Ru – Bri – COLLAGE

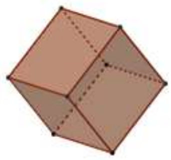
Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

136-1 *Le problème 64 du Petit Archimède n° 39-40*



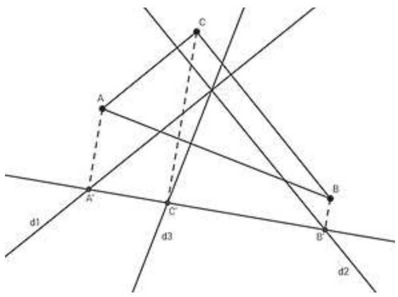
Dans un repère orthonormé, les coordonnées des sommets d'un cube sont toutes entières. Montrer que la longueur de l'arête de ce cube est entière.

136-2 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)*

Le curé et son sacristain

Mr le Curé rencontre son sacristain, il lui dit : « Je viens de croiser trois de mes paroissiens ; le produit de leurs âges, en nombre d'années, est égal à 2450 alors que la somme est égale au double de votre âge. Quels sont donc les âges des trois paroissiens ? »
Le sacristain répond : « Je ne peux pas conclure ».
« Vous avez raison », lui répond son curé, « Mais vous connaissez mon âge, eh bien, sachez que je suis plus vieux que chacune des trois personnes ».
Comment le sacristain peut-il maintenant conclure ?

136-3 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)*



Soit ABC un triangle quelconque et d une droite quelconque dans le plan. A, B et C se projettent orthogonalement sur d en A', B' et C' respectivement.
Démontrer que la perpendiculaire d_1 à (BC) passant par A', la perpendiculaire d_2 à (CA) passant par B' et la perpendiculaire d_3 à (AB) passant par C' sont concourantes.

136-4 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)*

On tire simultanément deux boules d'une urne contenant quatre boules numérotées de 1 à 4. On note leur numéro puis on les remet dans l'urne. On recommence l'opération jusqu'à ce que toutes les boules soient sorties au moins une fois. Combien doit-on effectuer de tirages en moyenne ?

Pour résoudre cette question, on pourrait essayer le raisonnement suivant :
En moyenne il faut effectuer un certain nombre de tirages avant de sortir la boule numéro 1. Il paraît normal de supposer que ce nombre moyen de tirage serait le même si on avait choisi

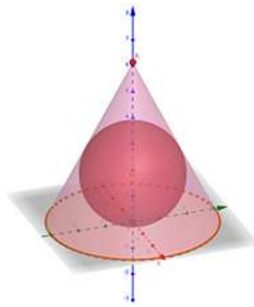
n'importe laquelle des trois autres boules. Et donc que ce sera finalement le nombre moyen de tirages cherché. Oui mais …
Parmi les six couples de boules qu'il est possible de tirer, trois contiennent la boule numéro 1. La probabilité d'obtenir la boule numéro 1 au premier tirage est donc de 1/2. Les tirages successifs sont indépendants, d'où la permanence de cette probabilité liée à la sortie de la boule numéro 1. On reconnaît que la question posée se ramène à chercher l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre 1/2. On le sait, dans ce cas, cette espérance vaut 2.

Deux tirages ?? Deux tirages seulement, en moyenne, pour sortir finalement les quatre boules de l'urne au moins une fois ? Ceci est manifestement faux.
Voyez-vous où est l'erreur ?
Mais alors, quelle est la bonne réponse à la question initiale posée ?

Des solutions

133-3 *Proposé par Jacques Chayé*

Circonscrire à une sphère un cône de volume minimum.



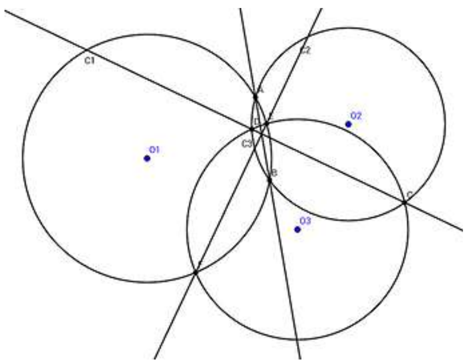
Solution de l'auteur

Soit S le sommet d'un cône de révolution, tangent à une sphère de centre O ; choisissons le rayon de cette sphère comme unité de longueur.
Dans un plan contenant la droite (SO), soit [AA'] le diamètre de la base du cône, H le milieu de [AA'] et T le point de contact de la sphère et de [SA].
Posons AH = x avec x > 1 et $\widehat{HAO} = \alpha$.
On cherche à minimiser SH × x^2.
Dans le triangle HAS : SH = $x\tan 2\alpha = x(2\tan\alpha)/(1 - \tan^2\alpha) = 2/(1 - 1/x^2) = 2x^2/(x^2 - 1)$.
Donc SH × $x^2 = 2x^4/(x^2 - 1)$. Considérons $f(x) = 2x^4/(x^2 - 1)$, on a $f'(x) = 4(x^5 - 2x^3)/(x^2 - 1)^2$.
La dérivée est du signe de $x^3 - 2x$, donc ici de $x^2 - 2$, d'où le tableau de variation de f :

x	1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	0	+	
Variation de f		↘	8	↗	

