

Un problème paru dans APMEP-POITIERS -INFOS (Novembre 1988)

Le coin du Prof. ILA RANSOR

Un exercice plaisant et délectable.

J'ai reçu dernièrement une lettre au style curieusement suranné. La voici dans son intégralité.

Je viens, par la présente, vous entretenir d'un problème curieux qui me vint à l'esprit ces jours derniers. Ma sagacité s'exerçait sur deux petits problèmes de construction que je pourrais exposer comme suit en quelques mots :

Est-il possible d'inscrire et de circonscrire un carré à un parallélogramme donné ?

Dans votre langage de maintenant, peut-être le traduiriez-vous ainsi, en termes plus précis : un parallélogramme ABCD étant donné, est-il possible de construire un carré PQRS dont les sommets P, Q, R, S appartiennent respectivement aux droites (AB), (BC), (CD), (DA) ? Est-il possible de construire un carré IJKL tel que A, B, C, D, soient respectivement des points des droites (IJ), (JK), (KL), (LI) ?

Vous connaissez sans doute la curiosité de mon esprit et vous ne serez donc point étonné si je vous dis avoir cherché à rapprocher par un lien géométrique les carrés solutions des deux problèmes (lorsqu'ils existent). Figurez-vous qu'en procédant de la sorte, je découvris la propriété suivante, à ma connaissance inconnue et ne figurant encore dans aucun manuel pourtant si friand de ces petites merveilles :

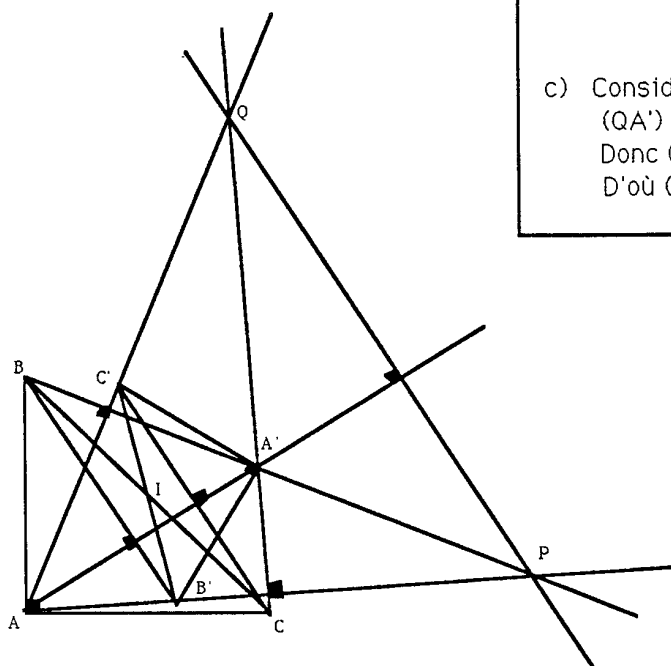
ABC et A'B'C' étant deux triangles rectangles isocèles de même sens, dont les hypoténuses [BC] et [B'C'] se coupent en leur milieu et tels que (AB') et (BA') se coupent en un point P, et (AC') et (A'C) se coupent en un point Q, il se trouve que (PQ) est parallèle à (BB') et à (CC').

Je me mis aussitôt en quête d'une solution à ce nouveau problème. Vous connaissant, cher ami, comme je vous connais, j'imagine que vous n'aurez de cesse tant que vous ne l'aurez, vous aussi, résolu. Je me fais à l'avance une joie à l'idée d'admirer la finesse de votre démonstration. Elle n'aura d'égale que votre jouissance à découvrir l'élégance de la mienne. Je suis certain aussi que vous saurez faire de ce problème, un exercice aussi riche que délectable pour vos heureux élèves de 1ère S ou de Terminale C, dont vous êtes un maître si brillant.

Mathématiquement vôtre.

MRC.

Voici une solution proposée par notre collègue PICHÉREAU du Lycée Marguerite de Valois d'Angoulême



J'appelle I le milieu de [BC] et [B'C'].

a) $(BB') \parallel (CC')$ car $B'CC'B$ est un parallélogramme; ses diagonales se coupent en leur milieu.

b) Soit r la rotation de centre I et de mesure d'angle $\pi/2$.
 $r(B) = A$, $r(A) = C$, $r(B') = A'$, $r(A') = C'$.
d'où $(AB') \perp (CA')$; $(BA') \perp (AC')$; $(AA') \perp (BB')$
b1 b2 b3

c) Considérons le triangle QAP
(QA') et (PA') en sont deux hauteurs d'après b1 et b2.
Donc (AA') est la troisième hauteur.
D'où $(AA') \perp (QP)$ et d'après b3, $(QP) \parallel (BB')$.

Directrice de la publication: Jeanine CARTON

Rédacteur: Jean FROMENTIN

Dépôt légal: en cours

Imprimerie: IREM Faculté des Sciences

40 Avenue du Recteur Pineau

86022 POITIERS CEDEX

Edité par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, Régionale de Poitiers (APMEP-Poitiers)

Siège: IREM Faculté des Sciences

40 Av du Recteur Pineau

86022 POITIERS CEDEX

Tirage : 1200 exemplaires