Voici représentée graphiquement la fonction ϕ_2 sur l'intervalle [- 0,5 ; 1].



b) G. de Rham appelle pente moyenne dans [a;b] d'une fonction f le nombre $F([a;b]) = \dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$.

La pente moyenne de ϕ_k dans un intervalle [a;b] sera notée $\Phi_k([a;b])$.

La pente moyenne de ϕ_k est égale à 1 dans $[2^{-k}p; 2^{-k}p+2^{-k-1}]$ et dans tout intervalle inclus dans ce dernier, est égale à -1 dans $[2^{-k}p+2^{-k-1}; 2^{-k}p+2^{-k}]$ et dans tout intervalle inclus dans ce dernier.

5) Etude de la fonction f telle que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\phi(2^k x)$, soit encore $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x)$.

a) Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ puisque somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues (pour tout x, $0 \leq \phi(2^k x) \leq 1/2$, et la série majorante $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ converge). Elle est périodique de période 1, compte-tenu des périodicités des fonctions ϕ_k. On se contentera dans ce qui suit d'une étude dans l'intervalle [0;1] .

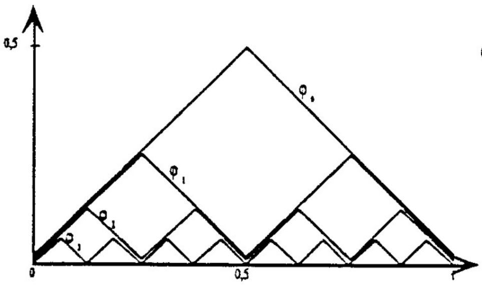
b) Représentation graphique : il est impossible de faire une représentation graphique d'une telle fonction. Mais on peut en donner une idée et débuter sa construction "par étapes", en faisant une "somme graphique" des représentations graphiques des fonctions $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$, ...

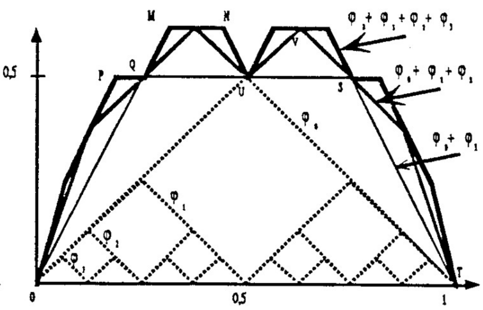
Ci-dessous sont représentées $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$, puis leur sommes. Au préalable un tableau montre comment calculer facilement les coordonnées des points correspondant aux extremums de chacune des fonctions dans [0;1] (pour éviter les dénominateurs, les coordonnées ont été multipliéespar 16).

$16x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$16\phi_0(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$16\phi_1(x)$	0	1	2	3	4	3	2	1	0	1	2	3	4	3	2	1	0
$16\phi_2(x)$	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0
$16\phi_3(x)$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
$16s(x)$	0	4	6	8	8	10	10	10	8	10	10	10	8	8	6	4	0

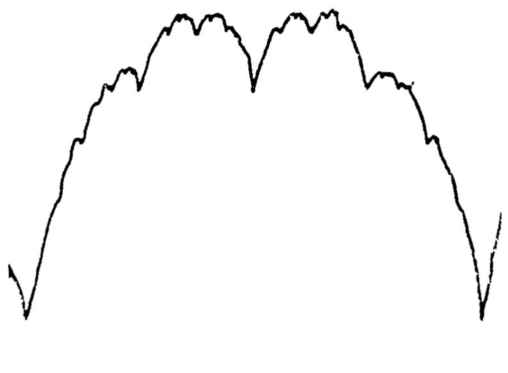
D'où les points (0,0), (1/16,4/16), ..., (0,0).

