Un usage inattendu de la loi binomiale

On considère l'ensemble des fonctions réelles continues définies sur un intervalle I fermé borné de R. Soit C(I) cet ensemble et P(I) le sous-ensemble des fonctions polynomiales. I est un compact de R, son image par une fonction continue est un compact.
Les fonctions de C(I) sont *bornées* et *uniformément continues* sur I.
Sans restreindre la généralité, on peut prendre $I = [0, 1]$.

a) Soit $p_{n,k}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$; $n \in N^*, 0 \leq k \leq n, \ x \in [0, 1]$.
On sait par l'étude de la répartition de probabilité binomiale que

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = 1 \ ; \ \sum_{k=0}^{n} k\, p_{n,k}(x) = n\, x \ ; \ \sum_{k=0}^{n} (k - n\,x)^2 p_{n,k}(x) = n\, x\,(1-x) .$$

b) Si $f \in C(I)$, $\forall\, n \geq 1$ et $\forall\, x \in I$, on sait que

$$\forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \ \text{tel que} \ \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(\tfrac{k}{n})\right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

On pose

$$S_1 = \sum_k{}' \left[f(x) - f(\tfrac{k}{n})\right] p_{n,k}(x)$$

où Σ' est la sommation sur l'ensemble des k ($0 \leq k \leq n$) tels que

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta \ \text{et on a} \ \ |S_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}\, \Sigma' p_{n,k}(x) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

c) On pose $S_2 = \sum_k{}'' \left[f(x) - f(\tfrac{k}{n})\right] p_{n,k}(x)$ où Σ'' est la sommation sur l'ensemble des k tels que

$$0 \leq k \leq n \ \ \text{et} \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta .$$

f étant bornée sur I, $\exists\, M = \sup |f(x)|$ pour $x \in I$, et on a $|S_2| \leq 2\, M\, \Sigma'' p_{n,k}(x)$.

D'autre part $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$ est équivalent à $(k - n\,x)^2 \geq n^2 \delta^2$, on peut donc écrire

$$n^2\delta^2 \sum_k{}'' p_{n,k}(x) \leq \Sigma'' (k - n\,x)^2 p_{n,k}(x) \leq \sum_{k=0}^{n} (k - n\,x)^2 p_{n,k}(x) = n\,x\,(1-x).$$

Comme $x(1-x) \leq 1/4$ pour tout x dans I, on a finalement

$$\sum_k{}'' p_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4\,n\,\delta^2} \ \ \text{et} \ |S_2| \leq \frac{M}{2\,n\,\delta^2} .$$

d) En résumé,

$\forall f \in C(I)$, $\varepsilon > 0$ étant donné, d'après b) on peut trouver $\partial(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1 \ \text{et} \ \forall x \in I, \ \text{on ait} \ \ |S_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Pour cet ε et ce δ, d'après c) on peut trouver N tel que

$$\forall\, n \geq N \ \text{et} \ \forall\, x \in I \ \ \text{on ait} \ |S_2| < \frac{\varepsilon}{2} \ : \ \text{il suffit de prendre} \ \ N > \frac{M}{\varepsilon\delta^2} .$$

Comme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)\ p_{n,k}(x)$, si on pose $P_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}).\ p_{n,k}(x)$, on a

$$f(x) - P_n^f(x) = S_1 + S_2 .$$

On en conclut que, quel que soit $\varepsilon > 0$,

$$\forall\ x \in I, \forall\ n \geq N, |f(x) - P_n^f(x)| \leq |S_1| + |S_2| .$$

N ne dépend que de f et de ε ; cela implique que la limite de $P^f{}_n$ quand n tend vers l'infini est égale à f uniformément sur [0, 1] .

En conclusion : quel que soit l'intervalle I fermé borné de R , à toute fonction f de C(I) on peut faire correspondre une suite $(P^f{}_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de P(I) qui converge vers f .

Donc $C(I) \subset \overline{P(I)}$. D'autre part la limite d'une fonction de P(I) appartient à C(I) , donc $\overline{P(I)} \subset C(I)$. Par conséquent $\overline{P(I)} = C(I)$. C'est-à-dire que P(I) est dense dans C(I).

Les polynômes P_n sont les polynômes de BERNSTEIN et nous avons démontré le théorème de WEIERSTRASS en appliquant des résultats élémentaires sur la loi binomiale et en utilisant les propriétés connues des fonctions réelles définies et continues sur un compact de R .

Source : exercice 32 , page 151 in RéNYI , Calcul des Probabilités , rééd. J. GABAY

Galipettes arithmétiques choisies,

de Jean-Noël BLANC, (Le dilettante, 11 rue Barrault, 75013 PARIS).

Après "PÉDAGOGIQUE" paru dans Corol'aire n° 18, voici un deuxième extrait de ce livre recommandé par Louis-Marie Bonneval.

RUSTIQUE

Soit un véhicule tout-terrain à l'allure prétentieuse, décoré qu'il est d'autocollants des 24 Heures du Mans et des Mille Miglia. Deux conducteurs se relaient au volant pour le conduire de Rohanne à Angoulème en passant par le plateau de Millevaches.On considérera que le temps des relais est négligeable dans le calcul.

Le véhicule parcours d'abord 45 km à 60 km/h, puis roule 30 mn à 120 km/h, avant de s'arrêter 15 mn chez une marchande des quatre-saisons. Il repart à 75 km/h pendant 20 mn, et s'arrête pour une pause casse-croûte (poularde demi-deuil amenée de chez Troisgros, quatre-quarts, et salade aux quatre fruits rouges, le tout arrosé d'un vieil Entre-deux-mer).

Captant à l'improviste sur Europe 1 le reportage sur le tiercé; et s'intéressant à la manière dont les quadrupèdes se démènent au triple galop, les conducteurs s'accordent 10 mn de pause supplémentaire. En repartant, ils choisissent un raccourci qui les emmènent par des chemins de terre : 20 mn à 30 km/h, jusqu'à l'enlisement dans le millepertuis.Comptez 30 mn de tentative de dépannage, parce que les pilotes ne savent rien faire de leurs dix doigts. Il s'en faut même d'un, de doigts, qu'ils n'abandonne tout : 1/4 d'heure d'abattement. Quand le véhicule repart enfin, le moteur a tellement chauffé qu'il faut le laisser refroidir 15 mn.Les pilotes trompent l'attente en jouant aux 7 familles. À 18 heures enfin, ils redémarrent : 25 km/h jusqu'à 18h30, puis 110 jusqu'à 19 h 10, où ils atteignent enfin leur but.

Question : imaginer le cours des idées du couple de conducteurs tout au long de cette journée.

Rustique 4x4.