Ru – Bri – COLLAGE

Frédéric de Ligt

Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Jean-Christophe Laugier *(Rochefort) nous a fait parvenir le texte ci-dessous à propos de* ***la formule du crible.***

Dans ce qui suit, A est un ensemble fini, on notera $|A|$ le cardinal de A ou effectif de A comme disent les « combinatoriens ». On notera également $[n]$ l'ensemble {1, 2, …, n}.

La formule du crible est, on le sait, une généralisation de la formule $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant des ensemble finis, cette formule peut s'écrire :

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S_k \text{ avec } S_k = \sum_{I\subseteq[n],|I|=k}|\cap_{i\in I} A_i| \quad (1)$$

Il est d'usage de démontrer (1) par récurrence sur n. Mais on peut, comme on va le voir, la démontrer également par récurrence sur $p = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$.

L'égalité (1) est évidemment vraie si p = 0. Supposons-la vraie jusqu'à l'ordre p ($p \geq 0$). Soit A_1, A_2, … A_n tels que $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = p + 1$. Soit x un élément fixé de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ et soit I_0 l'ensemble non vide des indices i tels que $x \in A_i$. Posons $A_i' = A_i - \{x\}$.

Alors $|\cap_{i\in I} A_i'| = |\cap_{i\in I} A_i| - 1$ si $I \subseteq I_0$ et $|\cap_{i\in I} A_i'| = |\cap_{i\in I} A_i|$ si $I \not\subseteq I_0$.

D'où $S'_k = \sum_{I\subseteq[n],|I|=k}|\cap_{i\in I} A'_i| = S_k - \sum_{I\subseteq I_0,|I|=k} 1 = S_k - \binom{r_0}{k}$ en posant $r_0 = |I_0|$.

Par suite $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left[S'_k + \binom{r_0}{k}\right] = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}S'_k + \sum_{k=1}^{r_0}(-1)^{k-1}\binom{r_0}{k}$

$= |A'_1 \cup A'_2 \cup \ldots \cup A'_n| - \sum_{k=1}^{r_0}(-1)^{k-1}\binom{r_0}{k} = p - (-1) = p + 1 = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$. CQFD

Nous allons démontrer à présent, également par récurrence sur $p = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ le résultat suivant (inégalité de Bonferroni).

Pour $1 \leq r \leq n$, $S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^r S_r$ majore (resp. minore) $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$ si r est impair (resp. pair). En d'autres termes $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| - (S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^{r-1}S_r)$ a le signe de $(-1)^r$. (2)

L'affirmation (2) est évidemment vraie si p = 0. Supposons-la vraie jusqu'à l'ordre p ($p \geq 0$). Soit A_1, A_2, …, A_n tel que $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = p + 1$. Alors

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| - \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}S_k &= |A'_1 \cup A'_2 \cup \ldots \cup A'_n| + 1 - \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\left[S'_k + \binom{r_0}{k}\right] \\ &= |A'_1 \cup A'_2 \cup \ldots \cup A'_n| + 1 - \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}S'_k - \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\binom{r_0}{k} \\ &= |A'_1 \cup A'_2 \cup \ldots \cup A'_n| - \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}S'_k + \sum_{k=0}^{r}(-1)^{k}\binom{r_0}{k}\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $|A'_1 \cup A'_2 \cup \ldots \cup A'_n| - \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}S'_k$ a le signe de $(-1)^r$.

D'autre part, on vérifie aisément, en utilisant la relation $\binom{r_0}{k} = \binom{r_0 - 1}{k} + \binom{r_0 - 1}{k-1}$, l'égalité $\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k}\binom{r_0}{k} = (-1)^r\binom{r_0 - 1}{r}$. Donc $\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k-1}\binom{r_0}{k}$ a le signe de $(-1)^r$

et par suite $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| - \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}S_k$ a bien le signe de $(-1)^r$. CQFD

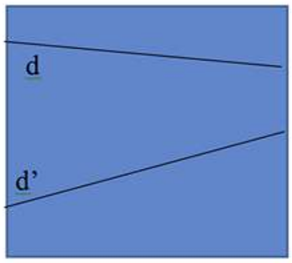
Remarque : les résultats qu'on vient d'établir restent évidemment valables si l'on remplace la mesure « effectif » $X \to |X|$ définie sur un ensemble fini Ω par n'importe quelle mesure positive μ sur Ω, en particulier une probabilité. Il suffit dans les démonstrations précédentes de remplacer 1, effectif de {x}, par sa mesure $\mu(\{x\})$.

