

Le coin du Prof Ilia Ransor

Dans le prochain Corol'aire paraîtront :

- 1) un complément de notre collègue Pichereau pour son article sur les polyèdres,
- 2) une mise au point concernant le réseau déformable proposé dans l'exercice 5 de l'épreuve d'entraînement du Rallye 92, certains collègues m'ayant fait part de leur étonnement devant la réponse donnée (8 barres) et pensant le problème possible avec un nombre moindre de barres.

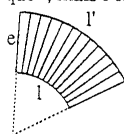
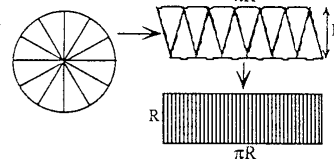
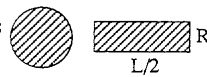
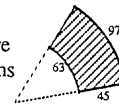
QUELQUES IDEES POUR UNE COURONNE

L'exercice 8 du Rallye Poitou-Charentes 1992 proposait le calcul de l'aire d'un morceau de couronne circulaire (dessin ci-contre). Cette aire était 3600 m² soit celle d'un carré de 60m de côté. L'échange envisagé entre les terrains ayant ces deux formes est donc équitable. Une réflexion amusante a été relevée dans un dossier de classe :

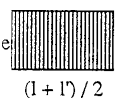
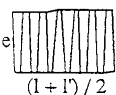
« Si on n'aime pas tondre en rond, on tondra en ligne droite ». Ce qui rend l'exercice un peu insolite, c'est que π n'intervient pas en apparence, le calcul pouvant être fait directement avec les seules données 97, 63 et 45 (voir - 2 -).

- 1 - Soit un cercle de rayon R ; sa longueur (périmètre) est $L = 2\pi R$ et l'aire du disque est $A = \pi R^2$. Mais en combinant ces deux formules, on a : $A = R \times L / 2$. Donc l'aire d'un disque est égale à celle d'un rectangle de côtés respectifs R et $L / 2$.

Une construction particulière rend bien compte de ce fait. Soit le cercle découpé en 2n secteurs (on prend sur la figure $n = 6$). On dispose ces secteurs tête-bêche ; on obtient un «pseudo-parallélogramme» de hauteur R et dont les «côtés» sont une succession d'arcs de cercles de longueur πR . A la «limite», quand n augmente indéfiniment, le pseudo-parallélogramme devient le rectangle de côtés πR et R , et d'aire πR^2 . C'est l'aire du cercle ! Attention : Il faut prendre de grandes précautions avec ce genre de «raisonnement graphique», mais l'idée est intéressante et peut être exploitée dans d'autres situations.

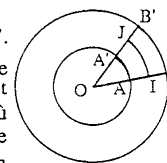


- 2 - Soit une couronne dont les caractéristiques sont données dans la figure ci-contre : e est la largeur, l et l' sont les longueurs des arcs et O est le centre des cercles. On peut de la même façon que précédemment, diviser chacun des arcs en 2n arcs égaux, puis mettre tête-bêche les 2n morceaux de couronne ainsi définis. On obtient, comme précédemment, un «pseudo-parallélogramme» de hauteur e et de longueurs de «côtés» $(l + l') / 2$. A la limite, on obtient un rectangle de côtés e et $(l + l') / 2$, et d'aire $A = (l + l') \times e / 2$. C'est l'aire cherchée. Pour l'exercice, on a $A = (97 + 63) \times 45 / 2$.



- 3 - Calculs 1 : Soit R et R' les rayons des deux cercles limitant la couronne. $OA = R$ et $OB = R'$.

La largeur de la couronne sera $e = R' - R$. Soit α la mesure de l'angle $\widehat{AOA'}$ (on peut prendre α en radians, mais il n'interviendra pas par la suite). Les longueurs des arcs AA' et BB' sont $l = \alpha R$ et $l' = \alpha R'$ (proportionnalité de la longueur d'un arc et de la mesure de cet arc). D'où $l / R = l' / R'$. On peut également utiliser l'homothétie de centre O et de rapport R' / R . L'aire du secteur OAA' vaut $A = (\alpha / 2) \times R^2$ (proportionnalité de l'aire et de la mesure de l'arc). On peut écrire $A = (\alpha R / 2) \times R$; soit $A = l \times R / 2$. Cette formule donnant l'aire d'un secteur est elle aussi très intéressante ; de même, l'aire du secteur OBB' vaut $A' = l' \times R' / 2$. L'aire du morceau de couronne est donc :



$a = l'R' / 2 - lR / 2$; soit $a = (l'R' - lR) / 2$. On peut écrire, en remarquant que $l / R = l' / R'$ donne $lR' - lR = 0$:

$a = (l'R' - l'R + l'R - lR) / 2 = (l' + l) (R' - R) / 2$; d'où $a = (l' + l) \times e / 2$.

