apmep

COROL' AIRE n° 9

Association des Professeurs de Mathématiques de l' Enseignement Public

79 86 17 16

Juin 1992

ISSN : 1145 - 0266

le numéro : 5 F ; Abonnement un an (4 numéros) : 15 F

Régionale de POITIERS

IREM, Faculté des Sciences, 40 Avenue du Recteur Pineau, 86022 POITIERS CEDEX

Le mot du président

Solidarités Institutionnelles ...

La préparation des Journées Nationales de l'A.P.M.E.P. en 1993 (voir le COROL'AIRE précédent) a pris sa vitesse de croisière. Des contacts avec des institutions ont été pris (M.A.F.P.E.N., I.U.F.M., C.R.D.P., Université, I.R.E.M., Aire de formation du Futuroscope ...). D'autres restent à prendre (Rectorat, Conseil Régional, Conseils Généraux, Municipalités ...).
D'ores et déjà, on peut se féliciter de l'accueil que nous avons reçu de toutes les institutions contactées et les remercier des aides substantielles qu'elles vont nous apporter. Au delà, nous pouvons voir aussi toute la reconnaissance qu'elles accordent à notre profession ; et c'est aussi cela la revalorisation du métier !
Nous sommes certes une petite accadémie, mais l'organisation de ces Journées Nationales montre qu'il y a une large solidarité entre les institutions académiques pour mettre en oeuvre des projets d'intérêt général.
Alors à nous de faire en sorte que ces journées soient un franc succès, que tous les partenaires institutionnels tirent fierté de nous avoir aidés.

RALLYE MATHEMATIQUE POITOU-CHARENTES 1992

Pour sa deuxième année d'existence, le Rallye Mathématique Poitou-Charentes a été étendu aux quatre départements de l'Académie.
Cette initiative a permis la participation de 375 classes de troisième et seconde pour un effectif d'environ 10 000 élèves.
L'A.P.M.E.P., l'I.R.E.M. et les I.P.R. de mathématiques tiennent à remercier vivement les professeurs de mathématiques de l'Académie qui ont encouragé leurs élèves à participer. La formule retenue qui privilégiait le travail en équipe et sollicitait la contribution de tous, a permis, comme l'an dernier, d'apprécier non seulement la valeur mathématique des productions, mais aussi la grande imagination des élèves, leur esprit créatif, et la qualité des rédactions, des dessins et des illustrations. Les exercices proposés trouveront peut-être une place dans l'enseignement de tous les jours ? (modules, devoirs de recherche ...)
L'équipe organisatrice avait souhaité, cette année, une participation désintéressée des élèves, voulant faire de cette journée consacrée au Rallye une fête des mathématiques. En basant son jugement sur les critères précédemment cités, elle a particulièrement apprécié le travail présenté par les classes suivantes :

Classes de 3ème	Classes de seconde :	
3°A Collège Montmoreau-St Cybard	2-12 Lycée Guez de Balzac, Angoulème	2nd Lycée M. Genevoix, Bressuire
3°1 Collège de Confolens	2-8 Lycée Image et Son, Angoulème	2-9 Lycée St Joseph, Bressuire
3°1 Collège Missy, La Rochelle	2-4 Lycée Jean Monet, Cognac	2-6 Lycée Paul Guérin, Niort
3°1 Collège Texier, St Jean d'Angély	2-9 Lycée J. Dautet, La Rochelle	2-1 Lycée Denfert Rochereau, St Maixent
3°D Collège A. d'Aubigné, Saintes	2-3 Lycée Vielgieux, La Rochelle	2D2 Lycée C.Guérin, Poitiers
3°C Collège de la T. d'Auvergne,Thouars	2-11 Lycée J. Valin, La Rochelle	
3°B Collège de la Crêche	2-2 Lycée Palissy, Saintes	
3°A Collège de la Roohe Posay	2-9,2-8 Lycée Bellevue, Saintes	
3°D Collège C. Guerin, Poitiers	2-7 Lycée Jean Macé, Niort	
3°. Collège G. Sand, Chatellerault	2-3 Lycée E. Pérochon, Parthenay	

Problèmes extraits du Rallye en page 2

On signalera enfin l'excellent travail de la classe de 3°A du collège de Montmoreau-St Cybard qui recevra le trophée académique offert par le Lycée professionnel de Montmorillon. Cette classe représentera l'Académie au «Congrès Mathématiques Junior» qui se tiendra à Paris les 6, 7 et 8 juillet.

