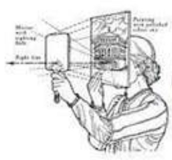
Exposition Maths & images

En préparant l'expo…

Les images de nos écrans, vous connaissez ?




Les artisans du pôle 5 : *Jean-Charles Canonne, Jean-Paul Guichard et Nicolas Minet*

Après une promenade historique sur les traces de la perspective, en voici une contemporaine autour des images de nos écrans qui sera l'un des pôles de notre très prochaine exposition **Maths & images**. L'inauguration sera suivie d'une conférence de Denis Favennec sur la perspective. Venez nombreux la découvrir et soutenir notre travail.

Quand vous affichez une image sur votre portable, tablette ou ordinateur, avez-vous une idée de la façon dont elle est fabriquée ? L'idée est très simple : un assemblage de petits carrés, les pixels. Mais comment, avec cette technique, obtenir une image aussi vraie que possible ? Définition, résolution, dpi… sont des termes techniques qui nous sont familiers quand on scanne une photo et qu'on parle de sa qualité. Que recouvrent ces termes ? Quelle est leur importance ?

Cette image il va falloir la transformer en nombres pour en faire un fichier numérique qui permettra de la stocker, de l'afficher, de l'imprimer, de la modifier. Pour cela il faut coder les pixels et leurs couleurs, et faire des choix en tenant compte des contraintes informatiques : structure des mémoires, taille des fichiers, taille des supports… Pour améliorer la qualité de l'image on va transformer les nombres du fichier avec des statistiques, et pour réduire sa taille on utilise des transformations de Fourier.

Si l'image peut être obtenue avec un appareil photo numérique, elle peut aussi être créée de toutes pièces en la programmant sur un ordinateur avec un logiciel. Mais comment programmer les courbes qui délimitent les formes ? Quels pixels choisir pour tracer une droite, un cercle ? Comment transformer le continu en pixels, comment le discrétiser ? C'est l'objet d'une nouvelle géométrie qui offre bien des surprises : la géométrie des pixels.

L'image numérique est un objet multifacettes : une représentation de la réalité comme toute image, un objet de la réalité, bien visible sur un écran, un être immatériel fait de nombres et de formules, le fichier image, sans lequel l'image ne peut exister ! Et dans cette image sont embarqués des tas de mathématiques, et de plus en plus. Vous avez pu en avoir un aperçu si vous êtes allés au Journées Nationales à Jonzac et que vous avez choisi les conférences de Sylvie Aleyrangues, de Rémi Guillevin ou Philippe Carré qui travaillent tous dans des laboratoires de l'Université de Poitiers. Et il y a là aussi des tas de nouveaux métiers passionnants pour nos élèves, mêlant mathématiques et informatique.

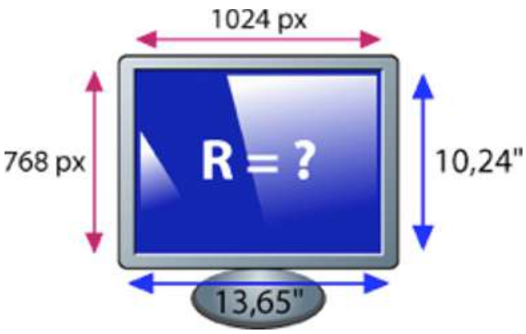
Compliqué tout cela ? Non ! Car on peut aborder le sujet par plusieurs aspects, de la maternelle à l'université. **Quelques flashs.**

Le pixel art


Les Romains n'auraient-ils pas inventé les pixels ? Les petits carrés de couleur qui forment la mosaïque moderne du dauphin ne sont pas alignés sur un quadrillage. Or le support de toute image numérique est un quadrillage, que ce soit celui du capteur d'un appareil photo ou celui de l'écran de votre ordinateur, et ses carrés s'appellent des pixels.