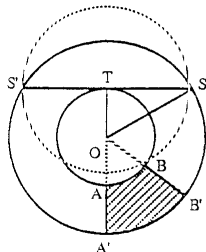
- 4 - Calcul 2 : Le calcul précédent peut paraître sophistiqué, mais il permet d'illustrer une technique : « compliquer un calcul pour pouvoir le simplifier ». On peut faire un calcul plus classique. L'aire du morceau de couronne est $a = A - A'$,

soit $a = (\alpha / 2) (R'^2 - R^2)$; d'où $a = (\alpha / 2) (R' + R) (R' - R)$, puis $a = [(l' + l) / 2] \times e$.

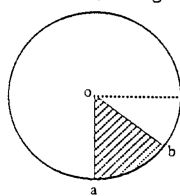
- 5 - Calcul 3 : Autre possibilité pour traiter le problème à partir de $a = (l'R' - lR) / 2$: On a $l / R = l' / R' = (l' + l) / (R' + R)$ (propriété classique des proportions) ; d'où $l = R \times (l' + l) / (R' + R)$ et $l' = R' \times (l' + l) / (R' + R)$;

donc $a = (1/2) (R'^2 - R^2) \times (l' + l) / (R' + R)$, soit $a = (1/2) (l' + l) (R' - R)$; et on retrouve le résultat $a = (l' + l) / 2 \times e$.

- 6 - Commentaires : On peut remarquer, pour compléter, que $(l' + l) / 2$ est la moyenne des longueurs des arcs AA' et BB' . C'est aussi la longueur de l'arc IJ correspondant au cercle de rayon $(R + R') / 2$, I et J étant les milieux respectifs de $[AB]$ et $[A'B']$. L'arc IJ est en somme la moyenne des bases circulaires du morceau de couronne (le cercle de centre O et de rayon OI est le cercle moyen de la couronne). On peut alors rapprocher la formule donnant l'aire a de celle donnant l'aire du trapèze de bases l et l' et de hauteur e . Ce qui montre l'erreur faite par certains élèves, dans le Rallye, affirmant que l'aire du morceau de couronne est égale à l'aire du trapèze $AA'B'B$. En effet $AA' < l$ et $BB' < l'$. L'aire du trapèze est inférieure : l'aire du segment circulaire de base AA' est évidemment inférieure à celle du segment circulaire de base BB' , ces aires étant dans le rapport $(R' / R)^2$, carré du rapport d'homothétie.



- 7 - Couronne et disque d'aires égales : Soit une couronne circulaire. Traçons, en un point T du cercle intérieur, la tangente SS' . On a $OS = R'$, $OT = R$ et donc $TS^2 = OS^2 - OT^2$, soit $TS^2 = R'^2 - R^2$ (Théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OST). On a vu plus haut que l'aire de la couronne était $A = \pi(R'^2 - R^2)$; d'où $A = \pi TS^2$. L'aire de la couronne est égale à l'aire du disque de diamètre SS' . Si on trace un cercle de centre o et de rayon $os = ST$, et les rayons oa et ob tels que oa et ob soient respectivement parallèles à OA et OB , alors l'aire du morceau de couronne hachuré sera égale à l'aire du secteur hachuré.



Exercice : Calculer le rayon oa et la longueur de l'arc ab en fonction de l , l' et e .

Serge PARPAY.

Eléments de solution de l'exercice :

Le nombre de rotations conservant un polyèdre régulier est $2A$ (A = nombre d'arêtes)

Reçu de notre collègue M. Pichereau, lycée Marguerite de Valois, Angoulême.

I 1) Il y a 5 sortes de polyèdres réguliers convexes : tétraèdre (régulier), cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre.

2) Le polyèdre dont les sommets sont les milieux des faces d'un cube est un octaèdre de même centre de symétrie.

Le polyèdre dont les sommets sont les milieux des faces d'un dodécaèdre est un icosaèdre de même centre de symétrie.

II Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des rotations conservant un polyèdre régulier et O l'isobarycentre des sommets du polyèdre

1) O est le centre de la sphère circonscrite au polyèdre et est le centre de symétrie du polyèdre (sauf pour le tétraèdre).

2) Si $r \in \mathcal{R}$ - idv, l'axe de r passe par O .

3) Si $r \in \mathcal{R}$ - idv, r ne peut laisser invariants 2 sommets d'une même arête.

4) Une arête est toujours transformée en une arête par $r \in \mathcal{R}$.

5) Il existe au plus une rotation de $\mathcal{R}$ transformant une arête donnée en une arête donnée.

6) Si un polyèdre admet A arêtes, $\text{card}(\mathcal{R}) \leq 2A$

(l'arête $[AB]$ ne peut être transformée qu'en $[AB]$ ou $[BA]$ ou $[AC]$ ou $[CA]$...).

