Le coin du Prof. Ila Ransor

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier des solutons aux exercices. A vos plumes !

Rectificatif : Une erreur de frappe ($q < q'$) rendait un des énoncés d'exercices incompréhensible dans le dernier numéro ce Corol'aire.

Voici l'énoncé exact ...

a,b et b' sont des entiers strictement positifs.
Soit la division euclidienne de a par b, et q le quotient.
Soit la division euclidienne de a par b', et q' le quotient.
Montrer que si $b < b'$ alors $q \geq q'$.

Remarque : Quand les ressources ne sont pas illimitées (c'est le cas sur notre terre), plus il y a de monde, plus les parts sont petites (du moins si le partage était équitable, ... mais les inégalités n'existent pas qu'en mathématiques).

... et une solution :

On a $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ (1)
$a = b'q' + r'$ avec $0 \leq r < b'$ (2) et $b' > b$.
Supposons $q' > q$ (3), alors $q' \geq q + 1$.
De plus, $b < b'$ implique $b' \geq b + 1$.
Donc $b'q' \geq (b + 1)(q + 1) > bq + b$ (4).
D'après (1) : $bq + b > bq + r$, soit aussi $bq + b > a$ (5).
Donc d'après (4) et (5) : $b'q' > a$.
Or d'après (2) : $a \geq b'q'$. Il y a contradiction.
L'hypothèse (3) est à rejeter et $q \geq q'$. c.q.f.d.

S.P.

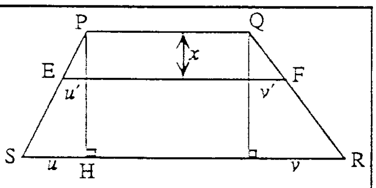
A PROPOS DU PARTAGE DU TRAPEZE (Corol'aire n° 10).

Dans le n°10 de Corol'aire, nous proposions le problème suivant :
Diviser un trapèze en deux parties équivalentes par une paralle aux bases. (Eyserric et Pascal - 1874).

Voici la solution d'Alain Pichereau du Lycée Marguerite de Valois d'Angoulème.

Détermination théorique de la droite (EF) :

PH = h
PQ = b
RS = B ($B \geq b$)
$\mathcal{A} = \frac{B + b}{2} h$



$\frac{x}{u'} = \frac{h}{u}$ et $\frac{x}{v'} = \frac{h}{v}$.

D'où $EF = b + u + u' = b + \frac{xu}{h} + \frac{xv}{h} = b + \frac{x}{h}(B - b)$.

On cherche x tel que aire PQFE $= \frac{1}{2}\mathcal{A}$,

soit $(b + EF)x = \frac{B + b}{2} h$.

D'où $\left(2b + \frac{B - b}{h} x\right)x = \frac{B + b}{2} h$ et on obtient : $\frac{B - b}{h} x^2 + 2bx - \frac{B + b}{2} h = 0$.

Si $b = B$, on obtient (évidemment) $x = \frac{h}{2}$ et $EF = b$.

Si $b \neq B$ l'équation est du 2ème degré ; elle admet une seule solution positive $x = \dfrac{-b + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{B^2 + b^2}}{B - b} h$ (1) .

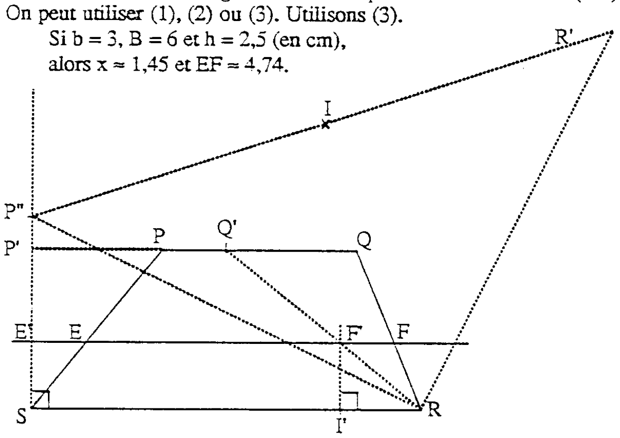
Mais $\left(-b + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{B^2 + b^2}\right)\left(b + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{B^2 + b^2}\right) = \frac{B^2 - b^2}{2}$ d'où $x = \dfrac{\mathcal{A}}{b + \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{B^2 + b^2}}$ (2) *[valable si B = b]*.

Pour cette valeur de x on obtient : $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{B^2 + b^2}$ (3) *[Remarque : EF est indépendant de h].*

Construction à la règle et au compas de cette droite (EF) :

On peut utiliser (1), (2) ou (3). Utilisons (3).

Si b = 3, B = 6 et h = 2,5 (en cm),
alors $x \approx 1{,}45$ et $EF \approx 4{,}74$.



Séquence de construction :

1) P'Q' = PQ ; SP" = b.
2) P"RR' est rectangle et isocèle en R.
$P"I = \frac{1}{2} P"R' = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, P"R' = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{B^2 + b^2}$.
3) SI' = P"I
4) La perpendiculaire à (SR) passant par F permet d'obtenir les points E', E et F ;
EF = E'F' (car ces 2 quantités sont égales à $b + \frac{x}{h}(B - b)$ avec $x = h - I'F'$).
E'F' = SI' par construction
Donc $EF = E'F' = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{B^2 + b^2}$.

(EF) partage en deux parties de même aire le trapèze PQRS et le trapèzeP'Q'RS.

