RU - BRI - COLLAGES

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous fer ons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectur es, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur ... Cette rubrique est à vous.

Les problèmes et leurs études que nous vous présentons dans ce supplément sont extraits du n° 4 des Cahiers du Groupe du Clain publiés entre 1973 et 1983par l'IREM de Poitiers.

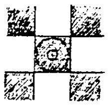
B : CERCLES ET QUADRILLAGE

Sources : Olympiades suédoises 1961 à 1968 (document SMF).

Quelle est la circonférence du plus grand cercle que l'on peut tracer dans les carrés noirs d'un échiquier dont les carrés ont 4 cm de côté ?

Idée de la démonstration

1) Un cercle peut être tracé dans un carreau. Le rayon maximum est alors 2 cm (fig. 1)



$R_o \leqslant 2$

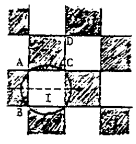
fig. 1

2) Si un cercle est tracé sur plus d'un carreau, il passe nécessairement (fig. 2) par les coins de carreaux (intersection du quadrillage).

Par suite, il doit (aux translations et symétries près) soit passer par deux coins de carreaux consécutifs, soit passer par deux coins de carreaux en diagonale.

fig. 2

2-1) Le cercle passe par 2 coins de carreaux consécutifs, soit A et B : son centre est sur Δ médiatrice de AB le cercle peut passer soit par C (à une symétrie près) son centre est alors I et son rayon $R_1 = 2\sqrt{2}$ (fig. 3), soit par D, mais alors on est ramené au cas suivant.



$R_1 = 2\sqrt{2}$

fig. 3

2-2) Le cercle passe par 2 coins de carreaux A et D en diagonale (fig. 4). Il ne peut passer par E, donc il passe (à une symétrie près) par B. Son centre est alors sur la médiatrice de AB d'une part, sur celle de AD d'autre part, donc en J. Le calcul du rayon A J est immédiat

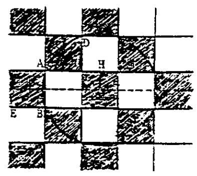


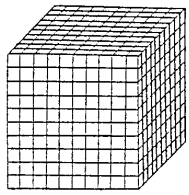
fig. 4

$AJ^2 = JH^2 + HA^2 = 2\sqrt{10}$ $\qquad R_2 = 2\sqrt{10}$

3) En résumé : le plus grand cercle correspond au cas de la figure 4, son rayon étant $2\sqrt{10}$.

D: 2001 MOUCHES DANS UN CUBE !

Dans une boîte cubique, d'arête unité, sont enfermées 2001 mouches. Montrer qu'il existe à tout moment une boule sphérique de rayon $\frac{1}{11}$ où se trouvent 3 mouches au moins (Olympiades).



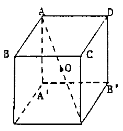
La boîte

Solution :

Soit le cube de côté 1

Supposons-le compartimenté en 1000 cubes de côté 0,1.

Chacun de ces 1000 petits cubes peut être placé complètement à l'intérieur d'une sphère de centre, le centre du petit cube, de rayon $\frac{1}{11}$, l'énoncé n'interdit pas à la sphère d'être en partie extérieure à la boîte ce qui règle la question pour les cubes constituant les parois de la boîte.



En effet, un calcul facile, montre que si O est le centre d'un tel petit cube, AC' une diagonale, on a :

$AC'^2 = AB^2 + BC^2 + CC'^2 = (0,1)^2 + (0,1)^2 + (0,1)^2 = \frac{3}{100}$

Par suite $AC' = \frac{\sqrt{3}}{10}$ d'où $OA = \frac{\sqrt{3}}{20}$

mais on montre facilement que $\frac{\sqrt{3}}{20} < \frac{1}{11}$. Les sommets du cube et a fortiori les autres points (faces et intérieur) sont donc tous à l'intérieur de la sphère de centre O de rayon $\frac{1}{11}$.

Les mouches peuvent être assimilées à des points.

Montrons qu'un des petits cubes au moins contient 3 mouches

Sinon on aurait :

a cubes contenant 0 mouche avec $0 \leqslant a \leqslant 1000$

b cubes contenant 1 mouche avec $0 \leqslant b \leqslant 1000$

c cubes contenant 2 mouches avec $0 \leqslant c \leqslant 1000$.

et $a + b + c = 1000$ d'une part (nombre total de cubes)

$0\,a + 1\,b + 2\,c = 2001$ d'autre part (nombre total de mouches)

Soit en retranchant membre à membre $c - a = 1001$, d'où $c = 1001 + a$.

Cette dernière égalité est incompatible avec la condition $c \leqslant 1000$.

Par suite il y a au moins un cube contenant 3 mouches (ou plus)

(et a fortiori il y a au moins une boule sphérique de rayon $\frac{1}{11}$ contenant au moins trois mouches (la boule de centre, le centre de ce cube).