Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Jean-Marie Parnaudeau nous fait découvrir une construction étonnante et peu connue. Voici son courrier.

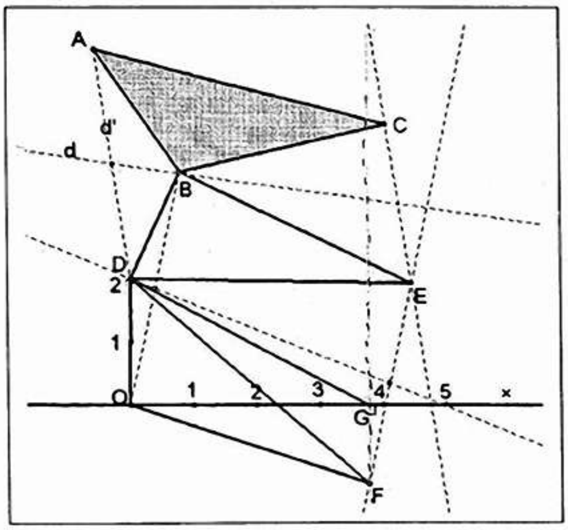
Comment mesurer une aire avec une règle graduée ?

Je vous propose ce texte d'André Myx paru dans Polygone (revue de l'IREM de Lyon).
Ce que je trouve joli, c'est que :
- la construction n'est pas difficile (mais technique) si on a compris que l'on garde à chaque fois un point fixe,
- la preuve n'utilise que le fait suivant : si deux triangles ont même hauteur et même base, alors ils ont même aire (ce qui saute aux yeux pour les deux derniers. Et idem pour des trapèzes,
- et, cerise sur le gâteau, on voit des transformations affines qui conservent les aires et pas toujours les distances (il y a longtemps que les affinités ne sont plus enseignées !).

Mesurer l'aire d'un triangle en un coup de double-décimètre.

Il se disait des choses bizarres dans ce Collège de la Zup de Saint Julien Molin-Molette … le prof de maths affirmait qu'on pouvait repérer directement sur un double-décimètre la mesure de l'aire d'un triangle ABC.

Les données : un triangle ABC est dessiné dans le plan, une règle graduée (Ox) et perpendiculairement à (Ox) en O un segment [OD] de 2 cm.



Analysez cette épure et montrez que l'abscisse du point G donne la mesure de l'aire de (ABC) en cm^2.

Quelques indications :

On passe du triangle (ABC) au triangle (DBE) par une affinité d'axe d, de direction d' et de rapport -1 (on pourrait parler de symétrie oblique d'axe d et de direction d').

– La symétrie oblique conserve les aires :
aire (ABC) = aire (DBE).

– Déterminer la succession des transformations :
Triangle (ABC) → Triangle (DBE) →
Triangle (DOF) → Triangle (DOG).

Le triangle ABC, l'axe [Ox) et le point D étant donné, tout le problème est de bien construire les axes et les directions des symétries obliques.

André MYX

À propos de l'auteur :
https://www.apmep.fr/Andre-Myx

Des problèmes

135-1 *Proposé par Djelloul Sebaa*

Dans un triangle une médiane peut-elle être aussi une trisectrice ?

135-2 *Proposé par Daniel Perrin (Orsay)*

Le chocolat

À Saint-Tricotin-sur Pelote (Marne-et-Garonne), le gibier se faisant de plus en plus rare, les chasseurs se distraient comme ils peuvent. Ainsi, un jour, revenant bredouille de la chasse, Vincent Glier dit à Marc Hassin en arrivant en ville :

le produit des âges de mes trois filles est 36, leur somme est le numéro de cette maison. Quels sont les âges de mes filles ?

- Je vois que vous avez des jumelles, mais cela ne me suffit pas pour répondre.

- C'est juste, j'ajoute que ma fille aînée aime le chocolat.

- Alors je peux répondre.

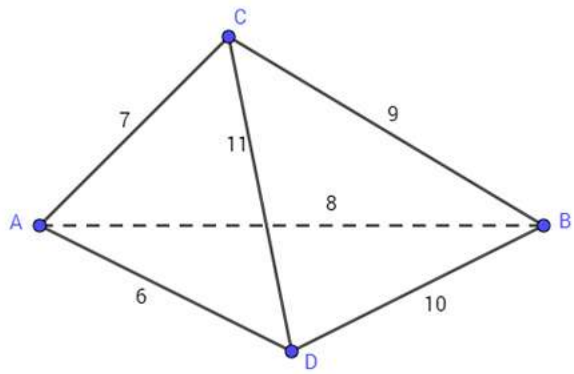
Quels sont les âges des filles ?

