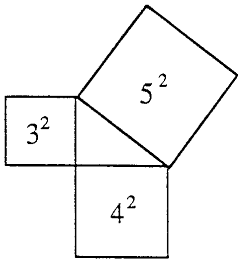
Sommes de carrés consécutifs. *Jacques Chayé.POITIERS*

Le triangle rectangle de côtés 3, 4, 5 et l'égalité $3^2+4^2=5^2$ sont bien connus ; le sont moins les égalités qui décomposent le nombre de jours d'une année non-bissextile en une somme de deux ou trois carrés : $365=13^2+14^2$, $365=10^2+11^2+12^2$ et l'égalité qui en découle : $13^2+14^2=10^2+11^2+12^2$.



Peut-on espérer une généralisation et trouver, quel que soit le naturel non nul n, une suite de 2n+1 naturels successifs tels que la somme des carrés des n+1 premiers soit égale à la somme des carrés des n suivants ? En tâtonnant, on trouve encore :
$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$. Pour les premiers naturels, on observe donc la répartition suivante :

$$\underbrace{1}_{2}\ \underbrace{2}_{3}\ \underbrace{\boxed{3\ 4 \,\vdots\, 5}}_{(2\,;\,1)}\ 6\ 7\ 8\ 9\ \underbrace{\boxed{10\ 11\ 12 \,\vdots\, 13\ 14}}_{(3\,;\,2)}\ 15\ 16\ 17\ 18\ 19\ 20\ \underbrace{\boxed{21\ 22\ 23\ 24 \,\vdots\, 25\ 26\ 27}}_{(4\,;\,3)}\ .....$$

2 3 4 nombres 5 nombres 6 nombres 7 nombres

Les "têtes de liste" (3, 10, 21, ...) des suites convenables sont les premiers nombres triangulaires de rang pair (Fig.1)

On peut conjecturer que le premier nombre de la $n^{\text{ème}}$ suite qui convient est le $n^{\text{ème}}$ triangulaire de rang pair :

$C = \frac{(2n+1)(2n)}{2} = 2n^2+n$. Dans ces conditions, la $n^{\text{ème}}$ suite serait :

$$\underbrace{\underbrace{\boxed{2n^2+n \quad 2n^2+n+1\ ....\ 2n^2+2n \,\vdots\, 2n^2+2n+1\ ....\ 2n^2+3n}}_{(n+1\,;\,n)}}_{2n+1 \text{ nombres}}$$

On peut vérifier que la somme S des carrés des n + 1 premiers termes est bien égale à la somme S' des carrés des n termes suivants. En effet,

$C_3^2 = 1+2$

$C_5^2 = 1+2+3+4$

$C_7^2 = 1+2+3+4+5+6$

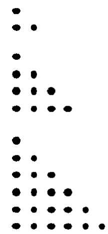


Fig.1

d'une part :

$$S = \sum_{p=0}^{n}[(2n^2+n)+p]^2$$

$$= (n+1)(2n^2+n)^2 + 2(2n^2+n)^2 \sum_{p=0}^{n} p + \sum_{p=0}^{n} p^2.$$

Or on sait que : $\sum_{p=0}^{n} p = \sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$

et $\sum_{p=0}^{n} p^2 = \sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Donc

$$S = (n+1)(2n^2+n)^2+(2n^2+n)n(n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left[6(2n^2+n)+6n+1\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}(12n^2+12n+1),$$

d'autre part :

$$S' = \sum_{p=1}^{n}[(2n^2+2n)+p]^2$$

$$= n(2n^2+n)^2 + 2(2n^2+n) \sum_{p=1}^{n} p + \sum_{p=1}^{n} p^2$$

$$= n(2n^2+n)^2+(2n^2+2n)n(n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}\left[24n^2(n+1)+12(2n^2+12n)+2n+1\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}\left[12n(n+1)(2n+1)+2n+1\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}(12n^2+12n+1).$$

On a donc bien S=S'. Cependant, cette vérification ne prouve pas que les suites trouvées sont les seules qui conviennent. Attaquons-nous au problème d'une manière moins empirique :

Soit n un naturel non nul donné et x une variable de $\mathbb{R}$. Considérons $f(x) = \sum_{p=0}^{n}(x+p)^2$ et $g(x) = \sum_{p=1}^{n}(x+n+p)^2$ et cherchons à savoir si l'équation en x : f(x) = g(x) (1) admet d'autres solutions entières que celles trouvées plus haut, à savoir $2n^2+n$.

On voit que $f(x) = \sum_{p=0}^{n} x^2 + 2x \sum_{p=0}^{n} p + \sum_{p=0}^{n} p^2 = (n+1)x^2+n(n+1)x + \sum_{p=0}^{n} p^2$.

$g(x) = \sum_{p=1}^{n}(x+n)^2 + 2(x+n) \sum_{p=1}^{n} p + \sum_{p=1}^{n} p^2 = n(x+n)^2+n(n+1)(x+n) + \sum_{p=1}^{n} p^2 = nx^2 + \left[2n^2+n(n+1)\right]x + 2n^3 + n^2 + \sum_{p=1}^{n} p^2$.

L'équation (1) s'écrit alors : $x^2 - (2n^2)x - n^2(2n+1) = 0$. Elle admet les deux solutions : $x' = 2n^2+n$ et $x'' = -n$.

