Association
des Professeurs
de Mathématiques
de l' Enseignement
Public

apmep

Régionale de Poitiers

Mars 1995 n° 20

COROL' AIRE

IREM, Fac. des Sciences,
40 Avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS CEDEX

ROUTAGE 206 DISPENSE DU TIMBRAGE POITIERS CENTRE DE TRI

Le numéro : 6 F.
Abonnement 1 an (4 numéros) : 20 F.
ISSN : 1145 - 0266

LE MOT DU PRÉSIDENT

Si on nous apprend pas ça Alors je dis: «Halte à tout!

Une des dernières chansons de Renaud parle d'une petite fille qui interroge son père sur l'école.

« Veulent me gaver comme une oie
'vec des matières indigestes,
J'aurai oublié tout ça
Quand j'aurai appris tout le reste»

Au delà des programmes et de leur valse lancinante, n'est ce pas un problème essentiel qui est posé ici ? Que souhaitons-nous qu'il reste de tout ce que nous essayons d' apprendre à nos élèves ? La réponse que nous faisons à cette question dépend de la représentation que nous avons de notre métier et détermine une partie de nos choix pédagogiques, de notre manière de vivre notre rôle d'enseignant. C'est une question importante que nous devons, je crois, nous poser ; elle nous permet de situer à leur véritables places les difficultés que nous rencontrons tous les jours et qui résonnent dans les salles des professeurs.

Un peu plus loin dans la chanson la petite fille dit :

« L'essentiel à nous apprendre
C'est l'amour des livres qui fait
Qu' tu peux voyager d'ta chambre
Autour de l' humanité»

Ne peut-on pas voir ici un objectif important des mathématiques qui peuvent permettre, avec un crayon, un papier, de s'évader, de créer, de penser le monde ? Comment faire partager à nos élèves ce plaisir de faire des mathématiques ?

Je terminerai par ce qui, finalement, me semble essentiel dans cette chanson : un objectif majeur de l'école ; il doit être travaillé par tous et à tout moment ; il s'agit du respect de l'autre. Nos stratégies pédagogiques peuvent y contribuer en mathématiques comme dans les autres disciplines, c'est un des enjeux fondamentaux de l'école ; ne le laissons pas sommeiller sous des kilos de contenus !

« L'essentiel à nous apprendre
[...]
C'est l'amour de son prochain
Même si c'est un beau salaud,
La haine ça n'apporte rien,
Pis elle viendra bien assez tôt.

Si on nous apprend pas ça
Alors je dis: «Halte à tout!»
Explique-moi, Papa
C'est quand qu'on va où ?»

J-P SICRE

SOMMAIRE

Le mot du Président p. 1
Histoire des symboles : le saviez-vous ? p. 2
La spirale et la Fourmi, suite ... p. 2
Vie associative p. 2
Rallye mathématique Poitou-Charentes p. 2
Fonction continue sans dérivée p. 3 à 6

Directeur .... Jean-Pierre SICRE
Rédacteur .... Jean FROMENTIN
Imprimerie .... IREM, Faculté des Sciences
40, Avenue du Recteur PINEAU
86022 POITIERS - CEDEX
Editeur .... APMEP Régionale de Poitiers
Siège social .... IREM, Faculté des Sciences
40, Avenue du Recteur PINEAU
86022 POITIERS - CEDEX
Dépôt légal .... Mars 1995

Histoire des symboles. Le saviez-vous ?

Proposée par Jean-Paul GUICHARD

(I) L'ÉGALITÉ

* Le signe = pour désigner l'égalité est apparu la première fois chez Recorde, mathématicien anglais, en 1557, mais ne s'est vraiment imposé en Europe qu'au début du 18ème siècle grâce à Leibniz.

