Ru – Bri – COL⅃AGE

Frédéric de Ligt

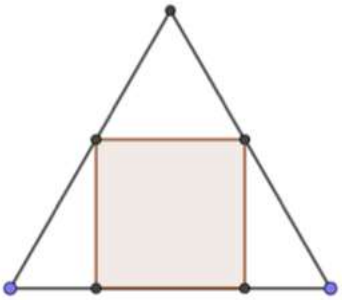
Merci aux collègues d'alimenter cette rubrique. Nous nous ferons un plaisir de publier vos énoncés de problèmes, vos solutions, vos notes de lectures, vos interrogations, vos expériences pédagogiques, vos billets d'humeur… Cette rubrique est à vous.

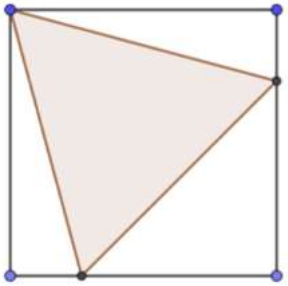
Vous pouvez envoyer vos contributions à l'adresse : frederic.deligt2@gmail.com

Des problèmes

132-1 *proposé par Frédéric de Ligt (Montguyon)*

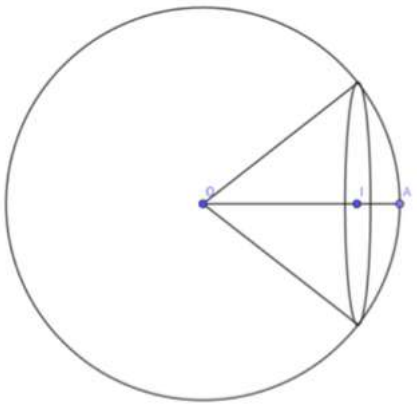
Qu'est-ce qui occupe le plus de place : un triangle équilatéral inscrit dans un carré ou un carré inscrit dans un triangle équilatéral ?





132-2 *proposé par Jacques Chayé (Poitiers)*

Couper une sphère par un plan, de telle sorte que le segment sphérique ayant une base déterminée par ce plan soit équivalent au cône de même base qui a pour sommet le centre de la sphère (problème du bac 1808 à Nancy).



132-3 *proposé par Walter Mesnier (Poitiers)*

Lors d'un problème d'optimisation, un élève de première, spécialité maths, indique dans sa copie : « *La dérivée s'annule pour x = 64,2, or on cherche un nombre x entier, le maximum est donc atteint pour x = 64, car il est le plus proche de 64 que de 65.* »
Son argument est faux. J'ai cherché un contre-exemple simple, c'est-à-dire une fonction f telle que $f(64) < f(65)$ et qui admet un maximum pour $x = 64{,}2$.
C'est impossible avec un trinôme. Mais c'est bien possible avec un polynôme de degré 3. Sauriez-vous démontrer ces deux affirmations ?

132-4 *D'après une idée de Serge Parpay (Niort)*

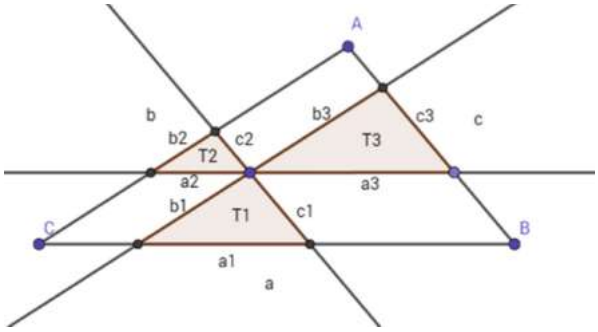
L'équation $\overline{ab}^2 - \overline{ba}^2 = \square$ admet une unique solution non triviale 65, en effet $65^2 - 56^2 = 33^2$.
Qu'en est-il de l'équation $\overline{abc}^2 - \overline{cba}^2 = \square$?

Des solutions

127-3 *proposé par Frédéric de Ligt*

On a tracé les droites parallèles aux côtés du triangle ABC passant par un point intérieur au triangle. Il apparaît trois triangles t_1, t_2 et t_3 d'aires respectives T1, T2 et T3. Si on note S l'aire du triangle ABC, montrer qu'alors : $\sqrt{S} = \sqrt{T1} + \sqrt{T2} + \sqrt{T3}$.

Solution de Louis Rivoallan



Utilisons les notations habituelles pour les longueurs des côtés du triangle ABC : a, b, c, et pour les longueurs des côtés des triangles T_i : a_i, b_i, c_i avec i valant 1, 2 ou 3.

Tout d'abord, puisque les côtés opposés d'un parallélogramme sont de la même longueur, on a la relation $a = a_1 + a_2 + a_3$ (idem pour b ou c).

Les triangles T_i ayant leurs côtés parallèles à ceux du triangle ABC, ces triangles sont donc semblables.

Soit k_i le coefficient tel que $a_i = k_i a$, $b_i = k_i b$ et $c_i = k_i c$.

On a donc $a = k_1 a + k_2 a + k_3 a$ et par suite $1 = k_1 + k_2 + k_3$.