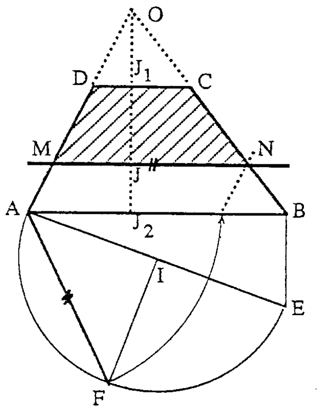
Voici la construction de Jean MORIN (I.P.R.)

On construit ABE rectangle en B tel que BE = DC.

La médiatrice de [AE] recontre le demi-cercle de diamètre [AE] en F.

On porte MN = AF parallèlement à (AB).

On partage ainsi le trapèze en deux trapèzes de même aire.



En effet : si AB = b, DC = a et si h est la hauteur du trapèze ABCD,

on a $AF = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

$$OJ_1 = \frac{ah}{b-a} \,;\; OJ = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}\,(b-a)} \,;\; JJ_1 = \frac{h}{b-a}\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}} - a\right].$$

$$\text{Aire(DCNM)} = \left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}} + a\right]\frac{h}{b-a}\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}} - a\right]\frac{1}{2}$$

$$= \frac{h}{2(b-a)}\left[\frac{a^2+b^2}{2} - a^2\right] = \boxed{\frac{h\,(b+a)}{4}}.$$

Une généralisation de cet exercice :

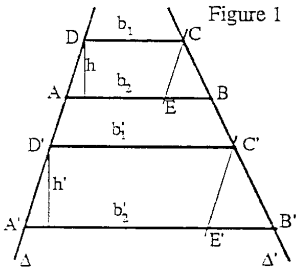


Figure 1

Soit deux trapèzes ABCD et A'B'C'D' dont les bases sont parallèles, et dont les côtés obliques sont portés par deux mêmes droites Δ et Δ' (voir figure 1). Soit b_1 et b_2 les longueurs des bases du trapèze ABCD ; soit b'_1 et b'_2 les longueurs des bases du trapèze A'B'C'D'. On peut supposer $b_1<b_2$ et $b'_1<b'_2$ (1).

Soit $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$les aires respectives des deux trapèzes. On a $\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'} = \dfrac{b_2^2 - b_1^2}{b'^2_2 - b'^2_1}$ (2).

Preuve : Soit E le point d'intersection de (AB) avec la parallèle à (AD) passant par C. Soit E' le point d'intersection de (A'B') avec la parallèle à (A'D') passant par C'. h et h' étant les hauteurs respectives des deux trapèzes,

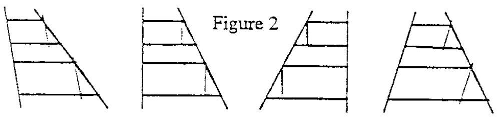


Figure 2

on a : $\dfrac{EB}{h} = \dfrac{E'B'}{h'}$ (similitude des triangles CEB et C'E'B').
Avec l'hypothèse (1), E est entre A et B (éventuellement en B), E' est entre A' et B' (éventuellement en B') - voir les quatre cas de la figure 2.

Donc le rapport précédent s'écrit $\dfrac{b_2 - b_1}{h} = \dfrac{b'_2 - b'_1}{h}$ soit $\dfrac{h}{h'} = \dfrac{b_2 - b_1}{b'_2 - b'_1}$ (3). On a $\mathfrak{A} = \dfrac{h}{2}(b_2 + b_1)$ et $\mathfrak{A}' = \dfrac{h'}{2}(b'_2 + b'_1)$.

Par suite $\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'} = \dfrac{h}{h'}\,\dfrac{b_2 + b_1}{b'_2 + b'_1}$, soit, d'après (3), $\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'} = \dfrac{b_2 - b_1}{b'_2 - b'_1}\,\dfrac{b_2 + b_1}{b'_2 + b'_1}$, et, finalement, $\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}'} = \dfrac{b_2^2 - b_1^2}{b'^2_2 - b'^2_1}$.

L'égalité (2) est démontrée.

Application :

1) Supposons les aires $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ égales, alors $b_2^2 - b_1^2 = b'^2_2 - b'^2_1$, soit $b_2^2 + b'^2_1 = b'^2_2 + b_1^2$.

Il est alors facile de constater que b_2, b_1, b'_1 et b'_2 sont les côtés d'un quadrilatère inscriptible IJKL (figure 3). Si l'on connaît b_1, b_2 et b'_2, on construit le triangle JKL, le cercle circonscrit, le point I et on en déduit facilement b'_1.

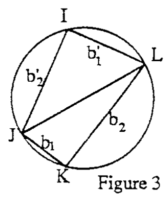


Figure 3

2) Dans le cas de l'énoncé initial, AB et D'C' sont confondus et $b'_1 = b'_2$.
Donc on construit le triangle rectangle JKL, le cercle circonscrit, et comme $b'_1 = b_2$, le point I est milieu d'un des arcs JL (figure 4).
On détermine ainsi la longueur b'_1, le tracé de [AB] se fait facilement (figure 5).

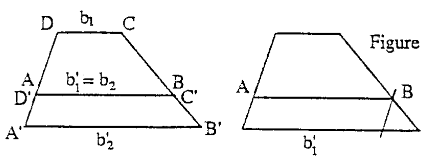


Figure 5

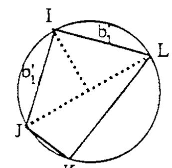


Figure 4

La propriété (2) est curieuse. Je ne l'avais jamais rencontrée auparavant ; je l'ai trouvée par hasard. L'exercice met en jeu quelques constructions intéressantes.

Serge PARPAY