Le procédé est simple et peut être poursuivi avec les fonctions ϕ_4, ϕ_5, ... On remarque que dès que l'on rencontre un 0 dans une colonne les nombres placés au-dessous sont tous des 0, ce qui prouve que le point correspondant à la colonne est effectivement un point de la courbe (par exemple le point (13/16 ; 8/16)).





On peut obtenir ainsi autant de points de la courbe que l'on souhaite ! On remarque les symétries, les alignements (dont une étude plus poussée donne une technique de construction efficace). Dès qu'il y a un palier horizontal tel que MN, PQ,... une courbe semblable à celle déjà tracée prendra place "à échelle réduite" au dessus de ce palier. Chaque segment oblique tel que ST, UV,... sera la base d'une courbe obtenue après "déformation" de la courbe tracée : la courbe a une nature fractale.



6) Suite d'intervalles emboîtés contenant un nombre x donné :

m étant un entier positif, pour tout réel x, il existe un entier relatif p unique tel que $p\leq 2^m x<p+1$; on a : $p = [2^m x]$.
En conséquence $2^{-m}p\leq x<2^{-m}(p+1)$.

On peut donc définir une suite (I) d'intervalles emboités contenant x dont les termes s'écrivent $I_m = [2^{-m}p \; ; \; 2^{-m}(p+1)]$.
Cependant, s'il existe un entier m tel que l'on ait l'égalité à gauche, alors les intervalles I_{m+j} suivants avec j entier strictement positif, pourront être pris - soit tous de la forme $I_{m+j} = [2^{-m}p-2^{-m-j} \; ; \; 2^{-m}p]$,

- soit tous de la forme $I_{m+j} = [2^{-m}p \; ; \; 2^{-m}p+2^{-m-j}]$.

Par exemple, si x = 3/8, les intervalles seront : [0;1], [0;1/2], [1/4;2/4], [2/8;3/8], [5/16;6/16], [11/32;12/32], ...
ou [0;1], [0;1/2], [1/4;2/4], [3/8;4/8], [6/16;7/16], [12/32;13/32], ... ;

si $x = \sqrt{7} - 1$, les intervalles seront : [0;1], [1/2;2/2], [2/4;3/4], [5/8;6/8], [10/16;11/16], [20/32;21/32], ...

7) Etude de pentes moyennes pour la fonction f :

Soit un réel x et la suite (I) d'intervalles emboités contenant x. Soit $I_n = [a_n \; ; \; b_n]$ et $I_{n+1} = [a_{n+1} \; ; \; b_{n+1}]$ deux intervalles de cette suite, les bornes en étant définies comme précédemment.

Pour $k\geq n$, $\phi_k(a_n) = 0$, $\phi_k(b_n) = 0$; donc $f(a_n) = \phi_0(a_n) +.....+ \phi_{n-1}(a_n)$; $f(b_n) = \phi_0(b_n) +....+ \phi_{n-1}(b_n)$.

La pente moyenne de f sur I_n est $F(I_n) = \Phi_0(I_n) +.... + \Phi_{n-1}(I_n)$. Pour $k\geq n+1$, $\phi_k(a_{n+1}) = 0$, $\phi_k(b_{n+1}) = 0$;