Le volume minimum est donc égal à : $8\pi/3$

134-3 *Proposé par Gaspard Monge*

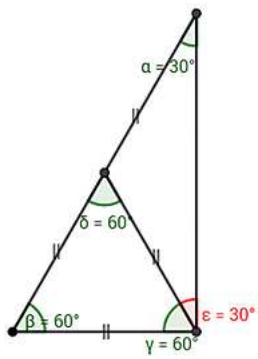


Trois cercles $C1$, $C2$, $C3$ sécants deux à deux.
$C1 \cap C2$ = {A ; B}, $C2 \cap C3$ = {C ; D}, $C1 \cap C3$ = {E ; F}.
Les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes ou parallèles.

Solution de Frédéric de Ligt

On note R_i le rayon du cercle C_i de centre O_i et pour tout point M du plan $P_{C_i}(M) = O_iM^2 - R_i^2$ pour i valant 1, 2 ou 3 (c'est la puissance du point M par rapport au cercle C_i).

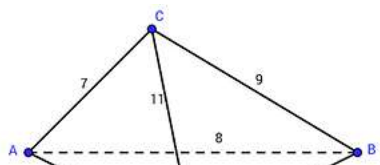
On montre tout d'abord que la droite (AB) est l'ensemble des points du plan qui ont la même puissance par rapport à C_1 et C_2.
Soit M un point du plan ayant la même puissance par rapport à C_1 et C_2.
On a donc $O_1M^2 - R_1^2 = O_2M^2 - R_2^2$.
On fixe un repère d'origine O_1 et d'axe des abscisses (O_1O_2).
On a $O_1(0\ ;\ 0)$, $O_2(a\ ;\ 0)$ et $M(x\ ;\ y)$; a non nul .
$O_1M^2 = x^2 + y^2$ et $O_2M^2 = (x - a)^2 + y^2$.
$P_{C1}(M) = P_{C2}(M)$ se traduit alors par $x^2 + y^2 - R_1^2 = (x - a)^2 + y^2 - R_2^2$.
On en déduit $x = (a^2 + R_1^2 - R_2^2)/2a$. On reconnaît l'équation d'une droite perpendiculaire à la droite (O_1O_2). Par ailleurs, comme $O_1A = O_1B = R_1$ et $O_2A = O_2B = R_2$ on a $P_{C1}(A) = P_{C2}(A) = 0$ et $P_{C1}(B) = P_{C2}(B) = 0$, les points A et B appartiennent bien à la droite qui vient d'être déterminée. La droite (AB) est bien l'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à C_1 et C_2.
On montre de même que la droite (CD) (resp. (EF)) est l'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à C_2 et C_3 (resp. C_1 et C_3).
Si les points O_1, O_2 et O_3 ne sont pas alignés, les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point G.
On a alors $P_{C1}(G) = P_{C2}(G) = P_{C3}(G)$. D'où G a la même puissance par rapport à C_1 et C_3, c-à-d G est un point de la droite (EF). Les droites (AB), (CD) et (EF) sont bien concourantes.
Si les points O_1, O_2 et O_3 sont alignés, les droites (AB), (CD) et (EF), toutes perpendiculaires à l'axe (O_1O_2), sont parallèles entre elles.



135-1 *Proposé par Djelloul Sebaa*

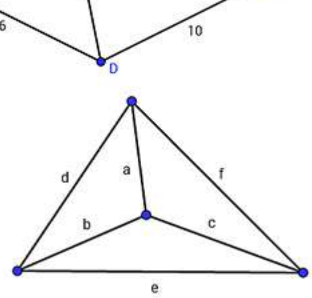
Dans un triangle une médiane peut-elle être aussi une trisectrice ?

Solution de Frédéric de Ligt
(Dessin ci-contre)



135-4 *Proposé par Frédéric de Ligt*

Calculer le volume du tétraèdre ci-contre.



Solution de Dominique Gaud
En 1752, Euler a démontré une formule qui donne le volume d'un tétraèdre en fonction de la longueur de ses arêtes.
$V = \frac{1}{12}\sqrt{P - Q + R}$.
$P = 4a^2b^2c^2$; $Q = a^2E^2 + b^2F^2 + c^2D^2$; $R = D.E.F$
$D = a^2 + b^2 - d^2$; $E = b^2 + c^2 - e^2$; $F = a^2 + c^2 - f^2$
Ce qui donne, avec les données numériques fournies, un volume de 48.

N.d.l.r.
La démonstration originale de cette formule figure dans L. Euler, *Novi commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae.*, t.IV, 1752, p.160 (disponible sur le Net)
Voir aussi l'article de Wikipedia "Tétraèdre" qui est très complet sur la question.