* Avant on écrivait en toutes lettres : « *égalent, est égal à, égal à, doivent être égaux à, font* ... « dans la langue usuelle mais le plus souvent en latin : « *æquari, æquantur, æquabitur,* parfois abrégés en *æq., faciunt* ...». Une exception : l'utilisation d'un trait — Regiomontanus (1473), Pacioli (1494)

* De 1557 à 1720, il y a eu une grande variété de symboles cœxistant avec l'écriture en toutes lettres. Le symbole le plus employé ayant été celui de Descartes (1637) : ꝏ que l'on trouve encore souvent utilisé au début du 18ème siècle.

Voici un florilège :

[	Buteo (1559)
||	Xylander (1571)
	Carcavi (1649)
	De la Hire (1701)
♓	Digges (1590)
3	Andrea (1614)
2|2 et ⊔	Hérigone (1634)
⊓	Dulaurens (1667)
|	Reyher (1698)

* Chez Recorde les traits étaient plus longs et plus rapprochés : ═ . Il justifie sa notation en disant que deux choses ne peuvent être plus égales que deux lignes parallèles et de même longueur.

* Le signe = a été utilisé dans le même temps pour désigner :

- la différence arithmétique : **a = b** signifie |**a - b**| chez Viète (1591), Girard (1629), De Graaf (1672)
- ± chez Descartes (1638)
- la **virgule** d'un décimal Caramuel : **102=853** signifie **102,853**
- le parallélisme des droites, c'est à dire notre //, chez Dulaurens (1667), Reyher (1698)

VIE ASSOCIATIVE

Près de 150 collègues sont venus à la conférence de **Jean HOUDEBINE**, le 29 mars dernier à Niort, sur **la démonstration.** Notre prochain rendez-vous est fixé au 10 mai avec **Jean DHOMBRES** qui viendra nous parler de la **Quadrature du cercle** sous son aspect historique et philosophique, et en particulier au Moyen-âge. Jean DHOMBRES, Chercheur au C.N.R.S., est particulièrement apprécié par la communauté mathématique de Poitou-Charentes puisqu'il avait contribué, en tant que conférencier, au succès des Journées Nationales de Poitiers en 1993. Nous saluerons donc son retour le **10 mai prochain à l'Espace Mendes-France, à Poitiers, à 14h30.** Réservez dès à présent cette date.

La spirale et la fourmi : Retour aux sources !

1995 est l'année du tricentenaire de la mort de Monsieur de La Fontaine. Corol'aire avait précédé l'événement dans le numéro 19 avec l'article que nous avait transmis Bernard Lahorgue-Poulot sur le problème de La spirale et la fourmi. Mais il ne savait pas que ce problème venait d'un DIMATHÈME Seconde, au chapitre Géométrie dans l'espace, dans les deux éditions de 1985 et 1990. Ceci nous a valu un aimable courrier d'un des auteurs que les lecteurs de Corol'aire connaissent bien puisqu'il s'agit de Daniel DAVIAUD dont le problème **du facteur** (Corol'aire n° 15) est resté pour l'instant lettre morte ! (il n'est jamais trop tard pour bien faire [N.D.L.R.]). Aussi, voici la réponse de Corol'aire et le texte corrigé et complété de ce problème. Le lecteur se reportera au Corol'aire n° 19 pour retrouver les réponses des élèves Furmidable, Furmibond et Furminant.

Cher Daniel,

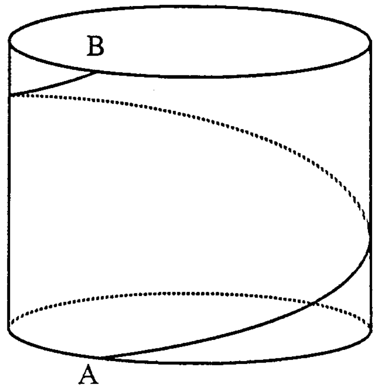
Je vois que ce cher Dimathème
Fait concurrence à La Fontaine.
C'est sûr, c'est sans aucune gêne
Que j'ai publié ce problème.