135-3 *Proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)*

Soit la fonction f définie sur les réels positifs par $f(x) = (E(x) + 1 - \{x\})^{-1}$ où E(x) désigne la partie entière de x et {x} sa partie décimale. Montrer que la suite (x_n), avec n entier naturel non nul, définie par $x_n = f^{\,n}(0)$, où $f^{\,n}(0)$ désigne la nième itérée de 0 par f, a ses termes en bijection avec l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs.

135-4 *Proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)*

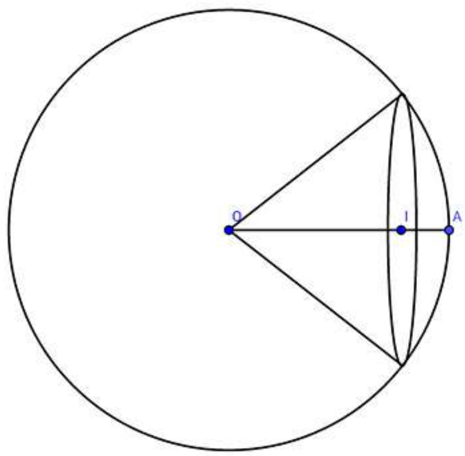
Calculer le volume du tétraèdre ci-contre :



Des solutions

132-2 *Proposé par Jacques Chayé*

Une sphère est coupée par un plan, de telle sorte que le segment sphérique ayant une base déterminée par ce plan soit équivalent au cône de même base qui a pour sommet le centre de la sphère (problème du bac 1808 à Nancy).



Solution de l'auteur

Choisissons le rayon de la sphère comme unité de longueur. Soit I le centre du cercle de base du cône ; posons OI = x ; le rayon du cercle est alors égal à : $\sqrt{1-x^2}$ et le volume du cône à $\pi(1 - x^2)x/3$. Le volume du segment sphérique est égal à :

$$\int_x^1 \pi\,(1-t^2)dt = \pi[t - t^3/3]|_x^1 = \pi(\frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3}) = \pi(2 - 3x + x^3)/3.$$

Ces deux volumes sont égaux si et seulement si :

$$(1 - x^2)x = 2 - 3x + x^3 \text{ ; c'est-à-dire } \quad x^3 - 2x + 1 = 0$$

Une racine évidente du premier membre est 1, cela correspond au cas où les deux volumes sont nuls. Par division par $x - 1$, on obtient $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$.

Le polynôme $x^2 + x - 1$ admet deux racines $x' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Seule la première est positive et répond à la question, il s'agit en fait de l'inverse du nombre d'or.

133-2 *Proposé par Daniel Perrin*

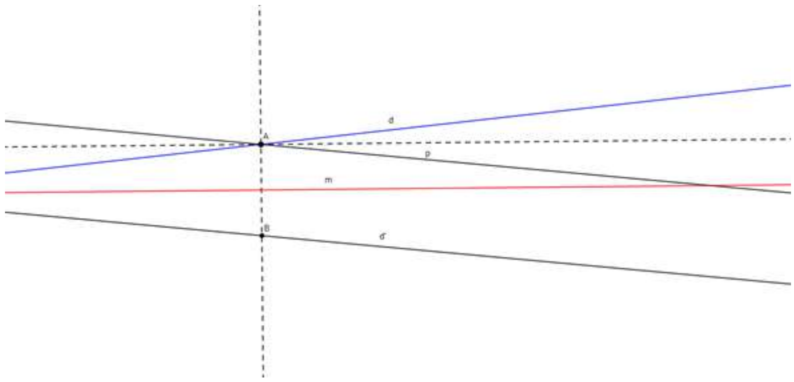
Un classique

La planche à dessin de Zénon Chalant, le dessinateur industriel maladroit de Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne), est trop petite et il a dessiné deux droites *d* et *d'* qui se coupent en un point O situé en dehors de la planche.

Comment peut-il tracer la bissectrice de l'angle formé par les deux droites ?

Solution de Jacques Chayé

Par un point A de la droite *d*, traçons la parallèle p à la droite *d'*. Soient *b* une des deux bissectrices du couple des deux droites *d* et *p* dont le point d'intersection B avec *d'* est situé sur la feuille de dessin. La médiatrice *m* de [AB] est alors la droite cherchée.