III Si un polyèdre régulier admet A arêtes, il y a effectivement $2A$ rotations le conservant globalement, donc $\text{card}(\mathcal{R}) = 2A$

En fait ces rotations r se répartissent en 3 catégories ($r \neq \text{id}$)

$C1$: l'axe de r est perpendiculaire à 2 faces parallèles,

$C2$: l'axe de r passe par 2 sommets symétriques par rapport à O ,

$C3$: l'axe de r passe par les milieux de 2 arêtes symétriques par rapport à O et c'est un demi-tour.

Et en ajoutant 1 ($r = \text{id}$) on obtient à chaque fois $2A$

Preuve :

Il s'agit de faire la vérification de ces «chiffres» pour le tétraèdre, le cube et le dodécaèdre car les résultats relatifs à l'octaèdre et à l'icosaèdre s'obtiennent grâce à la notion de dualité (voir I.2) à partir de ceux du cube et du dodécaèdre. Par exemple considérons le cube «circonscrit» à l'octaèdre : toute rotation conservant le cube conserve globalement les milieux des faces, donc l'octaèdre.

Vérification dans le cas du Dodécaèdre :

Justification pour $C1$:

Les polygones (plans) $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, $A_6 A_7 A_8 A_9 A_{10}$,

$A_{11} A_{12} A_{13} A_{14} A_{15}$, $A_{16} A_{17} A_{18} A_{19} A_{20}$ sont des pentagones réguliers qui ont pour axe la droite Δ passant par O et perpendiculaire aux faces

$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ et $A_{16} A_{17} A_{18} A_{19} A_{20}$: les rotations d'axe Δ et d'angle $k \times (2\pi/5)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) les laisse globalement invariant.

D'où $\text{card}(C_1) = (12/2) \times 4 = 24$

Justification pour $C2$:

Soit $\Delta = (A_1, A_{19})$ (A_1 et A_{19} sont symétriques par rapport à O) : le triangle $A_2 A_3 A_5$ est équilatéral, les triangles $A_{11} A_7 A_4$ et $A_{12} A_3 A_{10}$ sont coplanaires et équilatéraux, les triangles $A_{16} A_{13} A_9$ et $A_{17} A_8 A_{15}$ sont coplanaires et équilatéraux, le triangle $A_{14} A_{18} A_{20}$ est équilatéral : tous ces triangles ont pour axe la droite Δ ; donc les rotations d'axe Δ et d'angles $2\pi/3, 4\pi/3$ les conservent globalement :

D'où $\text{card}(C_2) = (20/2) \times 2 = 20$

Justification pour C_3 :

Soit I le milieu de $[A_1 A_5]$, J le milieu de $[A_{18} A_{19}]$

et d le demi tour d'axe (IJ) . Considérons le plan

$P = (A_1 A_5 A_{18} A_{19})$ et Q plan perpendiculaire

à la face $A_1 A_5 A_4 A_3 A_2$ et passant par $A_3, A_8,$

A_{11}, A_{16}, I, J . Ces 2 plans sont des plans de

symétrie orthogonale du dodécaèdre ; mais $P \perp Q$

et $P \cap Q = (IJ)$ donc $s_P \circ s_Q = d$:

D'où $\text{card}(C_3) = (30/2) \times 1 = 15$

Remarques : Voir dans le livre GROUPES (de

Bouvier-Richard chez Hermann), le lien entre les

5 types de polyèdres réguliers et tous les sous

groupes finis de $O^*(R^3)$.

Théorème de Descartes-Euler : $S - A + F = 2$

(Formule valable pour tous les polyèdres con-

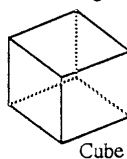
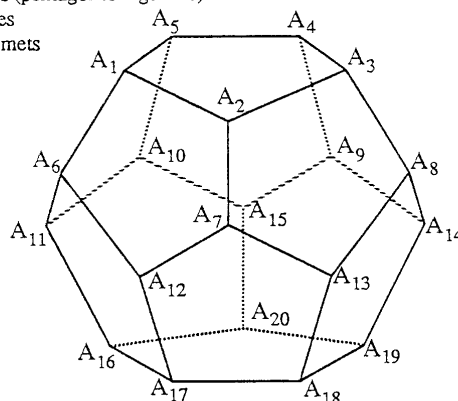
vexes)

	Tétraèdre	Cube	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
2A	12	24	24	60	60
C1	0	9	8	24	20
C2	8	8	9	20	24
C3	3	6	6	15	15
Total	11	23	23	59	59

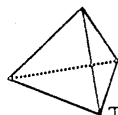
12 faces (pentagones réguliers)

30 arêtes

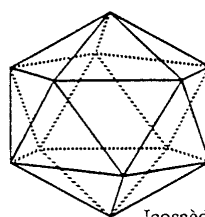
20 sommets



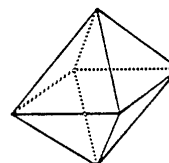
Cube



Tétraèdre



Icosaèdre



Octaèdre

	Tétraèdre	Cube	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
F faces	4	6	8	12	20
S sommets	4	8	6	20	12
A arêtes	6	12	12	30	30