Sommaire :

Rallye Mathématique Poitou-Charentes p. 1 et 2
Championnat des Jeux mathématiques p. 2
Feuilleton de l'évaluation (épisode 7) p. 3
Histoire des Mathématiques : Fonctions p. 4
Rubrique du Prof Ila Ransor p.5 et 6

Directeur de la publication : Dominique GAUD
Rédacteur : Jean FROMENTIN
Imprimerie : IREM Faculté des Sciences 40 Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS CEDEX.

Edité par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Régionale de Poitiers (APMEP-Poitiers)
Siège : IREM Faculté des Sciences 40 Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS CEDEX.

6ème CHAMPIONNAT INTERNATIONAL DES JEUX MATHEMATIQUES ET LOGIQUES

Mathématiques de goût, goût des mathématiques.

Finale régionale, Lycée Victor Hugo, Poitiers.

80 potaches de 10 à 60 ans, de la Vendée, de l'Indre et Loire, de la Vienne, de la Charente, de la Charente-Maritime et des Deux-Sèvres ont cogité dès 14 heures, en ce samedi 23 mai 1992, sur un menu savamment mitonné par des spécialistes de la cuisine mathématique.

L'année 1992, redondante ... , les bonbons de Zazie, les frères et soeurs d'Evelyne, le cube de Paul Hissier, les boules de Bill , les truffes du Père Igor cultivées dans les champs du Père Pétuel ont entre-autres posé de sérieux problèmes à nos valeureux candidats. Ne parlons pas de la proportionnelle extravagante qui attendait au coin du bois les adultes de haute compétition : à vous décourager d'être scrutateur !

A 17 h, fin obligatoire des cogitations. Des jus de fruits permettent de relaxer les concurrents.

A 17 h 45 min, les résultats. Les récompenses nombreuses arrivent, pour un montant de 8000 F grâce à la Mairie de Poitiers, au CRDP, à l'Espace Mendès-France, au Conseil Régional et au Lycée Victor Hugo.

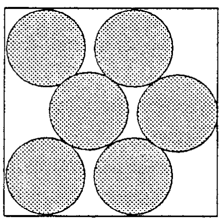
Un bel après-midi.

Jean-Claude Paumier.

Quelques uns des problèmes de cette finale :

LES BOULES DE BILL

Bill a acheté un jeu de six boules de pétanque identiques, de diamètre 9 cm, rangées «à plat» dans une boîte à fond carré, comme sur le dessin.



Bill constate qu'en secouant la boîte pleine (sans les cochonnets), il n'entend aucun bruit, et pourtant Bill n'est pas sourd !

Donnez la dimension du côté du fond de la boîte, exprimée en centimètres. On donnera le résultat exact, en utilisant, le cas échéant, le symbole $\sqrt{\ }$.

QUE DE SOEURS, MON FRERE !

Evelyne dit : «J'ai deux soeurs de plus que de frères». Benoit, son plus jeune frère, précise alors : «Moi, j'ai deux fois plus de soeurs que de frères !».

Mais combien sont-ils de frères et soeurs ?

LES TRUFFES DU PERE IGOR

Le père Igor est l'heureux propriétaire d'un bois de chênes truffiers, en forme de triangle rectangle. Igor l'a ceinturé d'une clôture dont les 1992 piquets sont régulièrement espacés de 1,5 mètres. On précise qu'un piquet est placé à chaque sommet du terrain triangulaire.

Quelles sont, dans l'ordre croissant, les dimensions du bois d'Igor ?

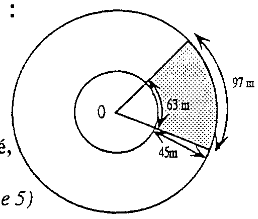
RALLYE MATHEMATIQUE POITOU - CHARENTES ; quelques extraits :

Echangerait terrain ...

La figure ci-contre représente un terrain qui est une partie d'une couronne.

Si on vous propose d'échanger ce terrain contre un terrain "carré" de 60 m de côté, cet échange vous est-il favorable ?

(Voir article page 5)



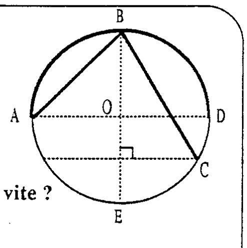
L'échange n'est ni favorable, ni défavorable !

NOUS AVONS FAIT TOUS CES FASTIDIEUX CALCULS POUR... RIEN !