C'est ce qui a donné naissance au pixel art avec l'apparition des premières images sur les écrans dans les années 1970. Et on est passé de Space Invaders (1978) à Invader, l'artiste français qui réalise sur les murs des villes du monde des mosaïques respectant la loi des pixels. Evidemment c'est plus difficile pour représenter des vagues, un soleil, des formes arrondies… Mais en s'éloignant…
De nombreux sites pédagogiques se sont emparés du pixel art. Pour les jeunes enfants, réaliser des tableaux en pixel art, par coloriage, permet de travailler le repérage. Et sur une idée de Christine Oudin (dans Jeux 9 de l'APMEP) se sont développées de nombreuses activités numériques, pour les cycles 3 et 4, répétitives, motivées par la réalisation d'un dessin inspiré du pixel art qui permettent un autocontrôle des résultats (voir sur le site de l'IREM de Lyon : https://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/Pixel_Art_Mathematiques.pdf).

Les écrans



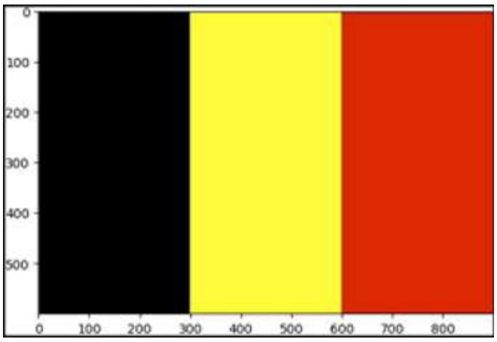
Les caractéristiques de cet écran nous permettent de savoir combien de pixels s'affichent (sa définition) : 1024x768, soit environ 800 000. Et quelle est alors la taille d'un pixel, ou le nombre de pixels par cm ou par pouce (ppp) ? C'est la résolution R qui est demandée sur ce schéma : 75ppp. Le pouce c'est 2,54 cm, ce qui fait entre 29 et 30 pixels par cm, soit environ 3/10 de mm pour la taille du pixel.
Et pour l'écran de votre portable ?

Les fichiers images

Matisse – La Blouse Roumaine

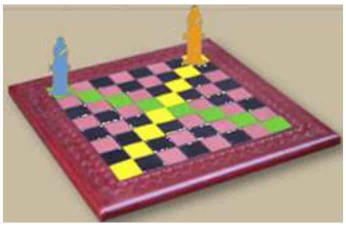
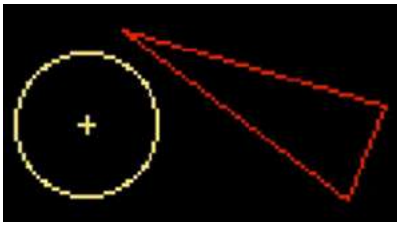
Quelles informations nous apportent ces données que l'on peut retrouver facilement sur le fichier de nos photos (propriétés, onglet « détails ») ?
La définition de l'image : les 480 000 pixels (0,48 Mpx) qui la forment. Un bon exercice de calcul mental pour nos élèves.
La profondeur de couleur : les couleurs sont ici codées en 24 bits, soit 3 octets par pixel (1 octet = 8 bits).
Donc l'image a une taille de 3 × 480 000 octets, soit environ 1,5 millions d'octets.
En comparant avec la taille du fichier on constate que l'image a été compressée. La taille du fichier est environ 5,5 fois moins grande que la taille de l'image. On peut se demander combien de telles images auraient pu être stockées dans une clé de 12 Go s'il n'y avait aucune compression. L'étude des algorithmes de compression nous renvoie vers nos études universitaires. Comme quoi les mathématiques sont plus utiles qu'on veut bien le croire ! Les calculs semblent relativement simples, mais ne trouvez-vous pas étrange que 268 307 octets ≈ 262 Ko ? D'où vient la différence ? En fait, en informatique, 1 Ko ne vaut pas 1 000 octets mais 2^{10} octets, soit 1 024 octets.
Donc 268 307 octets = 268 307/1 024 Ko ≈ 262 Ko, cqfd. Les puissances, on les retrouve aussi dans le codage des couleurs. On peut coder les couleurs sur 1 bit (2 couleurs possibles, usuellement noir et blanc), sur 2 bits (4 couleurs possibles), sur 4 bits (16 couleurs possibles), sur 8 bits (256 couleurs possibles), et sur 24 bits ? $(2^8)^3 = 2^{24}$ possibilités soit plus de 16 M de couleurs (un bon calcul sur les puissances à partir de $2^{10} \approx 10^3$). Et ceci à l'aide de 256 teintes pour chacune des 3 couleurs de base (RVB) codées par un nombre de 0 à 255, codes que vous retrouvez sur des logiciels de traitement ou de fabrication d'images. Comme quoi les quelques « chiffres » des propriétés du fichier d'une image peuvent nous amener loin.