Je le dis plein de confusion,
je n'avais pas l'information.
En effet, sans hésitation,
j'en aurais fait la diffusion.

Il manque aussi l'ultime vers,
Et un dessin que j'ai à faire.
Ce sera, tu me crois, j'espère,
Dans notre prochain Corol'aire.

La spirale et la fourmi.

Les mesures seront données en centimètres.
Du cylindre étudié, dix est le diamètre
Et la hauteur AB est de onze et demi.
Du point A au point B chemine une fourmi.
Mais elle ne veut pas en ligne droite aller.
Elle a choisi de suivre un chemin spiralé.
C'est à 0,001 près
Que vous calculerez la longueur du chemin.
Et les explications que vous apporterez
Pourront, si vous voulez, être en alexandrins.



Erratum : Dans la réponse de l'élève Furminant, au lieu de $2 \times R \times$, il fallait lire $2 \times R \times \pi$

RALLYE MATHEMATIQUE de POITOU - CHARENTES.

Au moment où nous mettons ce Corol'aire sous presse, l'équipe organisatrice du Rallye a «rendu sa copie» ! Ce sont près de 2 300 élèves dans 90 classes de 40 établissements environ qui vont concourir

L'envoi est prévu dans la semaine du 3 au 7 avril. Les épreuves devraient parvenir dans les établissements avant le 13 avril. Si vous ne les avez pas à cette date, informez-vous auprès de votre chef d'établissement. Et en cas de problème, appelez l'IREM ou un des responsables mentionnés dans le dossier d'inscription.

N'hésitez pas à nous faire part rapidement de vos remarques concernant cette épreuve. Nous vous réserverons le meilleur accueil dans le prochain Corol'aire dans lequel nous publierons le palmarès de ce Rallye.

SUR UN EXEMPLE DE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

1) Les fonctions continues sans dérivée :

Des renseignements plus complets sur la question pourront être trouvés dans l'Encyclopédie Universelle et dans Historica Mathematica n°17-1990 (*Un demi-siècle de fractales* de Jean-Luc Chabert).

a) En 1872, Weierstrass donne la fonction $f(x) = \sum_{n\geq 0} b^n \cos(\pi\, a^n x)$ et démontre que cette fonction n'admet pas de dérivée dès lors que a est entier impair ≥ 3, $0<b<1$ et $ab>1+3\frac{\pi}{2}$. Hardy, en 1916, améliore ces conditions : $0<b<1$ et $ab>1$.

En 1860, Riemann avait cité la fonction $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \sin(n^2 x)$ sans démonstration, (cette démonstration n'est, semble-t-il, pas trouvée à ce jour).

Sur le même sujet : un article de Dubois-Raymond (1875), des lettres de Weierstrass (1873,1889), d'autres exemples donnés par Darboux (1875,1879).

b) Deux points de vue : Hermite, dans une lettre à Stieljes en 1893 : *"Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions sans dérivées"*. Et Poincaré en 1899 : *"Autrefois on inventait une fonction nouvelle dans un but pratique ; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela"*.

c) En 1904, von Koch présente sa célèbre *"courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire"*. Il y apporte la même année *"une modification pour que la courbe soit effectivement, à la limite, le graphe d'une fonction"*. Bolzano travaille sur cette fonction. Jean-Luc Chabert, dans l'article cité plus haut, rappelle le mouvement brownien, découvert par Roger Brown en 1827, étudié par la suite sous différents aspects par Einstein (1905), Borel (1912) : "Les trajectoires dans le mouvement brownien suggèrent les notions de fonctions continues sans dérivée", J.Perrin (1906), Wiener (1923), Levy (1930,1960).

d) **Georges William de Rham**, mathématicien suisse, qui fut correspondant de l'Académie des Sciences (cité dans Quid 1991), s'est intéressé aux fonctions sans dérivée et aux courbes sans tangente. M. Raïs, professeur à l'Université de Poitiers, avait présenté en 1988, lors d'un exposé dans le cadre de l'APMEP, un des exemples de G.de Rham.