Collège André Albert - Saujon

A vos marques, prêts ? partez !

Deux coureurs partent de A. L'un fait le "demi-tour" de piste ABD, l'autre décrit les segments [AB] puis [BC] *(C appartient à la médiatrice de [OE]).* Ils arrivent en même temps, l'un en D, l'autre en C. **Lequel des deux va le plus vite ?**



Exercice 4 : A VOS MARQUE, PRETS ? PARTEZ !

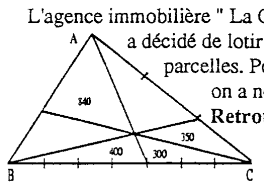
Nous esperons que notre exercice est juste car nous serions déçus du contraire parce que nous l'avons parcouru à vélo.

Collège André Albert - Saujon

Serez -vous géomètre-expert ?

L'agence immobilière " La Gestion des Terrains" a décidé de lotir le champ ABC en six parcelles. Pour quatre d'entre elles on a noté en m² la superficie.

Retrouver la superficie des deux autres parcelles.



Le Lion de la fontaine.

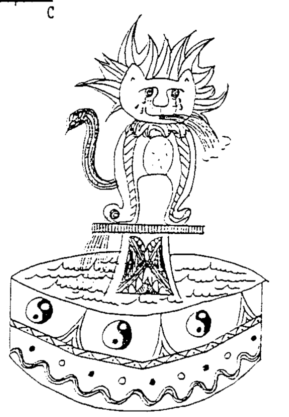
Une fontaine était formée d'un lion en bronze portant cette inscription : " Je puis jeter de l'eau par les yeux, par la gueule et par le pied droit. Si j'ouvre l'oeil droit, je remplirai mon bassin en 2 jours et si j'ouvre le gauche, je le remplirai en 3 jours. Avec mon pied, il me faudrait 4 jours et avec ma gueule, 6 heures.

Dites combien de temps il me faudrait pour remplir le bassin en jetant de l'eau à la fois par les yeux, par la gueule et par le pied ? " *(donner ce temps à la seconde près).*

Exercice n°3 Le Lion de la fontaine

De sa grande gueule le roi des animaux vomit un bassin entier en 6 H, de son oeil droit il pleure la flotte en 2 jours soit 48 heures, de son oeil gauche une larme de crocodile en 3 jours soit 72 heures et avec son pied, qu'il n'a pas pris, il finit de le remplir en 4 jours soit en 96 heures.

Collège André Albert - Saujon



Collège Camille Guérin - Poitiers

Feuilleton de l'évaluation

Episode 7 : Erreurs et Evaluation Formatrice.

par Jean-Paul GUICHARD

1. Le traitement des erreurs

Les erreurs se révèlent à travers les tâches scolaires. Que fait classiquement le professeur face à l'émergence de ces erreurs ? Tout d'abord il les **identifie** ; car il possède les bons critères de réussite.
Ensuite il les **corrige**, en disant ce qu'il fallait faire, en explicitant les procédures correctes, car il possède les bons critères des procédures. Et que fait l'élève de tout cela ? Le résultat est souvent décevant : il faut répéter, recommencer mille fois pour une amélioration parfois faible.
Que nous dit l'évaluation formatrice ? Que nous ne pouvons pas corriger les erreurs à la place de l'élève ; seul, lui, peut les corriger. Ce qu'il faut c'est lui «donner» les moyens de lui faire acquérir les outils que le professeur utilise :
- les critères de REUSSITE pour l'identification des erreurs,
- les critères de PROCEDURE pour leur correction.

C'est ce qui explique l'importance du travail à faire autour de ces critères, problème que nous avons abordé dans les deux épisodes précédents. Mais l'évaluation formatrice met l'accent sur une variable importante dans la gestion des erreurs : la nature des tâches proposées aux élèves.

2. La tâche complexe

Il s'agit de mettre en place des tâches qui favorisent, l'auto-régulation et donc l'identification et la correction des erreurs par l'élève lui même. Nous allons montrer sur un exemple simple comment la nature de la tâche peut modifier l'attitude de l'élève face à l'erreur.
Pour cela je vous propose de partir de l'erreur classique $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, et de développer deux scenarii que vous avez déjà vécus, mettant en scène cette erreur dans deux tâches différentes.