Fabriquer des images numériques



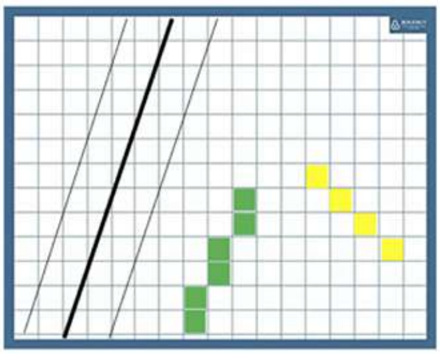
On peut facilement imaginer comment, avec un logiciel (comme Scratch ou Python), on va pouvoir produire l'image d'un drapeau tel que celui de la Belgique, le modifier pour en faire celui de la France… Mais pour réaliser d'autres drapeaux, il va falloir utiliser des droites obliques ou des cercles. Leurs équations, bien calibrées, vont permettre d'y arriver via le régionnement du plan qu'elles opèrent. On voit combien équations et inéquations à deux inconnues vont être des outils utiles et donner sens à leur apprentissage.

La géométrie des pixels

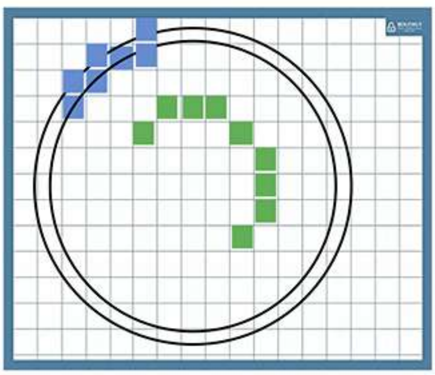
   

Mais si on zoome sur la droite de pente 1 qui a permis de réaliser le pavillon de marine Oscar, on n'a plus une droite mais un escalier de pixels. Nous ne sommes plus dans le continu, mais dans le discret, et la géométrie n'est plus forcément la même. Par exemple deux droites de pentes différentes peuvent n'avoir aucun pixel commun, comme le montre l'image de l'échiquier, donc ne se sont pas sécantes au sens classique d'avoir un point commun ! Et petit à petit il faut tout redéfinir : les objets et leurs relations. Une géométrie à découvrir.
Pour terminer, nous vous proposons deux activités que l'on peut faire à partir du cycle 2, et qui permettent de relier la géométrie des pixels aux problèmes que rencontre le pixel art pour représenter les formes.

Tracés de droites et de cercles avec des pixels.



1) Quels pixels peut-on colorier pour représenter la droite en gras sur le quadrillage, en restant entre les deux parallèles ?
Imaginons que les pixels jaunes sont sur une même droite. Coloriez les autres pixels de cette droite !
Imaginons que les pixels verts sont sur une même droite pixélisée. Coloriez les autres pixels de cette droite verte !
Vous venez de dessiner une droite verte et une jaune avec des pixels. Ont-elles la même pente ? Ces droites sont-elles sécantes pour autant ?



2) Imaginons que les pixels verts sont sur un même cercle. Coloriez les autres pixels de ce cercle.
Coloriez le pixel qui est au centre du cercle
Disons qu'un cercle bleu est constitué des pixels bleus qui sont au moins en partie compris entre les deux cercles parallèles. Coloriez les autres pixels de ce cercle bleu !