2) G. de Rham a publié dans la revue *Enseignement Mathématique* de Janvier-mars 1957 un article intitulé :

Sur un exemple de fonction continue sans dérivée.

Cet exemple paraît d'un intérêt indéniable. Relativement simple, il permet une approche de la question par le dessin, soit manuellement soit par programmation informatique.

Voici le problème exposé par G. de Rham :

"Soit [y] le plus grand entier ne dépassant pas y et $\phi(x) = | x - [x+\frac{1}{2}] |$ la différence prise en valeur absolue entre x et l'entier le plus voisin de x. La fonction $f(x)= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \phi(2^k x)$ est continue et n'admet de dérivée pour aucune valeur de x".

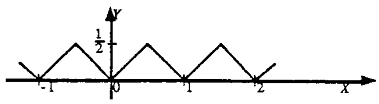
G. de Rham donne une démonstration en dix-huit lignes de texte. On se propose ici de développer la question un peu plus longuement.

3) Etude de la fonction ϕ telle que $\phi(x) = | x- [x+1/2] |$:

$\phi(x)$ exprime tout simplement la distance entre x et l'entier le plus voisin de x, $\phi(x)$ valant 1/2 dans le cas où $x = n+1/2$, n entier relatif. On peut le démontrer facilement.

Exemple : $x = -\sqrt{7}$, $[-\sqrt{7} + 1/2] = -3$, $|-\sqrt{7} -(-3)| = 3 - \sqrt{7}$, soit en écriture décimale : x = - 2,64 ..., [-2,64...+0,5] = - 3, et f (-2,64..) = |-2,64..-(-3)|, ce qui donne bien 0,35 ...

La fonction ϕ est continue, affine par morceaux, périodique de période 1 .
Dans l'intervalle [0;1], on a : si $0\leq x\leq 0{,}5$, $\phi(x) = x$, et si $0{,}5<x\leq 1$, $\phi(x) = 1-x$.
D'où la courbe représentative ci-contre.



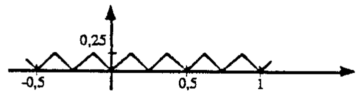
4) Etude de la fonction ϕ_k telle que $\phi_k(x) = 2^{-k} \phi(2^k x)$, k entier naturel.

La fonction ϕ étudiée ci-dessus est identique à ϕ_0.

a) La fonction ϕ_k est continue sur $\mathbb{R}$, affine par morceaux, périodique de période 2^{-k}.
On peut le démontrer directement. Le tableau de variation de la fonction dans l'intervalle $[2^{-k}p, 2^{-k}p+2^{-k}]$, avec p entier, mettra ce fait en évidence.

x	$2^{-k}p$			$2^{-k}p+2^{-k-1}$			$2^{-k}p+2^{-k}$
$2^k x$	p		$2^k x$	$p+1/2$			$p+1$
$\phi(2^k x)$	0	$\nearrow$	$2^k x - p$ $\nearrow$	$1/2$	$\searrow$	$p+1-2^k x$ $\searrow$	0
$\phi_k(x)$	0	$\nearrow$	$x - 2^{-k}p$ $\nearrow$	2^{-k-1}	$\searrow$	$2^{-k}(p+1)-x$ $\searrow$	0

Voici représentée graphiquement la fonction ϕ_2 sur l'intervalle [- 0,5 ; 1].



b) G. de Rham appelle pente moyenne dans [a;b] d'une fonction f le nombre $F([a;b]) = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}$.

La pente moyenne de ϕ_k dans un intervalle [a;b] sera notée $\Phi_k([a;b])$.