Tâche 1	**Tâche 2**
Développe : $(x + 3)^2$	La différence de 2 nombres est 20 et la différence de leurs carrés est 680. Combien valent ces nombres ?
Scénario.	**Scénario**
Elève : $(x + 3)^2 = x^2 + 9$ Professeur : Vérifie en prenant $x = 2$ Elève : * $(2 + 3)^2 = 22 + 32 = 13$ ou mieux * $(2 + 3)^2 = 22 + 9$ $25 = 13$?!!! ou mieux * si $x = 2$ $(x + 3)^2 = 5^2 = 25$ $x^2 + 9 = 2^2 + 9 = 13$?!!!	Elève : Soient x et y les deux nombres. $x - y = 20$ $x^2 - y^2 = 680$ $x = 20 + y$. donc $(20 + y)^2 - y^2 = 680$ $400 + y^2 = 680$ $400 = 680$?!!!
Analyse	**Analyse**
* L'erreur ne fait pas échouer la tâche: - pas de remise en cause - pas de recherche d'erreur - pas de vérification sans intervention extérieure. * L'erreur ne crée pas de problème et donc ne provoque pas de questionnement. * Les automatismes sont favorisés. Fabrication de «théorèmes-élèves» (*) * Le temps passé à la vérification serait bien souvent plus long, plus difficile, plus complexe (cf les difficultés des élèves à rédiger des vérifications comme celle esquissée ici) que l'exécution de la tâche elle-même, c'est donc dissuasif.	* L'erreur fait échouer la tâche - remise en cause - recherche de l'erreur - vérification des procédures par l'élève lui-même * L'erreur crée un problème et provoque un questionnement. («Bizarre, il doit y avoir une erreur quelque part, mais où ? ...») * Les automatismes sont en échec donc recherche de stratégies, de méthodes ... * L'élaboration de critères de réussite est quasi nécessaire pour assurer la vérification, et la recherche de critères de procédures indispensable pour la correction.
Pas de valeur	Valeur mobilisatrice.

Les micro-tâches du type 1 correspondent à des micro-procédures à maîtriser, décontextualisées et ne favorisant pas la gestion des erreurs. L'évaluation formatrice nous invite au contraire à proposer aux élèves des tâches du type 2, dénommées tâches **complexes**, tâches qui intègrent une pluralité de connaissances, procédures, compétences, et qui nécessitent de mettre en oeuvre des stratégies. Ces tâches mettent l'erreur au coeur de l'apprentissage et en font même le moteur.

3. L'auto-régulation

Un des moyens d'amener l'élève à réguler son action - c'est le sens de l'auto-évaluation en évaluation formatrice - c'est de lui proposer des situations qui risquent de le mettre en échec (**situations problèmes**), ou qui le laissent perplexe (situations où il n'est pas sûr de ce qu'il a fait).
Un autre moyen d'amener l'élève à l'auto-contrôle dans l'exécution de son travail est de travailler les CONSIGNES des tâches que nous donnons aux élèves en y intégrant des consignes de vérification. (Es-tu sûr de ton résultat ? Comment être sûr que ton résultat est bon ?...). Et pourquoi pas travailler avec les élèves sur la VERIFICATION de façon plus systématique ? Et nous voilà ramené au travail sur les critères d'évaluation que sont les critères de réussite. Et c'est l'enseignement essentiel de l'évaluation formatrice : l'évaluation est omniprésente au coeur de l'apprentissage ; c'est le moteur de la réussite des tâches et en se sens ce doit être une préoccupation essentielle de l'enseignement.

A la rentrée pour parler de DOCIMOLOGIE.

(*)A. BOUVIER Didactique des Mathématiques. Le dire et le faire. Cedic 1986

FONCTIONS ... 300 ans de définitions

1694 LEIBNIZ «J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites, qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe, et aux points de la courbe«

1718 BERNOULLI J. *«On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.» Notation* φx.

1748 EULER *«Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur...*
Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle qui comprend toutes les valeurs déterminées...
Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.
Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z. Par exemple, $a+3z$; $az-4zz$; $az+b\sqrt{aa-zz}$; cz ; *etc..., sont des fonctions de z.*
Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable.»

1755 EULER *«Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x.»*

1782 CONDORCET *«Je suppose que j'ai un certain nombre de quantités x, y, z,..., F, et que pour chaque valeur déterminée de x,y,z,...etc, F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent: je dis que F est une fonction de x,y,z,...*
Enfin je sais que lorsque x,y,z seront déterminées, F le sera aussi, quand même je ne connaîtrais ni la manière d'exprimer F en x,y,z, ni la forme de l'équation entre F et x,y,z ; je saurai que F est fonction de x,y,z.»