Des problèmes

133-1 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)*

On appelle répunits un nombre entier naturel écrit dans une certaine base entière uniquement avec des 1. Il s'agit alors de montrer que pour tout nombre entier naturel non nul n, non divisible par 2 ou par 5, il existe une infinité de répunits écrits en base 10 qui sont des multiples de n.

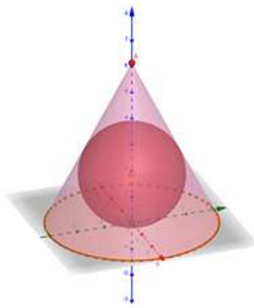
133-2 *proposé par Daniel Perrin (Orsay)*



Un classique

La planche à dessin de Zénon Chalant, le dessinateur industriel maladroit de Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne), est trop petite et il a dessiné deux droites d et d' qui se coupent en un point O situé en dehors de la planche. Comment peut-il tracer la bissectrice de l'angle formé par les deux droites ?

133-3 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)*



Un problème du Bac 1875 à Poitiers

Circonscrire à une sphère un cône de volume minimum.

133-4 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)*

Quadruplets diophantiens

On appelle quadruplet diophantien un ensemble de quatre nombres entiers naturels $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ tel que $a_ia_j + 1$ est un carré parfait avec $1 \leq i < j \leq 4$.

Dans ses commentaires sur *Les arithmétiques* de Diophante, Pierre de Fermat reprend la question XXI de son livre IV :

« Invenire quatuor numeros, ut qui fit ex binorum mutua multiplicatione, adscitâ unitate, faciat quadratum ».

Il propose comme solution le quadruplet (3, 1, 8, 120). En effet, et pour ceux qui ont perdu leur latin, le texte ci-dessus s'éclairera : $3\times1 + 1 = 2^2$; $3\times8 + 1 = 5^2$; $3\times120 + 1 = 19^2$; $1\times8 + 1 = 3^2$; $1\times120 + 1 = 11^2$; $8\times120 + 1 = 31^2$.

Quelle valeur donner à l'entier naturel n pour que (1, 8, 15, n) soit un quadruplet diophantien ?

Des solutions

128-4 *proposé par Jacques Chayé*

Sur une poulie passe une corde à laquelle sont suspendus, d'un côté un poids, de l'autre un chat de même poids que le poids.
Le poids du chat plus le poids de la corde fait une fois et demi le poids du poids.
Le poids du chat en livres anglaises est exprimé par le même nombre que l'âge de la mère du chat en années.
La mère du chat est deux fois plus âgée que ne l'était le chat quand sa mère avait la moitié de l'âge qu'il aura quand il aura trois fois l'âge qu'avait sa mère quand elle avait trois fois l'âge qu'il avait.
L'âge du chat et l'âge de la mère totalisent 8 ans. La livre anglaise vaut 16 onces. La corde pèse 4 onces par pied.
Quelle est, en pied, la longueur de la corde ?

Solution de l'auteur

La question centrale est celle de l'âge. Soit a l'âge du chat en années quand sa mère avait 3 fois son âge. La différence d'âge est donc de 2a.
Quand l'âge de la mère sera $\frac{1}{2} \times 3 \times 3a = \frac{9a}{2}$ celui du chat sera $\frac{5a}{2}$. L'âge actuel de la mère est donc égal à 5a et celui du chat à 3a.
D'autre part, $5a + 3a = 8$, c'est-à-dire $a = 1$. Le chat a donc 3 ans. Le reste en découle facilement : la corde pèse 1,5 livres, soit 24 onces ; elle mesure 6 pieds.

131-1 *proposé par Frédéric de Ligt*

Montrer que quel que soit la disposition des quinze billes de billard américain dans le triangle ci-dessous, il y a toujours deux billes portant un numéro pair qui sont en contact.