133-4 *Proposé par Frédéric de Ligt*

Quadruplets diophantiens

On appelle quadruplet diophantien un ensemble de quatre nombres entiers naturels $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ tel que $a_i\, a_j + 1$ est un carré parfait avec $1 \leq i < j \leq 4$.

Dans ses commentaires sur *Les arithmétiques* de Diophante, Pierre de Fermat reprend la question XXI de son livre IV :

« Invenire quatuor numeros, ut qui fit ex binorum mutua multiplicatione, adscitâ unitate, faciat quadratum ».

Il propose comme solution le quadruplet (3, 1, 8, 120). En effet, et pour ceux qui ont perdu leur latin, le texte ci-dessus s'éclairera :

3x1+1 = 4 ; 3x8+1 = 25 ; 3x120+1 = 361 ; 1x8+1 = 9 ; 1x120+1 = 121 ; 8x120+1 = 961.

Quelle valeur donner à l'entier naturel n pour que (1, 8, 15, n) soit un quadruplet diophantien ?

Solution de l'auteur

En prenant n = 528 on obtient un quadruplet diophantien :

1x8 + 1 = 9 = 3^2 ; 1x15 + 1 = 16 = 4^2 ; 1x528 + 1 = 529 = 23^2 ; 8x15 + 1 = 121 = 11^2 ; 8x528 + 1 = 4225 = 65^2 ; 15x528 + 1 = 7921 = 89^2.

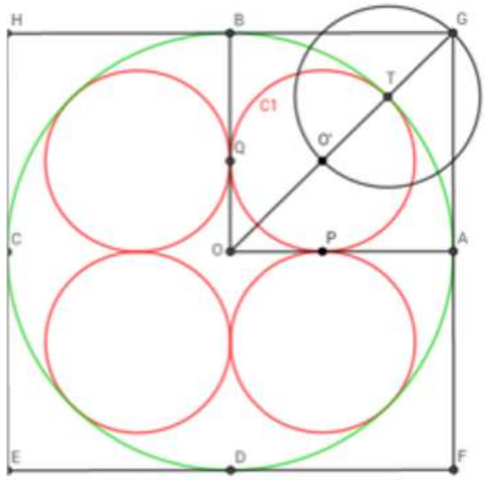
134-1 *Proposé par Serge Parpay*

Soit un cercle C, construire quatre cercles C1, C2, C3 et C4, de même rayon, tangents entre eux et tangents à C.

N.d.l.r. Une grande variété de réponses à cette question

Solution Pierre Mineau

Soit C un cercle de centre O et de rayon R, on veut tracer quatre cercles tangents intérieurement au cercle C. Traçons deux diamètres orthogonaux [AC] et [BD] et les deux segments [HF] et [EG], de supports respectifs les bissectrices des deux axes.



Appelons r le rayon de chacun des petits cercles, et considérons le cercle C1 du premier quadrant de centre O' ; comme ce cercle est tangent aux axes, appelons T, P et Q, les points de tangence respectifs de ce cercle avec le cercle C, l'axe des abscisses et celui des ordonnées, on a :

O'T = O'P = O'Q = r ;

OT = R= OO' + O'T ;

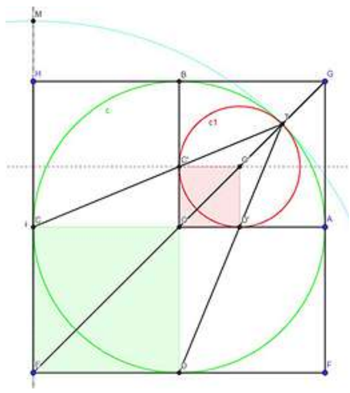
OO' = $\sqrt{2}$r .

On a donc R = $\sqrt{2}$r + r = r$(\sqrt{2}+1)$ et

r = $\frac{R}{1+\sqrt{2}} = R(\sqrt{2}-1)$;

or TG = OG – OT = $\sqrt{2}R - R = r$.

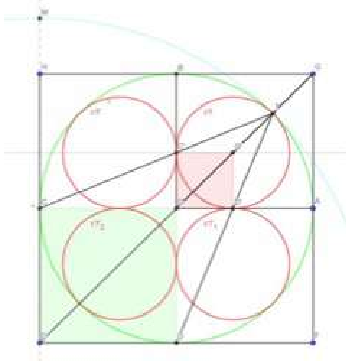
Pour trouver le point O', il suffit donc de reporter la distance TG sur le segment [OT] de sorte que T soit le milieu de [O'G] et de tracer ensuite le cercle de rayon O'T. On trace les trois autres cercles par symétrie.