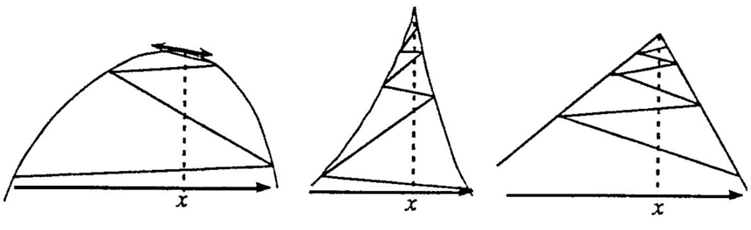
donc $f(a_{n+1}) = \phi_0(a_{n+1}) +.....+ \phi_n(a_{n+1})$; $f(b_{n+1}) = \phi_0(b_{n+1}) +....+ \phi_n(b_{n+1})$.
La pente moyenne de f sur I_{n+1} est $F(I_{n+1}) = \Phi_0(I_{n+1}) +....+ \Phi_{n-1}(I_{n+1}) + \Phi_n(I_{n+1})$.
Mais d'après les résultats démontrés ci-dessus en 4)b, comme I_{n+1} est inclus dans I_n,
$\Phi_0(I_{n+1}) = \Phi_0(I_n)$,..... ,$\Phi_{n-1}(I_{n+1}) = \Phi_{n-1}(I_n)$. On en déduit que $F(I_{n+1}) - F(I_n) = \Phi_n(I_{n+1})$.
Comme $\Phi_n(I_{n+1})$ ne peut prendre qu'une des deux valeurs -1 ou +1, l'égalité ci-dessus peut s'écrire : $| F(I_{n+1}) - F(I_n) | = 1$

8) *"La fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\phi(2^k x)$ est continue et n'admet de dérivée pour aucune valeur de x" :*

Reprenons alors le texte de G. de Rham : *"partons de la remarque que si f(x) était dérivable pour x = x\S\do3(0) sa pente moyenne $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ dans un intervalle $(x_1 \; ; \; x_2)$ contenant x_0 tendrait vers une limite, égale précisément à $f'(x_0)$, lorsque la longueur de cet intervalle tend vers zéro ?"* . (Une démonstration de ce théorème, due à Pierre Chevrier, est donnée en annexe).

a) Intuitivement : soit une fonction représentée par la courbe ci-contre, dérivable en x. Les intervalles emboités définissent des sécantes. On "voit" que ces sécantes prennent une direction de plus en plus voisine de la direction de la tangente à la courbe au point d'abscisse x. La direction "limite" de ces sécantes est celle de la tangente.
Au contraire, dans les exemples ci-contre, la courbe présentant un point anguleux, la fonction n'est pas dérivable en x, les sécantes peuvent prendre des directions très variables aussi petite que soit l'amplitude de l'intervalle contenant x. Il n'y a plus de limite !

a) Intuitivement : soit une fonction représentée par la courbe ci-contre, dérivable en x. Les intervalles emboités définissent des sécantes. On "voit" que ces sécantes prennent une direction de plus en plus voisine de la direction de la tangente à la courbe au point d'abscisse x. La direction "limite" de ces sécantes est celle de la tangente.



Au contraire, dans les deux autres exemples ci-dessus, la courbe présentant un point anguleux, la fonction n'est pas dérivable en x, les sécantes peuvent prendre des directions très variables aussi petite que soit l'amplitude de l'intervalle contenant x. Il n'y a plus de limite !

b) Revenons à la fonction de G.de Rham. Comme $|b_n - a_n| = 2^{-n}$, $\lim_{n\to+\infty}(|b_n - a_n|) = 0$.

Si la fonction f était dérivable au point x, on aurait $\lim_{n\to+\infty} F(I_n) = 0$, ce qui est en contradiction avec le résultat $| F(I_{n+1}) - F(I_n)| = 1$. **La fonction f n'est dérivable en aucun de ses points.**

c) Intuitivement, on peut dire que la constuction de la courbe "par étapes", expliquée en 5)b), nécessite la prise en compte de courbes avec des "dents" de plus en plus petites. On a des lignes polygonales circonscrites les unes aux autres, avec des côtés de plus en plus petits. Lorsqu'on prend une nouvelle dent, pour un x donné, la pente -1 ou +1 de la partie utilisée de cette dent est à ajouter à la pente obtenue dans l'étape précédente. La pente ne peut donc pas avoir de limite.

9) Voici la reproduction d'une **représentation graphique,** "approchée" naturellement ! , obtenue par un programme informatique.

10) Exercice : Calculer l'aire limitée par une arche (par exemple pour $0\leq x\leq 1$) et l'axe des abscisses.

Serge Parpay. Niort, mars 1997.