1797 LAGRANGE *«1.On appelle fonction d'une ou plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.*
2. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f, ou F ; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée de cette variable, comme x^2 *ou* $a+bx$ *ou etc., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi* $f(x)$ *désignera une fonction de x,* $f(x^2)$, $f(a+bx)$, *etc. désigneront des fonctions de* x^2, *de* $a+bx$, *etc.*
Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x,y, nous écrirons $f(x,y)$, *et ainsi des autres.»*

1797 LACROIX *«Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.»*

.... *A suivre*

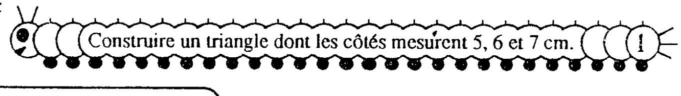
SOURCES et BIBLIOGRAPHIE

1. DAHAN-DALMEDICO, PEIFFER. Une histoire des mathématiques. Seuil 1986 (Points Sciences n°49). Chap. 6.
2. DHOMBRES & alia. Mathématiques au fil des âges. Gauthier-Villars 1987. Chap. 4.
3. APMEP . Fragments d'histoire des mathématiques. Brochure n°41 1981
4. BARRA, PENSEC. Sur l'enseignement de l'analyse. N°1 Fonctions. IREM de Poitiers 1976.
5. Groupe d'histoire des mathématiques. «Vous avez dit : Fonction ?». Feuille de vigne N° spécial. IREM de Dijon 1982.

METAMORPHOSE

«**La chenille**» est un exercice standard qui «se traîne» dans les manuels et qui n'est pas encore devenu «papillon». Nous vous proposions, dans le dernier COROL'AIRE, de le **métamorphoser** en exercice intéressant et de présenter l'intérêt de cette «**métamorphose**». Ramassez des chenilles, métamorphosez-les, faites vos commentaires. Nous vous publierons et vos élèves en tireront un grand profit.

Dans le COROL'AIRE n°8 de mars 92 nous vous proposions une première métamorphose de la «chenille» suivante :



Voici une deuxième métamorphose :

2 **M**étamorphose 2

> Les côtés d'un triangle mesurent 5, 6 et 7 cm.
> Ecris un programme LOGO pour le dessiner à l'écran (6°-5°).

Quel est le «plus» de cette métamorphose ?

1. Oblige à faire la construction que l'on voulait faire faire et de façon soignée (utilisation du compas).
2. Oblige à la mesure d'angles (utilisation du rapporteur) : l'élève saisit l'intérêt d'apprendre à mesurer des angles.
3. Oblige à <u>concevoir</u> un programme de construction et à l'<u>écrire</u>.
4. L'ordinateur évalue sans pitié si le triangle « se referme », mais en toute objectivité et sans problèmes relationnels. D'où motivation à la recherche de ses erreurs pour que ça marche.

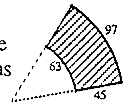
Le coin du Prof Ila Ransor

Dans le prochain Corol'aire paraîtront :

1) un complément de notre collègue Pichereau pour son article sur les polyèdres,

2) une mise au point concernant le réseau déformable proposé dans l'exercice 5 de l'épreuve d'entraînement du Rallye 92, certains collègues m'ayant fait part de leur étonnement devant la réponse donnée (8 barres) et pensant le problème possible avec un nombre moindre de barres.

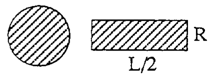
QUELQUES IDEES POUR UNE COURONNE



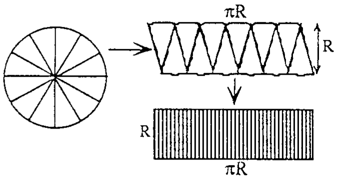
L'exercice 8 du Rallye Poitou-Charentes 1992 proposait le calcul de l'aire d'un morceau de couronne circulaire (dessin ci-contre). Cette aire était 3600 m² soit celle d'un carré de 60m de côté. L'échange envisagé entre les terrains ayant ces deux formes est donc équitable. Une réflexion amusante a été relevée dans un dossier de classe :

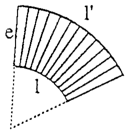
« *Si on n'aime pas tondre en rond, on tondra en ligne droite* «. Ce qui rend l'exercice un peu insolite, c'est que π n'intervient pas en apparence, le calcul pouvant être fait directement avec les seules données 97, 63 et 45 (voir - 2 -).