Solution de Jean-Paul Mercier

Il suffit de construire le cercle C1 comme homothétique du cercle C(O,R) dans l'homothétie de centre T, point de tangence des deux cercles, qui transforme E en O, où EFGH est le carré circonscrit à C, E-O-T-G étant sur la même diagonale.

C1 pour C est dans le même rôle que C pour le cercle de centre E et de rayon ET, tous les trois tangents en T.



Observation préalable. Les quatre petits cercles tangents comme C1 dans C présentent une figure avec quatre axes de symétrie : il suffit de se ramener à la configuration évoquée C1 dans C, dans le quart de figure lui correspondant. On construit le carré EFGH circonscrit à C. [OG] coupe le cercle C en T.

On construit les diamètres [AC] et [BD] de C (avec A sur EF). Puis tracer [CT] qui recoupe [OB] en C', ou tracer [DT] qui recoupe [OA] en D'. Construire O' sur [OT] par la perpendiculaire à [OB] en C' (ou la perpendiculaire à [OA] en D').

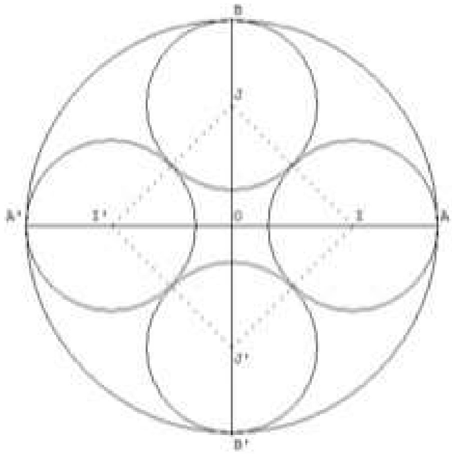
Le rapport d'homothétie est intéressant à faire trouver en 3^e^. Une équation contenant $\sqrt{2}$ permet de le trouver sous une forme brute : $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

À quel niveau étudie-t-on encore sa transformation en $\sqrt{2}-1$?

Solution de Jacques Chayé

Soient [AA'] et [BB'] deux diamètres perpendiculaires du cercle C de centre O. L'énoncé ne précise pas si les cercles à construire sont intérieurs ou extérieurs à C.

1^er^ cas : cercles intérieurs



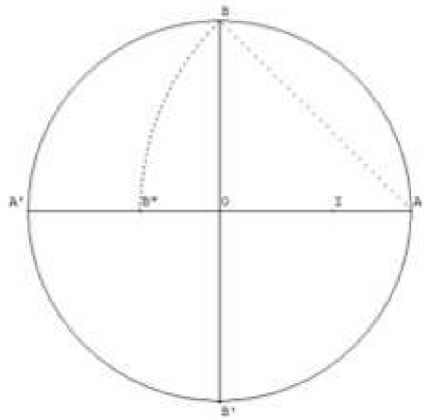
Prenons OA comme unité de longueur. Soit r le rayon des quatre cercles à tracer et soient I, J, I' et K' leurs centres respectifs. Dans le triangle rectangle OIJ :

$$IJ^2 = OI^2 + OJ^2 \quad \text{c-à-d} \quad 4r^2 = 2(1 - r)^2$$

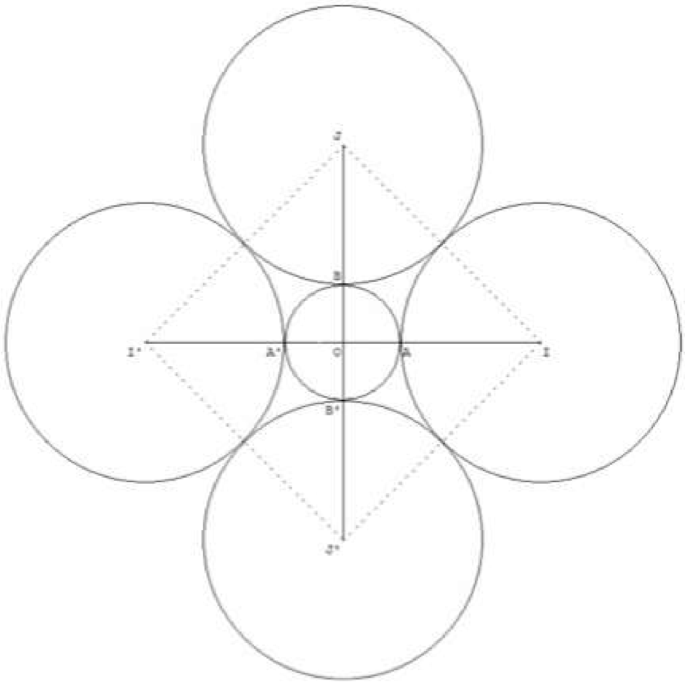
ou encore :

$$r^2 + 2r - 1 = 0$$

Une seule solution positive : $\sqrt{2}$ -1.