Par ailleurs, la formule de Héron pour l'aire du triangle donne

$$16S^2 = (a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c).$$

De même pour T_i : $16T_i^2 = (a_i + b_i + c_i)(a_i - b_i + c_i)(a_i + b_i - c_i)(-a_i + b_i + c_i)$.

$$16T_i^2 = k_i^4 (a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)(-a + b + c)$$

Donc $16T_i^2 = k_i^4 \times 16S^2$. En simplifiant et en prenant la racine quatrième on obtient $\sqrt{T_i} = k_i\sqrt{S}$.

Donc $\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = (k_1 + k_2 + k_3)\sqrt{S}$ et puisque $k_1 + k_2 + k_3 = 1$ on a donc

$\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = \sqrt{S}$.

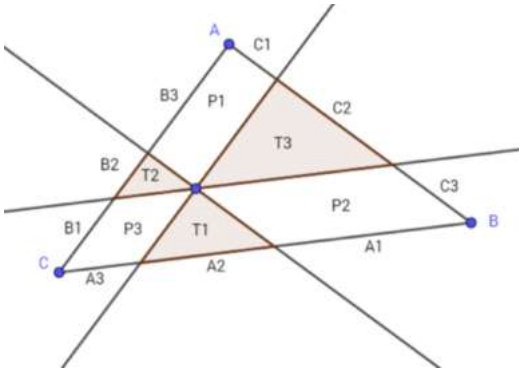
Autre version ou une fois encore la démonstration du fainéant.

En déplaçant A sur une droite parallèle à (BC) les aires des triangles ABC et T_i sont invariants.

Plaçons A tel que ABC soit un triangle isocèle. En utilisant une dilatation bien choisie, on transforme ABC en un triangle équilatéral (et les triangles T_i aussi par la même occasion).

L'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Donc la racine carrée de l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{2}a$. Puisque $a = a_1 + a_2 + a_3$ alors $\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3} = \sqrt{S}$.

Solution de l'auteur



S = T1 + T2 + T3 + P1 + P2 + P3 où P1, P2 et P3 sont des aires de parallélogrammes.
P1 = C1.B3.sin$\hat{A}$. Mais les triangles t_2 et t_3 sont semblables ; donc $\frac{C1}{C2} = \frac{B2}{B3}$ d'où :

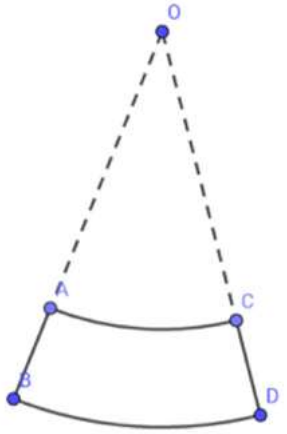
P1 = (C1.B3.sin$\hat{A}$)$^{1/2}$. (C1.B3.sin$\hat{A}$)$^{1/2}$
= (C1.B3.sin$\hat{A}$)$^{1/2}$. (C2.B2.sin$\hat{A}$)$^{1/2}$
= (C1.B2.sin$\hat{A}$)$^{1/2}$. (C2.B3.sin$\hat{A}$)$^{1/2}$
= 2(C1.B2.sin$\hat{A}/2$)$^{1/2}$. (C2.B3.sin$\hat{A}/2$)$^{1/2}$
= $2\sqrt{T2.T3}$.

De même P2 = $2\sqrt{T1.T3}$ et P3 = $2\sqrt{T1.T2}$.
Ainsi S = T1 + T2 + T3 + $2\sqrt{T2.T3}$ + $2\sqrt{T1.T3}$ + $2\sqrt{T2.T3}$ = $(\sqrt{T1} + \sqrt{T2} + \sqrt{T3})^2$.
Finalement $\sqrt{S} = \sqrt{T1} + \sqrt{T2} + \sqrt{T3}$.

128-3 *proposé par Jacques Chayé*

Pour réaliser un abat-jour, on dispose d'une structure métallique constituée de deux cercles de diamètres 15 cm et 18 cm, reliés par trois tiges rectilignes de 15 cm.
On désire habiller cette structure d'un tissu.
Quelle découpe doit-on prévoir ?