La pente moyenne de ϕ_k est égale à 1 dans $[2^{-k}p; 2^{-k}p+2^{-k-1}]$ et dans tout intervalle inclus dans ce dernier, est égale à -1 dans $[2^{-k}p+2^{-k-1}; 2^{-k}p+2^{-k}]$ et dans tout intervalle inclus dans ce dernier.

5) Etude de la fonction f telle que $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\phi(2^k x)$, soit encore $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x)$.

a) Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$ puisque somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues (pour tout x, $0 \le \phi(2^k x) \le 1/2$, et la série majorante $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ converge). Elle est périodique de période 1, compte-tenu des périodicités des fonctions ϕ_k. On se contentera dans ce qui suit d'une étude dans l'intervalle [0;1] .

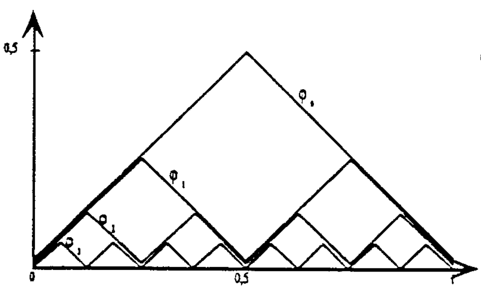
b) Représentation graphique : il est impossible de faire une représentation graphique d'une telle fonction. Mais on peut en donner une idée et débuter sa construction "par étapes", en faisant une "somme graphique" des représentations graphiques des fonctions $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, ...$

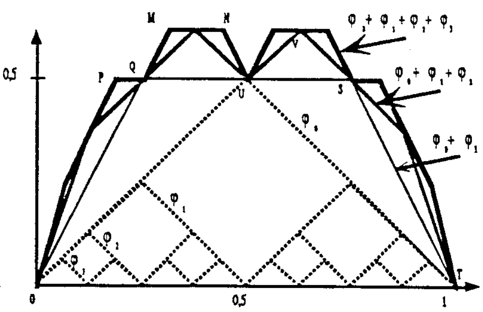
Ci-dessous sont représentées $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$, puis leur sommes. Au préalable un tableau montre comment calculer facilement les coordonnées des points correspondant aux extremums de chacune des fonctions dans [0;1] (pour éviter les dénominateurs, les coordonnées ont été multipliéespar 16).

16 x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$16\phi_0(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$16\phi_1(x)$	0	1	2	3	4	3	2	1	0	1	2	3	4	3	2	1	0
$16\phi_2(x)$	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1	0
$16\phi_3(x)$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
16 s(x)	0	4	6	8	8	10	10	10	8	10	10	10	8	8	6	4	0

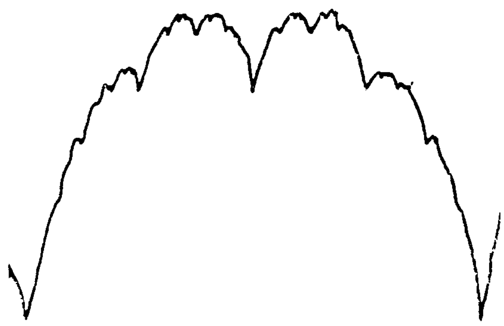
D'où les points (0,0), (1/16,4/16), ..., (0,0).

Le procédé est simple et peut être poursuivi avec les fonctions $\phi_4, \phi_5, ...$. On remarque que dès que l'on rencontre un 0 dans une colonne les nombres placés au-dessous sont tous des 0, ce qui prouve que le point correspondant à la colonne est effectivement un point de la courbe (par exemple le point (13/16 ; 8/16)).





On peut obtenir ainsi autant de points de la courbe que l'on souhaite ! On remarque les symétries, les alignements (dont une étude plus poussée donne une technique de construction efficace). Dès qu'il y a un palier horizontal tel que MN, PQ,... une courbe semblable à celle déjà tracée prendra place "à échelle réduite" au dessus de ce palier. Chaque segment oblique tel que ST, UV,... sera la base d'une courbe obtenue après "déformation" de la courbe tracée : la courbe a une nature fractale.