- 1 - Soit un cercle de rayon R ; sa longueur (périmètre) est $L = 2\pi R$ et l'aire du disque est $A = \pi R^2$. Mais en combinant ces deux formules, on a : $A = R \times L / 2$. Donc l'aire d'un disque est égale à celle d'un rectangle de côtés respectifs R et L / 2.

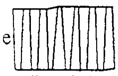


Une construction particulière rend bien compte de ce fait. Soit le cercle découpé en 2n secteurs (on prend sur la figure n = 6). On dispose ces secteurs tête-bêche ; on obtient un «pseudo-parallèlogramme» de hauteur R et dont les «côtés» sont une succession d'arcs de cercles de longueur πR. A la «limite», quand n augmente indéfiniment, le pseudo-parallèlogramme devient le rectangle de côtés πR et R, et d'aire πR^2. C'est l'aire du cercle ! Attention : Il faut prendre de grandes précautions avec ce genre de «raisonnement graphique», mais l'idée est intéressante et peut être exploitée dans d'autres situations.



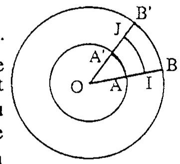


- 2 - Soit une couronne dont les caractéristiques sont données dans la figure ci-contre : e est la largeur, l et l' sont les longueurs des arcs et O est le centre des cercles. On peut de la même façon que précédemment, diviser chacun des arcs en 2n arcs égaux, puis mettre tête-bêche les 2n morceaux de couronne ainsi définis. On obtient, comme précédemment, un «pseudo-parallèlogramme» de hauteur e et de longueurs de «côtés» (l + l') / 2. A la limite, on obtient un rectangle de côtés e et (l + l') / 2, et d'aire $A = (l + l') \times e / 2$. C'est l'aire cherchée. Pour l'exercice, on a $A = (97 + 63) \times 45 / 2$.

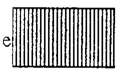


(l + l') / 2

- 3 - Calculs 1 : Soit R et R' les rayons des deux cercles limitant la couronne. OA = R et OB = R'.



La largeur de la couronne sera e = R' - R. Soit α la mesure de l'angle $\widehat{AOA'}$ (on peut prendre α en radians, mais il n'interviendra pas par la suite). Les longueurs des arcs AA' et BB' sont $l = \alpha R$ et $l' = \alpha R'$ *(proportionnalité de la longueur d'un arc et de la mesure de cet arc)*. D'où $l / R = l' / R'$. On peut également utiliser l'homothétie de centre O et de rapport R' / R. L'aire du secteur OAA' vaut $A = (\alpha / 2) \times R^2$ *(proportionnalité de l'aire et de la mesure de l'arc)*. On peut écrire $A = (\alpha R / 2) \times R$; soit $A = l \times R / 2$. Cette formule donnant l'aire d'un secteur est elle aussi très intéressante ; de même, l'aire du secteur OBB' vaut $A' = l' \times R' / 2$. L'aire du morceau de couronne est donc :



(l + l') / 2

$a = l'R' / 2 - lR / 2$; soit $a = (l'R' - lR) / 2$. On peut écrire, en remarquant que $l / R = l' / R'$ donne $lR' - l'R = 0$:

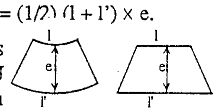
$a = (l'R' - l'R + lR' - lR) / 2 = (l + l') (R' - R) / 2$; d'où $a = (l + l') \times e / 2$.

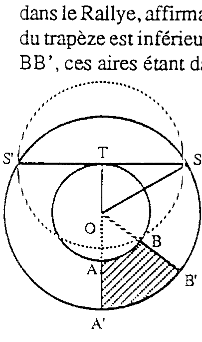
- 4 - Calcul 2 : Le calcul précédent peut paraître sophistiqué, mais il permet d'illustrer une technique : « *compliquer un calcul pour pouvoir le simplifier*«. On peut faire un calcul plus classique. L'aire du morceau de couronne est $a = A - A'$, soit $a = (\alpha / 2) (R'^2 - R^2)$; d'où $a = (\alpha / 2) (R' + R) (R' - R)$, puis $a = [(l' + l) / 2] \times e$.