Solution de l'auteur

On regroupe les billes par cinq comme indiqué ci-contre. Dans chaque quadrilatère, la présence de plus de deux billes portant un numéro pair entraîne l'existence d'un contact entre deux numéros pairs. On ne peut donc placer plus de 6 numéros pairs dans le triangle alors qu'il y a sept billes de cette sorte au total. Il y a donc nécessairement au moins un contact entre deux billes portant un numéro pair.

131-2 *proposé par Daniel Perrin*

La maîtresse et les fractions

Madame Hortense Aignante, maîtresse du cours moyen de l'école des Aiguilles à Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne) a donné un exercice sur les fractions à ses élèves. Le pourcentage de réussite a été de 47,82 % (valeur arrondie par défaut). Sachant que les classes de Saint-Tricotin ne sont pas surchargées (et qu'elles ont en tout cas moins de 30 élèves), dire combien la classe comporte d'élèves et combien ont réussi l'exercice.

Solution de Walter Mesnier

On cherche deux entiers $0 < n < N < 30$ tels que $0{,}4782 \leq n/N < 0{,}4783$.

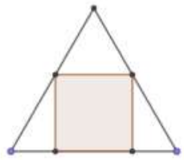
Autrement dit $0{,}4782N \leq n < 0{,}4783N$, soit encore $E(0{,}4782N) < n = E(0{,}4783N)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Un petit programme permet de prouver rapidement que $N = 23$ et que $n = 11$. Conclusion : la classe comporte 23 élèves dont 11 ont réussi l'exercice.

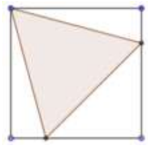
```
for N in range (30) :
    print (N, “ploum”, 0.4782*N, “ ”, 0.4783*N)

for N in range (30) :
    if int(0.4782*N) < int(0.4783*N) : print (N)
```

132-1 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)*

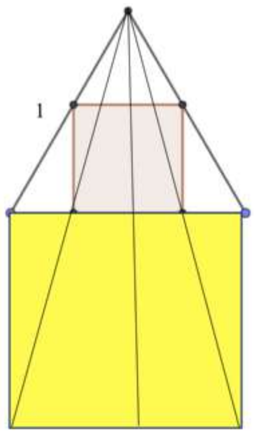
Qu'est-ce qui occupe le plus de place : un triangle équilatéral inscrit dans un carré ou un carré inscrit dans un triangle équilatéral ?





Solution de Walter Mesnier

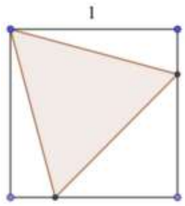
Remarque : On reconnaît une variante du rond dans le carré ou du carré dans le rond, vu au rallye niveau seconde en 2012.



Réponse : C'est le carré dans le triangle qui occupe le plus de place (à peu de chose près).

J'appelle x le côté du carré, et je fixe le côté du triangle à 1. En faisant apparaître le carré de côté 1 sous le triangle, les deux carrés sont homothétiques de centre le sommet du triangle et de rapport $\frac{x}{1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}$.

On en déduit, après quelques calculs, que $x = 2\sqrt{3}-3 \approx 0{,}46$. Et donc le rapport des aires vaut $\frac{\left(2\sqrt{3}-3\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = 28\sqrt{3} - 48 \approx 0{,}497$, soit un taux de remplissage de 49,7%.



J'appelle x le côté du triangle, et je fixe le côté du carré 1. Alors le triangle rectangle isocèle en bas à droite a pour côté $1 - \sqrt{x^2-1}$ et pour hypoténuse x. D'où l'équation $(1 - \sqrt{x^2-1})x\sqrt{2} = x$.
En élevant au carré, et en réduisant, on obtient une équation du second degré $x^2 + 2\sqrt{2}x - 4 = 0$ avec une seule solution positive $x = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1{,}035$.

Le rapport des aires vaut alors $\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}{1} = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0{,}464$.
Soit un taux de remplissage de 46,4%.

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9

Site : http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. regapmep@apmep-poitoucharentes.fr
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Frédéric de Ligt	*Éditeur*	APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Comité de rédaction	Frédéric de Ligt, Jacques Germain, Jean Fromentin, Philippe Rogeon	*Siège social*	Voir adresse ci-dessus
Imprimerie	IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)	*Dépôt légal*	Mars 2023