6) Suite d'intervalles emboîtés contenant un nombre x donné :

m étant un entier positif, pour tout réel x, il existe un entier relatif p unique tel que $p \leq 2^m x < p+1$; on a : $p = [2^m x]$.
En conséquence $2^{-m} p \leq x < 2^{-m}(p+1)$.

On peut donc définir une suite (I) d'intervalles emboités contenant x dont les termes s'écrivent $I_m = [2^{-m}p \; ; \; 2^{-m}(p+1)]$.
Cependant, s'il existe un entier m tel que l'on ait l'égalité à gauche, alors les intervalles I_{m+j} suivants avec j entier strictement positif, pourront être pris - soit tous de la forme $I_{m+j} = [2^{-m}p - 2^{-m-j} \; ; \; 2^{-m}p]$,

- soit tous de la forme $I_{m+j} = [2^{-m}p \; ; \; 2^{-m}p + 2^{-m-j}]$.

Par exemple, si x = 3/8, les intervalles seront : [0;1], [0;1/2], [1/4;2/4], [2/8;3/8], [5/16;6/16], [11/32;12/32], ...
ou [0;1], [0;1/2], [1/4;2/4], [3/8;4/8], [6/16;7/16], [12/32;13/32], ... ;

si $x = \sqrt{7} - 1$, les intervalles seront : [0;1], [1/2;2/2], [2/4;3/4], [5/8;6/8], [10/16;11/16], [20/32;21/32], ...

7) Etude de pentes moyennes pour la fonction f :

Soit un réel x et la suite (I) d'intervalles emboités contenant x. Soit $I_n = [a_n \; ; \; b_n]$ et $I_{n+1} = [a_{n+1} \; ; \; b_{n+1}]$ deux intervalles de cette suite, les bornes en étant définies comme précédemment.

Pour $k \geq n$, $\phi_k(a_n) = 0$, $\phi_k(b_n) = 0$; donc $f(a_n) = \phi_0(a_n) + \ldots + \phi_{n-1}(a_n)$; $f(b_n) = \phi_0(b_n) + \ldots + \phi_{n-1}(b_n)$.

La pente moyenne de f sur I_n est $F(I_n) = \Phi_0(I_n) + \ldots + \Phi_{n-1}(I_n)$. Pour $k \geq n+1$, $\phi_k(a_{n+1}) = 0$, $\phi_k(b_{n+1}) = 0$;

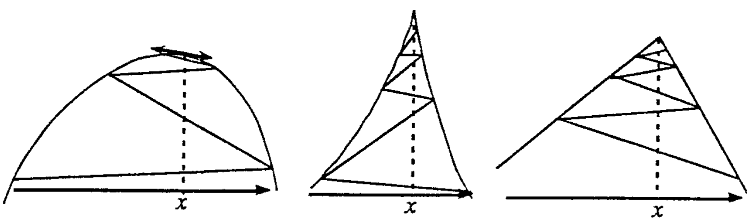
donc $f(a_{n+1}) = \phi_0(a_{n+1}) + \ldots + \phi_n(a_{n+1})$; $f(b_{n+1}) = \phi_0(b_{n+1}) + \ldots + \phi_n(b_{n+1})$.
La pente moyenne de f sur I_{n+1} est $F(I_{n+1}) = \Phi_0(I_{n+1}) + \ldots + \Phi_{n-1}(I_{n+1}) + \Phi_n(I_{n+1})$.
Mais d'après les résultats démontrés ci-dessus en 4)b, comme I_{n+1} est inclus dans I_n,
$\Phi_0(I_{n+1}) = \Phi_0(I_n), \ldots, \Phi_{n-1}(I_{n+1}) = \Phi_{n-1}(I_n)$. On en déduit que $F(I_{n+1}) - F(I_n) = \Phi_n(I_{n+1})$.
Comme $\Phi_n(I_{n+1})$ ne peut prendre qu'une des deux valeurs -1 ou +1, l'égalité ci-dessus peut s'écrire : $| F(I_{n+1}) - F(I_n) | = 1$