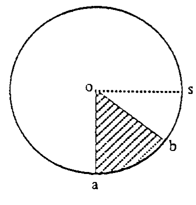
- 5 - Calcul 3 : Autre possibilité pour traiter le problème à partir de $a = (l'R' - lR) / 2$: On a $l / R = l' / R' = (l' + l) / (R' + R)$ *(propriété classique des proportions)* ; d'où $l = R \times (l + l') / (R + R')$ et $l' = R' \times (l + l') / (R + R')$;

donc $a = (1/2) (R'^2 - R^2) \times (l + l') / (R + R')$, soit $a = (1/2) (l + l') (R' - R)$; et on retrouve le résultat $a = (1/2) (l + l') \times e$.

- 6 - Commentaires : On peut remarquer, pour compléter, que (l' + l) / 2 est la moyenne des longueurs des arcs AA' et BB'. C'est aussi la longueur de l'arc IJ correspondant au cercle de rayon (R + R') / 2, I et J étant les milieux respectifs de [AB] et [A'B']. L'arc IJ est en somme la moyenne des bases circulaires du morceau de couronne (le cercle de centre O et de rayon OI est le cercle moyen de la couronne). On peut alors rapprocher la formule donnant l'aire a de celle donnant l'aire du trapèze de bases l et l' et de hauteur e. Ce qui montre l'erreur faite par certains élèves, dans le Rallye, affirmant que l'aire du morceau de couronne est égale à l'aire du trapèze AA'B'B. En effet AA' < l et BB' < l'. L'aire du trapèze est inférieure : l'aire du segment circulaire de base AA' est évidemment inférieure à celle du segment circulaire de base BB', ces aires étant dans le rapport $(R' / R)^2$, carré du rapport d'homothétie.







- 7 - Couronne et disque d'aires égales : Soit une couronne circulaire. Traçons, en un point T du cercle intérieur, la tangente SS'. On a OS = R', OT = R et donc $TS^2 = OS^2 - OT^2$, soit $TS^2 = R'^2 - R^2$ *(Théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle OST)*. On a vu plus haut que l'aire de la couronne était $A = \pi(R'^2 - R^2)$; d'où $A = \pi TS^2$. L'aire de la couronne est égale à l'aire du disque de diamètre SS'. Si on trace un cercle de centre o et de rayon os = ST, et les rayons oa et ob soient tels que oa et ob soient respectivement parallèles à OA et OB, alors l'aire du morceau de couronne hachuré sera égale à l'aire du secteur hachuré.

Exercice : Calculer le rayon oa et la longueur de l'arc ab en fonction de l, l' et e.

Serge PARPAY.

Eléments de solution de l'exercice :

Le nombre de rotations conservant un polyèdre régulier est 2A (A = nombre d'arêtes)

Reçu de notre collègue **M. Pichereau,** lycée Marguerite de Valois, Angoulème.

I 1) Il y a 5 sortes de polyèdres réguliers convexes : tétraèdre (régulier), cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre.

2) Le polyèdre dont les sommets sont les milieux des faces d'un cube est un octaèdre de même centre de symétrie.

Le polyèdre dont les sommets sont les milieux des faces d'un dodécaèdre est un icosaèdre de même centre de symétrie.

II Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des rotations conservant un polyèdre régulier et O l'isobarycentre des sommets du polyèdre

1) O est le centre de la sphère circonscrite au polyèdre et est le centre de symétrie du polyèdre (sauf pour le tétraèdre).

2) Si $r \in \mathcal{R}$ - idv, l'axe de r pase par O.

3) Si $r \in \mathcal{R}$ - idv, r ne peut laisser invariants 2 sommets d'une même arête.

4) Une arête est toujours transformée en une arête par $r \in \mathcal{R}$.

5) Il existe au plus une rotation de $\mathcal{R}$ transformant une arête donnée en une arête donnée.

6) Si un polyèdre admet A arêtes card ($\mathcal{R}$) $\leq$ 2A
(l'arête [AB] ne peut être transformée qu'en [AB] ou [BA] ou [AC] ou [CA]...).

III Si un polyèdre régulier admet A arêtes, il y a effectivement 2A rotations le conservant globalement, donc card ($\mathcal{R}$) = 2A

En fait ces rotations r se répartissent en 3 catégories ($r \neq id$)

C1 : l'axe de r est perpendiculaire à 2 faces parallèles,

C2 : l'axe de r passe par 2 sommets symétriques par rapport à O,

C3 : l'axe de r passe par les milieux de 2 arêtes symétriques par rapport à 0 et c'est un demi-tour.