Pour construire le point I, on peut transformer B en B" par la rotation de $\pi/4$ radians et de centre A, puis transformer B" par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.



2^ème^ cas : cercles extérieurs

Dans le triangle rectangle OIJ :

$$IJ^2 = OI^2 + OJ^2 \quad \text{c-à-d} \quad 4r^2 = 2(1 + r)^2$$

ou encore :

$$r^2 - 2r - 1 = 0.$$

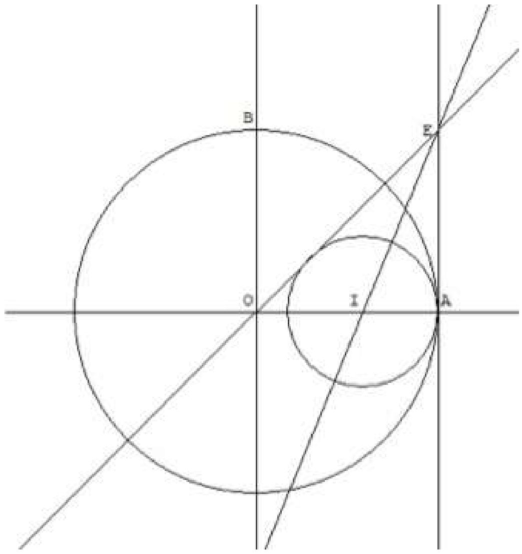
Une seule solution positive : $\sqrt{2}$ +1.

Pour construire le point I, on peut transformer B en B" par la rotation de $-3\pi/4$ radians et de centre A, puis transformer B" par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Autre solution de Jacques Chayé

Soit E l'intersection de la tangente à C en A et de la bissectrice de l'angle AÔB et soit I l'intersection de [OA] et de la bissectrice de l'angle AÊO.

Le cercle de centre I et passant par A est un des cercles cherchés.



Questionnaire sur les Jeux Olympiques (réponses)

Amusons-nous

Répondre vrai ou faux aux propositions suivantes.

- La crosse est un sport qui est apparu deux fois aux Jeux	Vrai	Faux
- Tarzan a été champion olympique	Vrai	Faux
- En 1900 il y avait plus de 5 % de concurrentes femmes	Vrai	Faux
- Le 100 m féminin a eu lieu pour la 1ère fois aux Jeux Olympiques de 1928	Vrai	Faux
- Deux athlètes ont remporté 2 marathons	Vrai	Faux
- Les Jeux Olympiques d'hiver ont été décalés en 1990	Vrai	Faux
- Les premiers Jeux Paralympiques officiels datent de 1960	Vrai	Faux

Le savez-vous ?

- Qu'a fait le père du nageur Jean Boiteux pour fêter la victoire de son fils ? A plongé tout habillé dans une piscine.
- En quelle année est apparu le serment olympique ? 1920 à Anvers
- Quel était le surnom du triple vainqueur du 5000 m, 10 000 m et marathon en 1952 ? « La locomotive tchèque » (Émile Zatopek)
- À quelle date la proportion de femmes participantes a dépassé 20 % ? En 1960 aux jeux d'hiver.

Parallèlement certaines épreuves non-officielles se sont déroulées.
Saurez-vous les retrouver ?

- saut en hauteur à cheval	Vrai	Faux
- saut en longueur à cheval	Vrai	Faux
- poésie	Vrai	Faux
- pétanque	Vrai	Faux
- tir au canon	Vrai	Faux
- pèche à la ligne	Vrai	Faux

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. regapmep@apmep-poitoucharentes.fr
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Frédéric de Ligt	*Éditeur*	APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Comité de rédaction	Frédéric de Ligt, Jacques Germain, Jean Fromentin, Philippe Rogeon	*Siège social*	Voir adresse ci-dessus
Imprimerie	IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)	*Dépôt légal*	Décembre 2023