8) *"La fonction $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\phi(2^k x)$ est continue et n'admet de dérivée pour aucune valeur de x" :*

Reprenons alors le texte de G. de Rham : *"partons de la remarque que si f(x) était dérivable pour x = x\S\do3(0) sa pente moyenne $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ dans un intervalle $(x_1 \; ; x_2)$ contenant x_0 tendrait vers une limite, égale précisément à $f'(x_0)$, lorsque la longueur de cet intervalle tend vers zéro ?"* . (Une démonstration de ce théorème, due à Pierre Chevrier, est donnée en annexe).

a) Intuitivement : soit une fonction représentée par la courbe ci-contre, dérivable en x. Les intervalles emboités définissent des sécantes. On "voit" que ces sécantes prennent une direction de plus en plus voisine de la direction de la tangente à la courbe au point d'abscisse x. La direction "limite" de ces sécantes est celle de la tangente.
Au contraire, dans les exemples ci-contre, la courbe présentant un point anguleux, la fonction n'est pas dérivable en x, les sécantes peuvent prendre des directions très variables aussi petite que soit l'amplitude de l'intervalle contenant x. Il n'y a plus de limite !

a) Intuitivement : soit une fonction représentée par la courbe ci-contre, dérivable en x. Les intervalles emboités définissent des sécantes. On "voit" que ces sécantes prennent une direction de plus en plus voisine de la direction de la tangente à la courbe au point d'abscisse x. La direction "limite" de ces sécantes est celle de la tangente.



Au contraire, dans les deux autres exemples ci-dessus, la courbe présentant un point anguleux, la fonction n'est pas dérivable en x, les sécantes peuvent prendre des directions très variables aussi petite que soit l'amplitude de l'intervalle contenant x. Il n'y a plus de limite !

b) Revenons à la fonction de G.de Rham. Comme $|b_n - a_n| = 2^{-n}$, $\lim_{n \to +\infty} (|b_n - a_n|) = 0$.

Si la fonction f était dérivable au point x, on aurait $\lim_{n \to +\infty} F(I_n) = 0$, ce qui est en contradiction avec le résultat $| F(I_{n+1}) - F(I_n) | = 1$. **La fonction f n'est dérivable en aucun de ses points.**

c) Intuitivement, on peut dire que la constuction de la courbe "par étapes", expliquée en 5)b), nécessite la prise en compte de courbes avec des "dents" de plus en plus petites. On a des lignes polygonales circonscrites les unes aux autres, avec des côtés de plus en plus petits. Lorsqu'on prend une nouvelle dent, pour un x donné, la pente -1 ou +1 de la partie utilisée de cette dent est à ajouter à la pente obtenue dans l'étape précédente. La pente ne peut donc pas avoir de limite.

9) Voici la reproduction d'une **représentation graphique,** "approchée" naturellement ! , obtenue par un programme informatique.

10) Exercice : Calculer l'aire limitée par une arche (par exemple pour $0 \leq x \leq 1$) et l'axe des abscisses.

Serge Parpay. Niort, mars 1997.

Critère de dérivabilité d'une fonction en un de ses points. *

1) Dans son article "Sur un exemple de fonction continue sans dérivée" (Enseignement mathématique Janvier - mars 1957), G. de Rham écrit :

"Partons de la remarque que si f(x) était dérivable pour $x = x_0$, sa pente moyenne $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ dans un intervalle (x_1, x_2) contenant x_0 tendrait vers une limite égale précisément à $f'(x_0)$, lorsque la longueur de cet intervalle tend vers 0".