Et en ajoutant 1 (r = id) on obtient à chaque fois 2 A

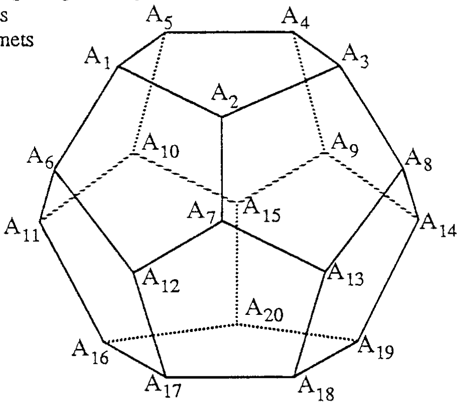
	Tétraèdre	Cube	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
2A	12	24	24	60	60
C1	0	9	8	24	20
C2	8	8	9	20	24
C3	3	6	6	15	15
Total	11	23	23	59	59

Preuve :

Il s'agit de faire la vérification de ces «chiffres» pour le tétraèdre, le cube et le dodécaèdre car les résultats relatifs à l'octaèdre et à l'icosaèdre s'obtiennent grâce à la notion de dualité (voir I.2) à partir de ceux du cube et du dodécaèdre. Par exemple considérons le cube «circonscrit« à l'octaèdre : toute rotation conservant le cube conserve globalement les milieux des faces, donc l'octaèdre.

Vérification dans le cas du Dodécaèdre :

12 faces (pentagones réguliers)
30 arêtes
20 sommets



Justification pour C1 :

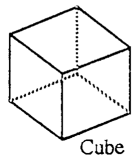
Les polygones (plans) $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, $A_6 A_7 A_8 A_9 A_{10}$, $A_{11} A_{12} A_{13} A_{14} A_{15}$, $A_{16} A_{17} A_{18} A_{19} A_{20}$ sont des pentagones réguliers qui ont pour axe la droite Δ passant par O et perpendiculaire aux faces $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ et $A_{16} A_{17} A_{18} A_{19} A_{20}$: les rotations d'axe Δ et d'angle $k \times (2\pi/5)$ (k = 1, 2, 3, 4) les laisse globalement invariant.

D'où card $(C_1) = (12/2) \times 4 = 24$

Justification pour C2 :

Soit $\Delta = (A_1 A_{19})$ (A_1 et A_{19} sont symétriques par rapport à O) : le triangle $A_2 A_5 A_6$ est équilatéral, les triangles $A_{11} A_7 A_4$ et $A_{12} A_3 A_{10}$ sont coplanaires et équilatéraux, les triangles $A_{16} A_{13} A_9$ et $A_{17} A_8 A_{15}$ sont coplanaires et équilatéraux, le triangle $A_{14} A_{18} A_{20}$ est équilatéral : tous ces triangles ont pour axe la droite Δ ; donc les rotations d'axe Δ et d'angles $2\pi/3$, $4\pi/3$ les conservent globalement :

D'où card $(C_2) = (20/2) \times 2 = 20$

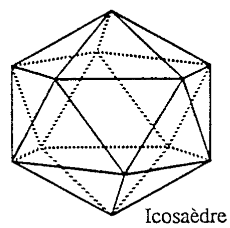


Cube

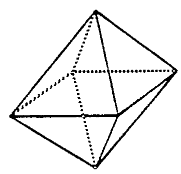
Justification pour C_3 :

Soit I le milieu de $[A_1 A_5]$, J le milieu de $[A_{18} A_{19}]$ et d le demi tour d'axe (IJ). Considerons le plan P = (A1 A5 A18 A19) et Q plan perpendiculaire à la face A1 A5 A4 A3 A2 et passant par A3, A8, A11, A16, I, J. Ces 2 plans sont des plans de symétrie orthogonale du dodécaèdre ; mais $P \perp Q$ et $P \cap Q$ = (IJ) donc $s_p \circ s_q = d$:

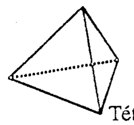
D'où card $(C_3) = (30/2) \times 1 = 15$



Icosaèdre



Octaèdre



Tétraèdre

Remarques : Voir dans le livre GROUPES (de Bouvier-Richard chez Hermann), le lien entre les 5 types de polyèdres réguliers et tous les sous groupes finis de $O^+ (R^3)$.

Théorème de Descartes-Euler : **S - A + F = 2**

(Formule valable pour tous les polyèdres convexes)

	Tétraèdre	Cube	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre
F faces	4	6	8	12	20
S sommets	4	8	6	20	12
A arêtes	6	12	12	30	30