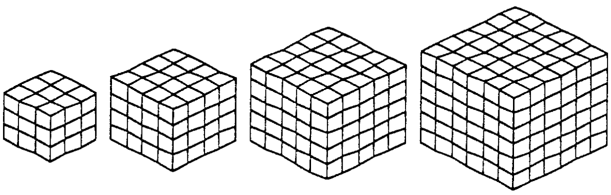
x' est bien la seule racine entière et positive. C.Q.F.D.

Remarque 1 : Bien entendu, cette démarche rend inutile la vérification faite plus haut avec S et S' puisque, non seulement elle prouve, pour n donné, l'existence et l'unicité de la solution, mais elle exhibe cette solution.

Remarque 2 : Cette vérification aurait d'ailleurs pu être faite plus simplement à l'aide de S-S', mais ne serait pas apparu le résultat remarquable sur la valeur commune de S et S' : c'est un multiple de la somme des n premiers carrés [résultat que l'on peut bien sûr retrouver en calculant : $f(2n^2+n)$ ou $g(2n^2+n)$].

Remarque 3 : Existe-t-il une propriété analogue pour les cubes ou les autres puissances ?

Il y a bien l'égalité remarquable : $3^3+4^3+5^3=6^3$, mais comment la généraliser ? Dans quelle direction doit-on extrapoler ? Malgré maints programmes sur ordinateur pour tenter de trouver d'autres exemples, en combinant des p-uplets de naturels de manières variées, je n'ai rien pu obtenir.



J'ai pensé qu'on pourrait avoir affaire à des suites de 2n naturels successifs dont la somme des cubes des n+1 premiers termes serait égale à la somme des cubes des n-1 termes suivants. En transposant aux cubes la méthode utilisée précédemment pour les carrés et en posant : $f(x) = \sum_{p=0}^{n}(x+p)^3$ et $g(x) = \sum_{p=0}^{n}(x+n+p)^3$ on est amené à résoudre l'équation en x : $2x^3 + 3(2n-n^2)x^2 + 3(3n^2-2n^3)x - \frac{n^2}{2}(7n^2-10n+1) = 0$.

Pour n=2, on vérifie que 3 est solution, mais j'avoue que je n'ai pas le courage de me lancer dans la méthode de Cardan pour étudier la forme des solutions dans le cas général, vue la complexité des coefficients. Avis aux amateurs !

RUBRICOLLAGE

COROLLAIRE

Rubri-col ages

La rubrique se réduira, pour ce numéro, à sa plus simple expression. Les raisons en sont multiples ; la plus profonde : ce numéro est déjà très épais ; la moins sérieuse : il ne faut pas surcharger nos lecteurs pour des vacances bien gagnées et certainement attendues. Donc bonnes vacances, et envoyez-nous des textes pour la rubrique du numéro de septembre.

Serge Parpay

Le Challenge Mathématiques POITOU-CHARENTES a 5 ans

Pour la cinquième année consécutive, l'Inspection Académique de la Vienne soutenue par celles des autres départements de la Région a organisé un CHALLENGE MATHÉMATIQUES pour les classes volontaires de CM2 et de 6ème.

Une forte participation :

au total près de 8500 élèves répartis dans plus de 200 écoles primaires et près de 50 collèges.

Les modalités :

Une épreuve de 12 exercices est proposée à la classe qui ne peut donner qu'une seule solution par exercice. Un seul élève ne peut pas résoudre tous les exercices dans le temps imparti. Chaque classe doit donc s'organiser pour se partager le travail, discuter éventuellement des différentes solutions trouvées pour un même exercice et choisir la "bonne". Les élèves participent pour la "gloire" car chaque classe reçoit un diplôme de participation ou de réussite, les meilleurs recevant un trophée.

Les objectifs :

- Développer le goût de la recherche et éprouver le plaisir de la découverte grâce à des exercices inhabituels et humoristiques.
- Apprendre à travailler en équipe, apprendre à écouter, à argumenter, à choisir.
- Faire vivre tout cela dès l'école primaire, les vocations scientifiques pouvant naître très tôt.

Les organisateurs :

Une équipe de bénévoles (inspecteurs, professeurs, conseillers pédagogiques), s'est constituée à l'initiative de Marc BLANCHARD, Inspecteur Pédagogique Régional, et réalise les épreuves sous sa responsabilité.

Le succès du Challenge est dû pour une large part au talent de M. Claude JOLY qui illustre, pour le plus grand plaisir de tous, chaque exercice proposé. Il est dû aussi à l'adhésion de nombreux maîtres et professeurs.

Le Challenge Mathématiques Poitou-Charentes est soutenu financièrement par la Banque Populaire-Val de France.

Associer Mathématiques et plaisir,

tel est le "challenge" (défi) de ce Challenge. Cet objectif se concrétise par la sortie de la brochure "DES MATHS POUR LE PLAISIR" éditée et vendue par le C.R.D.P. de Poitiers et son réseau. Cette brochure regroupe les problèmes, avec solutions, de quatre épreuves des années précédentes. N'hésitez pas à vous la procurer ; c'est avec plaisir que vos élèves de Sixième, mais aussi de Cinquième, feront des mathématiques.