Cette phrase peut être traduite précisément par (A) :

> Si f est dérivable en x_0, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, quels que soient les réels x et x' vérifiant $x \leq x_0 \leq x'$ et $0 < x'-x < \alpha$, on a $\left| \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$.

Démonstration : Soit ε un réel strictement positif ; f étant dérivable en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que : quel que soit le réel x vérifiant $|x - x_0| < \alpha$ et $x \neq x_0$, on a : $\left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$, soit $|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| < \varepsilon\,|x - x_0|$.

Soient x et x' des réels vérifiant $x \leq x_0 \leq x'$ et $0 < x' - x < \alpha$.

$$\begin{aligned}|f(x') - f(x) - (x' - x)\,f'(x_0)| &= |f(x') - f(x_0) - (x' - x_0)\,f'(x_0) + f(x_0) - f(x) - (x_0 - x)\,f'(x_0)| \\ &\leq |f(x') - f(x_0) - (x' - x_0)\,f'(x_0)| + |f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\,f'(x_0)| \\ &< \varepsilon\,|x' - x_0| + \varepsilon\,|x - x_0|,\end{aligned}$$

[l'une au moins des inégalités $|f(x') - f(x_0) - (x' - x_0)\,f'(x_0)| \leq \varepsilon\,|x' - x_0|$ et $|f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\,f'(x_0)| \leq \varepsilon\,|x - x_0|$ est stricte car $x \neq x_0$ ou $x' \neq x_0$ du fait que $x < x'$]

Donc $|f(x') - f(x) - (x'-x)\,f'(x_0)| < \varepsilon\,(x'-x_0) + \varepsilon\,(x_0 - x) = \varepsilon\,(x' - x)$ d'où $\left| \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$

2) Supposons f dérivable en x_0 ; posons $x_n = 2^{-n}\,[2^n x_0]$, $x'_n = x_n + 2^{-n}$ et $r_n = \dfrac{f(x'_n) - f(x_n)}{x'_n - x_n}$;

(r_n) a pour limite $f'(x_0)$.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. D'après (A), il existe $\alpha > 0$ tel que quels que soient x et x' vérifiant $x \leq x_0 \leq x'$ et $0 < x' - x < \alpha$, on a $\left| \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$

Soit n_0 tel que $n \geq n_0$ implique $2^{-n} < \alpha$; alors $0 < x'_n - x_n < \alpha$ et $x_n \leq x_0 < x'_n$, donc $|r_n - f'(x_0)| < \varepsilon$.

3) G. de Rham, dans l'exemple de fonction qu'il donne, raisonne par contradicion en montrant que cette suite (r_n) est divergente, car vérifiant $r_{n+1} - r_n = \pm 1$.

4) On peut généraliser 2) en montrant de la même manière que si f est dérivable en x_0, alors, quelle que soit la suite (α_n) à termes strictement positifs convergeant vers 0, quelles que soient les suites (x_n), (x'_n) vérifiant $x'_n - x_n = \alpha_n$, $x_n \leq x_0 \leq x'_n$, alors la suite (r_n) définie par $r_n = \dfrac{f(x'_n) - f(x_n)}{x'_n - x_n}$ est convergente (d'ailleurs de limite $f'(x_0)$).

Par contraposé, on aurait le critère de non dérivabilité en x_0 suivant (en quelque sorte celui utilisé par de Rham) :

> S'il existe une suite (α_n) à termes strictement positifs convergeant vers 0 et s'il existe des suites (x_n), (x'_n) vérifiant $x'_n - x_n = \alpha_n$ et $x_n \leq x_0 \leq x'_n$ telles que la suite (r_n) définie par $r_n = \dfrac{f(x'_n) - f(x_n)}{x'_n - x_n}$ soit divergente, alors f n'est pas dérivable en x_0.

Pierre Chevrier, Lycée Jean Macé, Niort.

* Complément à l'exposé fait par S. Parpay le 15/12/93.