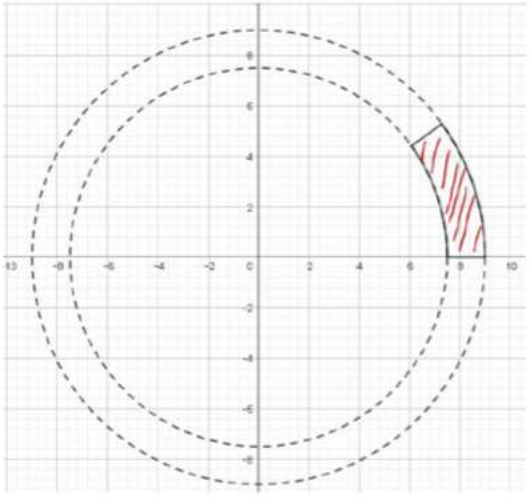
Solution de l'auteur

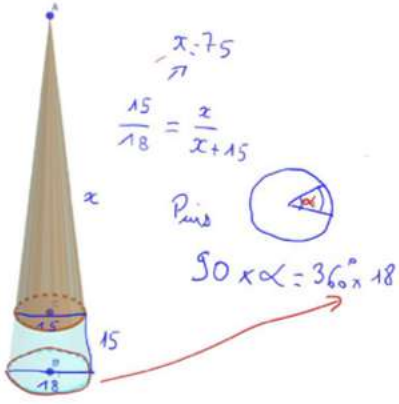


Il s'agit de construire le développement d'un tronc de cône, imaginé ci-contre à petite échelle.
On note l la longueur de l'arc d'extrémités A et C, L la longueur de l'arc d'extrémités B et D, α la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOC}$ et r la distance OA.
On a l = 15π et aussi l = rα donc rα = 15π.
L = 18π et aussi L = (r + 15)α. Par suite 18π = (r + 15)α.
On aboutit à α = π/5 et donc r = 15π/ α = (15π)/(π/5) = 75.
On peut alors tracer précisément la figure à l'aide des cercles de centre O et de rayons respectifs 75 et 75 + 15 dont on ne conserve que les arcs qui sont compris dans un secteur circulaire de π/5 radians.

Solution de Walter Mesnier

Le rayon du grand cercle est 90 et l'angle 72°.
Un bon collégien du 20e siècle devrait savoir faire cela. Aujourd'hui, il sait faire la commande sur Internet.





130-1 *proposé par Frédéric de Ligt*

Il s'agit de placer tous les entiers de 1 à 16 dans cette grille de telle sorte que chaque entier soit la moyenne arithmétique des quatre entiers qui lui sont adjacents. Avant d'essayer de résoudre un système linéaire de 16 équations à 16 inconnues vous pourrez utilement visionner la vidéo d'Olivier Druet à l'adresse https://video.math.cnrs.fr/carres-magiques-de-dirichlet/

Solution de l'auteur

Avec un petit programme informatique comme suggéré dans la vidéo on trouve sans trop de peine les nombres à placer dans la grille.

	17	27	-10	36	
-18	3	11	6	14	-1
-15	2	8	9	15	33
20	12	10	7	4	-7
21	16	13	5	1	-2
	18	21	-1	-3	

131-3 *proposé par Frédéric de Ligt*

Si des points du plan, en quantité infinie, sont tous situés à des distances mutuelles mesurées par des nombres entiers alors ils sont nécessairement tous alignés.

Solution de l'auteur

Soit E un ensemble infini de points du plan dont les distances mutuelles sont toutes entières. On peut bien sûr les disposer le long d'une droite graduée, mais alors ils sont tous alignés. On suppose maintenant qu'il existe une autre disposition où tous les points ne seraient pas alignés. Il existe alors au moins trois points A, B et C non alignés. On note AB = n et AC = m. D'après l'inégalité triangulaire pour tout point M du plan on a $|MA - MB| \leq AB$. Comme MA et MB sont entières quand M est dans E, alors pour tout M de E il existe un entier naturel $k \leq n$ tel que $|MA - MB| = k$. Ceci est la définition bifocale d'une hyperbole de foyers A et B dont la distance entre les sommets vaut k. Tout point M de E appartient donc à l'une des hyperboles de cette famille H_1 d'hyperboles deux à deux distinctes. On mène le même raisonnement avec la longueur entière AC = m. On définit ainsi une famille H_2 d'hyperboles deux à deux distinctes. Ces deux familles n'ont pas d'hyperbole en commun.

Tout point M de E appartient donc à l'intersection d'une hyperbole de H_1 et d'une hyperbole de H_2. Mais deux hyperboles distinctes se coupent en au plus 4 points. Il y a donc au plus 4(n+1)(m+1) points d'intersection entre ces deux familles d'hyperboles, ce qui est une quantité finie de points. Contradiction.

Cette question a été résolue par P. Erdös et NH. Anning en 1945 puis améliorée comme ci-dessus par P. Erdös la même année (Bull. Amer. Math. Soc.)

Régionale de l'APMEP Poitou-Charentes
IREM de Poitiers, Bâtiment H3, SP2MI Futuroscope,
Bd Marie et Pierre Curie, TSA 61125
86073 Poitiers Cedex 9 Site :

http://apmep.poitiers.free.fr/
Mél. regapmep@apmep-poitoucharentes.fr
Tél. 06 67 94 93 36

Abonnement 1 an (4 numéros + suppléments) : 8 €.

ISSN : 1145 - 0266

Directeur de la publication	Frédéric de Ligt	*Éditeur*	APMEP, Régionale de Poitou-Charentes
Comité de rédaction	Frédéric de Ligt, Jacques Germain, Jean Fromentin, Philippe Rogeon	*Siège social*	Voir adresse ci-dessus
Imprimerie	IREM de Poitiers (Adresse ci dessus)	*Dépôt légal*	Mars 2023